

## Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje po matematikos mokymo reformos (1929–1940)

Joana Kastickaitė<sup>1</sup>, Juozas Banionis<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*

Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius

<sup>2</sup> *Vilniaus pedagoginis universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*

Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

E. paštas: kasjoa@mruni.lt; j.banionis@vpu.lt

**Santrauka.** LMD L konferencijos darbuose J. Kastickaitės ir J. Banionio straipsnyje „Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje iki matematikos mokymo reformos (1918–1928)“ aprašytas diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas iki matematikos mokymo reformos (1918–1928) [5], o šiame straipsnyje aptariamas diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas po matematikos mokymo reformos (1929–1940). Šiame straipsnyje remiamasi Juozo Stoukaus vadovėliu „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ (1925), Antano Juškos vadovėliu „Matematinės analizės pagrindai“ (1934), tuometinėmis aukštesniųjų mokyklų programomis ir to laikotarpio matematikų straipsniais.

**Raktiniai žodžiai:** diferencialinis skaičiavimas, integralinis skaičiavimas, diferencialinio skaičiavimo ir integralinio skaičiavimo taikymai, funkcija, matematikos mokymo reforma.

Straipsnio tikslai: supažindinti su diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymu Lietuvos mokykloje po matematikos mokymo reformos (1929–1940); nustatyti diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymo privalumus ir trūkumus nurodytu laikotarpiu.

Pirmojoje matematikos, fizikos ir kosmografijos mokytojų konferencijoje, vykusioje 1928 m. sausio 3–5 d., buvo nuspręsta keisti vidurinių ir aukštesniųjų mokyklų matematikos programą. Tokio pakeitimo projektą buvo sutvarkiusi profesoriaus Zigmo Žemaičio (1884–1969) vadovaujama Vykdomoji komisija. Teikiamame naujajame programos projekte įdėta aukštosios matematikos elementų, pertvarkyti kiti dalykai. Tai vykdydama, komisija rėmėsi Prancūzijos, Vokietijos mokyklų matematikos programomis. Buvo manyta, kad yra pedagogiškai nenuoseklu, jei kai kurios matematikos kurso dalys iškart išdėstomos, o paskui apie jas nekalbama; dėl to ji norėjo, kad dalykai būtų einami koncentrais. Šią mokytojams pateiktą programą komisija laikė tik „normaline“ programa mokykloms. Būtent, ji turėjo būti diskutuojama, kai kas gal išbraukta, pertvarkyta. Komisija nežiūrėjo į tą programą kaip tinkamą visoms mokykloms. Buvo siūloma mokyklas suskirstyti tipais ir pritaikyti joms kai kurias programos dalis. Lietuvos vidurinių ir aukštesniųjų mokyklų matematikos programai pritarė matematikos, fizikos, chemijos ir kosmografijos mokytojų II konferencija, vykusioje 1929 m.

Aukštesniųjų mokyklų programos buvo skirtos atskiriems profiliams: „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“, „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“, „su graikų kalba ir su sustiprintu svetimųjų kalbų dėstymu“. Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ ir „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ VII klasėje per algebrą pagal programą turėjo būti mokoma funkcijos ir jos argumento pokyčių santykių, įvedama išvestinės sąvoka, paaiškinama jos „geometriškoji“ (geometrinė) ir „mechaniškoji“ (mechaninė) prasmė, pagrindiniai sveikųjų „racionaliųjų“ (racionaliųjų) funkcijų diferencijavimo dėsniai, tų funkcijų diferencijavimas. Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ ir „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ VIII klasėje per „begalinių mažybių analizę“ (nykstamųjų dydžių analizę) pagal programą turėjo būti mokoma: išvestinės sąvokos, jos geometrinės ir mechaninės prasmės, pagrindinių funkcijų diferencijavimo dėsnų, „sudėtingųjų“ (sudėtinių) ir atvirkštinių funkcijų išvestinių, algebrinių, rodiklių, logaritminių ir „goniometrinių“ (trigonometrinių) funkcijų diferencijavimo. Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ pagal programą dar turėjo būti mokoma ciklometrinių (atvirkštinių trigonometrinių) funkcijų diferencijavimo, t.y. buvo platesnė diferencijavimo teorinė dalis. Aukštesniosiose mokyklose „su graikų kalba ir su sustiprintu svetimųjų kalbų dėstymu“ diferencialinio skaičiavimo pagal programą neturėjo būti mokoma [6].

„Begalinių mažybių“ analizės pagrindai buvo nauji dalykai, bet tai nesukėlė didelių ginčų dėl būtinumo įtraukti juos į to meto aukštesniųjų mokyklų matematikos programą.

1934 m. išleistas modernus analitinės geometrijos, diferencialinio ir integralinio skaičiavimo vadovėlis „Matematinės analizės pagrindai“ aukštesniajai mokyklai. Vadovėlio autorius – filosofijos daktaras, astronomas, įžymus pedagogas ir mokslo skleidėjas Antanas Juška (1902–1985).

Rašydamas vadovėlius ir dėstydamas, A. Juška rėmėsi Getingeno universiteto, kuriame mokėsi, profesoriumi Ričardu Kurantu (1888–1972). A. Juška aukštosios matematikos elementus taikė astronomijos uždavinių sprendimuose. A. Juškos vadovėlis Nepriklausomybės dešimtmetyje prisidėjo prie pažangesnio aukštosios matematikos elementų dėstymo. Buvo atsisakyta „begalinių mažybių“ pavadinimo, kuris buvo paveldėtas iš Rusijos imperijos gimnazijų [1].

Tais pačiais metais, t.y. 1934 m., kaip ir Antano Juškos vadovėlis „Matematinės analizės pagrindai“, buvo išleistas ir Bronislovo Ketarausko (1905–1978) vadovėlis „Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pagrindai“. Pastaroji knyga parašyta aukštesniosioms mokykloms. B. Ketarausko vadovėlis iš esmės skirtas realinėms gimnazijoms, bet parašytas taip, kad tiko ir kitoms gimnazijoms.

Aukštesniosioms mokykloms „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ ir „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ VII klasės programoje buvo pagrindinių sveikųjų „racionaliųjų“ (racionaliųjų) funkcijų diferencijavimo dėsnų, tų funkcijų diferencijavimo temos, o A. Juškos vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ tų temų nėra. Pastarojoje knygoje aiškinama funkcijos diferencialas, „specialiai iracionaliųjų“ funkcijų diferencijavimas, o matematikos programoje aukštesniosioms mokykloms apie tai neužsimenama. Kitos diferencialinio skaičiavimo teorinės dalies temos tos pačios matematikos programoje aukštesniosioms mokykloms ir knygoje „Matematinės analizės pagrindai“, todėl galima daryti išvadą, kad A. Juškos vadovėlio „Matematinės analizės pagrindai“ išvestinių skaičiavimo teorinės dalies tematika iš esmės atitiko ma-

tematikos programos aukštesniosioms mokykloms diferencialinio skaičiavimo teorinės dalies temas. Dėl to nagrinėjamas Antano Juškos vadovėlio „Matematinės analizės pagrindai“ skyrius apie išvestines ir jis lyginamas su Juozo Stoukaus (1886–1946) vadovėlio „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ atitinkamu skyriumi.

A. Juškos ir J. Stoukaus vadovėliuose yra temos: išvestinė, išvestinės geometrinė ir mechaninė reikšmė, funkcijų sumos, sandaugos ir dalmens diferencijavimas, laipsnio funkcijos išvestinė, funkcijos diferencialas, sudėtinių funkcijų diferencijavimas, atvirkštinių funkcijų išvestinių skaičiavimas, trigonometrinių funkcijų diferencijavimas, rodikliųjų ir logaritminių funkcijų diferencijavimas.

A. Juška, apibrėždamas išvestinę, nesinaudoja „begalinės mažybės“ pavadinimu: „Tad išvestine vadiname ribą, į kurią eina santykis funkcijos „pakitimo“ (pokyčio) su argumentu „pakitimu“, šiam paskutiniam einant į nulį“ [3], o J. Stoukus naudoja: „Kadangi, kaip sutarta, funkcija yra netrūki, tai skirtumas einant į nulį, yra begalinė mažybė“ [7].

A. Juška daug trumpiau nei J. Stoukus paaiškina išvestinės geometrinę prasmę.

A. Juška ir J. Stoukus mechaninę išvestinės prasmę aiškina panašiai, tik A. Juška naudoja modernesnius žymėjimus.

Vadovėlyje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ po teorinių temų yra daugiau išspręstų pavyzdžių nei vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“. Kad mokiniai geriau suprastų, kaip diferencijuoti funkcijas, ir geriau įsisavintų teorinę medžiagą abiejuose vadovėliuose galėtų būti daugiau išvestinių skaičiavimo išspręstų pavyzdžių.

A. Juškos vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ beveik po kiekvieno diferencialinio skaičiavimo temos pateikiami uždaviniai, o J. Stoukaus vadovėlyje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ uždaviniai yra po visų išvestinių skaičiavimo temų, t.y. skyriaus gale.

A. Juškos vadovėlio skyriuje „Funkcijų ekstremai“ ir J. Stoukaus vadovėlio skyriuje „Funkcijų kitimo tyrimas“ yra temos: funkcijų didėjimas ir mažėjimas, funkcijos ekstremumai. A. Juškos vadovėlio skyriuje „Funkcijų kitimo tyrimas“ dar aiškinamos temos: antroji funkcijos išvestinė ir ekstremumai, funkcijų sudarymas ir jų tyrimas.

Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ ir „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ VIII klasėje per „begalinių mažybių analizį“ pagal programą turėjo būti mokoma: funkcijų diferencijavimo pritaikymo kreivių „lietėjoms“ (liestinėms), normalėms ir jų ilgiam reikšti, vieno argumento funkcijos ekstremumų suradimo. Aukštesniosioms mokykloms „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ VIII klasės programoje yra tema subtangentė ir subnormalė, o A. Juškos vadovėlyje ši tema nenagrinėjama.

A. Juškos vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ labai novatoriškai tiriamos funkcijos. Jis naudoja antrąją išvestinę, kad nustatytų funkcijos ekstremumus. Remiantis antrąja išvestine, galima greičiau nustatyti funkcijos ekstremumus, taikant sprendimuose aukštesnių eilių išvestines, galima greičiau išspręsti praktinio pobūdžio uždavinius (jas taiko A. Juška).

Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ ir „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ VIII klasėje per „begalinių mažybių analizį“ pagal programą turėjo būti mokoma: veiksmo, atvirkščio diferencijavimui, ir jo „išdavos“, integralo, „geometriškosios“ (geometrinės) ir „mechaniškosios“ (mechaninės) jo prasmės, „pastoviosios integravimo tiekybės“ (konstantos), pagrindinių funkcijų integravimo formulių, funkcijų integravimo kintamųjų pakeitimu ir dalimis, apibrėžtinio

integralo, gaunamo iš neapibrėžtinio, sąvokos ir jo geometrinės bei mechaninės prasmės. Aukštesniosiose mokyklose „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ VIII klasėje per „begalinių mažybių analizę“ pagal programą dar turėjo būti mokoma paprasčiausių kvadratinų „iracionalybių“ (iracionaliųjų funkcijų) integravimo.

Toliau straipsnyje nagrinėjamas A. Juškos vadovėlio „Matematinės analizės pagrindai“ skyrius „Integralinis skaičiavimas“ ir jis lyginamas su J. Stoukaus vadovėlio „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ skyriumi „Integralinė skaičiuotė“.

A. Juška skyrių „Integralinis skaičiavimas“ pradeda temos „Apibrėžtinis integralas“ nagrinėjimu, o J. Stoukus skyrių „Integralinė skaičiuotė“ pradeda temos „Neapibrėžtinio integralo sąvoka“ aiškinimu.

A. Juškos vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ netradiciškai ir originaliai išdėstoma integralinio skaičiavimo mokomoji medžiaga, todėl ją galima naudoti ir šiais laikais, mokant mokyklose ir dėstant universitetuose.

A. Juškos vadovėlyje integralo apibrėžimai lakoniški, tikslūs ir trumpi. J. Stoukaus vadovėlyje pateikiami keli griozdiški integralo apibrėžimai, tai padaro sunkiau suprantamą skyriaus „Integralinė skaičiuotė“ turinį.

Pagal 1929 m. matematikos programą aukštesniosioms mokykloms „su lotynų kalba ir komercijos mokykloms“ ir „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ VIII klasėje turėjo būti mokoma kreivinių figūrų plotų, parabolės ploto, lankų skaičiavimo. Remiantis šia matematikos programa aukštesniajai mokyklai „su sustiprintu matematikos ir gamtos dėstymu“ VIII klasėje dar turėjo būti mokoma skritulio, „elipsio“ (elipsės), hiperbolės plotų, kūnų tūrių, kurie surandami „pavieniu integravimu“, sukimosi kūnų tūrių, kurie surandami „pavieniu integravimu“, sukimosi kūnų tūrių ir paviršių, kai sukimosi ašis sutampa su koordinacių ašimis. Pagal matematikos programą aukštesniosioms mokykloms „su graikų kalba ir su sustiprintu svetimųjų kalbų dėstymu“ šių dalykų išvis neturėjo būti mokoma [6].

Kadangi 1929 m. matematikos programoje ir A. Juškos vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ integralinio skaičiavimo tematika iš esmės sutampa, tai galima daryti prielaidą, kad integravimas buvo dėstomas pagal A. Juškos vadovėlį. Be to, A. Juškos vadovėlyje integralinio skaičiavimo taikymas plačiau aiškinamas nei J. Stoukaus knygoje.

A. Juškos vadovėlio „Matematinės analizės pagrindai“ kursas užbaigiamas pateikiant integralinio skaičiavimo taikomojo pobūdžio temas: antrojo laipsnio kreivių plotai, kreivių ilgis, „suktinių“ kūnų paviršius, „suktinių“ kūnų tūris. Atitinkamai J. Stoukaus knygos „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ kursas užbaigiamas tema „Plotų skaičiavimo pavyzdžiai“.

Pavyzdžiui, A. Juška vadovėlyje „Matematinės analizės pagrindai“ temos „Antrojo laipsnio kreivių plotai“ atskirame paragrafe nenagrinėja, tik paragrafo „Paprastesnių iracionalinių funkcijų integravimas“ pabaigoje paaiškina, kad, naudojantis išnagrinėtų iracionaliųjų funkcijų integravimo rezultatais, galima surasti antrojo laipsnio kreivių plotus. A. Juška pateikia tik vieną išspręsto uždavinio pavyzdį, kuriame apskaičiuojamas skritulio plotas. Priešingai nei A. Juška, J. Stoukus atitinkamą temą „Plotų skaičiavimo pavyzdžiai“ aiškina atskirame paragrafe. Vadovėlyje „Begalinių mažybių analizio pagrindai“ temos apie iracionaliųjų funkcijų integravimą atskirame paragrafe iš viso nėra. J. Stoukus temoje „Plotų skaičiavimo pavyzdžiai“ pateikia net tris antrojo laipsnio kreivių skaičiavimo pavyzdžius, t.y. skaičiuoja elipsės, hiperbolinės nuopjovos, parabolinės nuopjovos plotus. Be to, A. Juška neparodo, kaip skaičiuoti

kitų antrojo laipsnio kreivių plotus, tik pateikia uždavinius, kuriuose reikia tai padaryti.

1936 m. įvykdžius mokyklų reformą, buvo suvienodintos gimnazijos. Jose mokyta septynerius metus: (I–III kl.) atitiko progimnaziją (mokomieji dalykai sudarė žemesnįjį koncentrą), o (IV–VII kl.) sudarė gimnaziją (mokomieji dalykai apėmė aukštesnįjį koncentrą). Nuspręsta pradžios mokykloje padaryti šešis skyrius. Bendrojo lavinimo trukmė pailgėjo iki trylikos metų [2]. 1936 m. buvo paskelbtas reformuotai septynių klasių gimnazijai matematikos programos projektas, kuriame VI klasėje buvo įvesta išvestinės sąvoka, jos pagrindinės skaičiavimo taisyklės ir taikymas, tiriant funkcijos monotoniškumą, nustatant ekstremumo taškus, o VII klasėje įvesta pirmykštė funkcija, apibrėžtinis integralas, numatoma mokyti pagrindinių integravimo dėsnų, būdų ir integralų taikymo, skaičiuojant kreivinių figūrų plotus, kreivių ilgius, sukinių tūrius ir šoninius paviršius [8].

## Išvados

1929–1940 m. tobulėjo diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų dėstymas mokykloje. Vadovėliuose pateikiamos diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų teorijos lygis pakankamai aukštas, be didelių problemų galima lyginti su šiuolaikinių vadovėlių skyriais, kuriuose nagrinėjami analizės pradmenys;

1929–1940 m. ir šiuolaikinių vadovėlių diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų išdėstymas bei pateikimas yra labai panašus. Nedidelių problemų yra tik su matematine terminija (pavyzdžiui, „pastovi tiekybės“ – konstanta, „tarpas“ – intervalas, „prieauglius“ – pokytis ir kt.);

J. Stoukaus, A. Juškos, Br. Ketarausko vadovėlių, prof. Z. Žemaičio mokslinių darbų dėka 1929–1940 m. buvo pažangiai dėstomi diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenys, didelis dėmesys buvo skiriamas taikomojo pobūdžio temoms [7, 3, 4, 9];

Matematikos mokymas Lietuvoje 1929–1940 metais buvo organizuotas, modernėjo, rėmėsi Vakarų Europos pavyzdžiu. Tai liudija: nepriklausomybės metais tobulintos, atsižvelgiant į vykdomas švietimo reformas, matematikos programos (1923, 1936); svarbūs įvykiai – Lietuvos matematikos, fizikos ir kosmografijos mokytojų konferencijos (1928, 1929), kuriose buvo priimta moderni nauja matematikos programa; kuriami ir pertvarkomi matematikos dalykų (tarp jų A. Juškos „Matematinės analizės pagrindai“ (1934), B. Ketarausko „Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pagrindai“ (1934)) mokykliniai vadovėliai.

## Literatūra

- [1] A. Ažubalis. *Matematika lietuviškoje mokykloje (XIX a. pr.–1940 m.)*. Žiburio leidykla, Vilnius, 1997.
- [2] J. Banionis. *Matematinė mintis Lietuvoje*. Vilniaus pedagoginio universiteto leidykla, Vilnius, 2006.
- [3] A. Juška. *Matematinės analizės pagrindai: Analitinės geometrijos, diferencialinio ir integralinio skaičiavimo vadovėlis aukštesniajai mokyklai*. Sakalo bendrovės leidinys, Kaunas, 1934.

- [4] Br. Ketarauskas. *Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pagrindai: vadovėlis aukštesniosioms mokykloms*. Spaudos fondas, Kaunas, 1934.
- [5] J. Kastickaitė, J. Banionis. Diferencialinio ir integralinio skaičiavimo pradmenų mokymas Lietuvos mokykloje iki matematikos mokymo reformos (1918–1928). *Liet. mat. rink.*, **50**:155–159, 2009, Matematikos ir informatikos institutas, Vilnius.
- [6] Matematikos programa aukštesniosioms mokykloms. *Švietimo darbas*, **7**:662–675, 1929, Švietimo ministerija, Kaunas.
- [7] J. Stoukus. *Begalinių mažybių analizio pagrindai. Vadovėlis aukštesniosioms mokykloms*. „Vyties“ bendrovės leidinys, Kaunas, 1925.
- [8] Vidurinės mokyklos programų projektai. *Mokykla ir gyvenimas*, **7/9**:27–28, 1936.
- [9] Z. Žemaitis. Begalinių mažybių analizio pagrindai. *Švietimo darbas*, **6**:728–730, 1926, Švietimo ministerija, Kaunas.

## SUMMARY

**Teaching of differential and integral calculation basics in Lithuanian schools after the teaching reform in mathematics (in 1929–1940)***J. Kastickaitė, J. Banionis*

The article discusses teaching of differential and integral calculation fundamentals after the reform in the teaching of mathematics (1929–1940) with reference to the textbook of Juozas Stoukus “Basics of Infinite Smallness Analysis” (1925), textbook of Antanas Juška “Basics of Mathematical Analysis” (1934), contemporary curricula of higher schools and articles of mathematicians.

*Keywords:* differential calculation, integral calculation, function, reform in teaching, applied of differential and integral calculation.