

Stygos svyravimų netiesinio modelio asimptotinis tyrimas

Olga Lavcel-Budko¹, Aleksandras Krylovas², Paulius Miškinis²

¹ *Mykolo Romerio universitetas, Ekonomikos ir finansų valdymo fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius

² *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

E. paštas: olecka@gmail.lt, akr@fm.vgtu.lt, paulius.miskinis@vgtu.lt

Santrauka. Darbe nagrinėjamas stygos svyravimų G.F. Carrierio netiesinis matematinis modelis. Modelyje nagrinėjami išilginiai ir skersiniai stygos svyravimai, apibūdinami dviejų netiesinių antrosios eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema. Kai pradinio laiko momentu $t = 0$ sistemos sprendiniai turi mažas (proporcingas mažajam parametru ε) amplitudes, uždavinys pertvarkomas į dviejų silpnai netiesinių banginių lygčių sistemą. Straipsnyje konstruojamas rezonansinės bangų sąveikos asimptotinis artinys, tolygiai tinkamas ilgajame laiko intervale $t \sim \varepsilon^{-1}$.

Raktiniai žodžiai: asimptotiniai metodai, vidurkinimas, netiesinės bangos, rezonansai.

1 Uždavinių formulavimas

Nagrinėsime dviejų antrosios eilės diferencialinių lygčių sistemą [1, 2]:

$$\begin{cases} \rho A u_{tt} - E A u_{xx} - (EA - T) \frac{(1 + u_x)v_x v_{xx} - u_{xx}v_x^2}{\sqrt{[(1 + u_x)^2 + v_x^2]^3}} = 0, \\ \rho A v_{tt} - E A v_{xx} + (EA - T) \frac{(1 + u_x)^2 v_{xx} - (1 + u_x)u_{xx}v_x}{\sqrt{[(1 + u_x)^2 + v_x^2]^3}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Čia ρ – medžiagos tankis, A – skerspjūvio plotas, T – pradinė įtampa. Skirtingai nuo klasikinio tiesinio judėjimo, nesužadintos stygos elementas apibūdinamas erdvine aksialine koordinate x ir laiko momentu t . Atsižvelgiant į galimas nemažas stygos deformacijas, sužadintos stygos elemento nuokrypiai apibūdinami išilginiu $u(x, t)$ ir skersiniu $v(x, t)$ poslinkiais. Taigi stygos judėjimas vyksta (u, v) plokštumoje.

Tarkime, kad pradinio laiko momentu $t = 0$ tenkinamos periodinės su periodu 2π sąlygos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tilde{\varepsilon} u_0(x) \equiv \tilde{\varepsilon} u_0(x + 2\pi), & u_t(x, 0) &= \tilde{\varepsilon} u_1(x) \equiv \tilde{\varepsilon} u_1(x + 2\pi), \\ v(x, 0) &= \tilde{\varepsilon} v_0(x) \equiv \tilde{\varepsilon} v_0(x + 2\pi), & v_t(x, 0) &= \tilde{\varepsilon} v_1(x) \equiv \tilde{\varepsilon} v_1(x + 2\pi), \end{aligned} \quad (2)$$

$0 < \tilde{\varepsilon} \ll 1.$

Ieškosime (1) sistemos sprendinio pavidalu $u = \tilde{\varepsilon}\tilde{u}$, $v = \tilde{\varepsilon}\tilde{v}$. Tada, skleidami (1) reiškinius mažojo parametro $\tilde{\varepsilon}$ laipsniais, gauname:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\rho A \tilde{u}_{tt} - EA \tilde{u}_{xx}) - \tilde{\varepsilon}^2(EA - T)\tilde{v}_x \tilde{v}_{xx} + O(\tilde{\varepsilon}^3) &= 0, \\ \tilde{\varepsilon}(\rho A \tilde{v}_{tt} - T \tilde{v}_{xx}) + \tilde{\varepsilon}^2(EA - T)(-\tilde{u}_{xx} \tilde{v}_x - \tilde{u}_x \tilde{v}_{xx} + O(\tilde{\varepsilon}^3)) &= 0. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad b^2 = \frac{T}{\rho A}, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon}(a^2 - b^2).$$

Tada, atmesdami $O(\tilde{\varepsilon}^3)$ eilės narius ir nerašydami ženklų (\sim), turime asimptotinio integravimo uždavinį

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \varepsilon v_x v_{xx}, \\ v_{tt} - b^2 v_{xx} = \varepsilon (v_x u_{xx} + u_x v_{xx}) \end{cases} \quad (3)$$

su pradinėmis sąlygomis, atitinkančiomis (1).

Kai (3) sistemoje $\varepsilon = 0$, turime dviejų nepriklausomų bėgančiųjų bangų porą (žr., pvz., [6]):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi, \\ v(x, t) &= \frac{v_0(x + bt) + v_0(x - bt)}{2} + \frac{1}{2b} \int_{x-bt}^{x+bt} v_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Tačiau, kai $\varepsilon > 0$, (1) funkcijos bus artimos (3) sistemos sprendiniui, bendruoju atveju, tik trumpame laiko intervale $t \ll O(\varepsilon^{-1})$.

2 Asimptotikos konstravimas

Pirmųjų dviejų šio tyrimo bendraautorijų straipsnyje [5] išnagrinėta bendresnio (3) tipo uždavinio asimptotinio integravimo schema. Trumpai pakartosime jos pagrindinius elementus. Pažymėjus

$$r_1 = u_t - au_x, \quad r_2 = u_t + au_x, \quad r_3 = v_t - bv_x, \quad r_4 = v_t + bv_x,$$

(3) sistema perrašoma Rymano invariantais:

$$\begin{cases} \frac{\partial r_j}{\partial t} \pm a \frac{\partial r_j}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{4b^2} (r_4 - r_3)(r_{4x} - r_{3x}), \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial r_j}{\partial t} \pm b \frac{\partial r_j}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{4ab} ((r_4 - r_3)(r_{2x} - r_{1x}) + (r_2 - r_1)(r_{4x} - r_{3x})), \quad j = 3, 4. \end{cases} \quad (5)$$

Jos asimptotikai $r_j(x, t; \varepsilon) = R_j(\tau, y_j) + O(\varepsilon)$ konstruoti sudaroma suvidurkinta pagal charakteristikas sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_j}{\partial \tau} = \frac{1}{4b^2} \left\langle (R_4(\tau, y_4) - R_3(\tau, y_3)) \left(\frac{\partial R_4(\tau, y_4)}{\partial y_4} - \frac{\partial R_3(\tau, y_3)}{\partial y_3} \right) \right\rangle_j, \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial R_j}{\partial \tau} = \frac{1}{4ab} \left\langle \left(R_4(\tau, y_4) \left(\frac{\partial R_2(\tau, y_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial R_1(\tau, y_1)}{\partial y_1} \right) \right) \right. \\ \left. + \left((R_2(\tau, y_2) - R_1(\tau, y_1)) \frac{\partial R_4(\tau, y_4)}{\partial y_4} \right) \right\rangle_j, \quad j = 3, 4. \end{cases} \quad (6)$$

Čia $\tau = \varepsilon t$ – lėtasis laikas, $y_1 = x - at$, $y_2 = x + at$, $y_3 = x - bt$, $y_4 = x + bt$ – greitieji charakteristiniai kintamieji, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai $\langle \dots \rangle_j$ apibrėžiami taip:

$$\begin{aligned} \langle f_1(\tau, y) \rangle_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\tau, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} y_1 = y_1, \\ y_2 = y_1 + 2at, \\ y_3 = y_1 + (a - b)t, \\ y_4 = y_1 + (a + b)t, \end{bmatrix} dt, \\ \langle f_2(\tau, y) \rangle_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\tau, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} y_1 = y_2 - at, \\ y_2 = y_2, \\ y_3 = y_2 - (a + b)t, \\ y_4 = y_2 + (b - a)t, \end{bmatrix} dt, \\ \langle f_3(\tau, y) \rangle_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(\tau, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} y_1 = y_3 + (b - a)t, \\ y_2 = y_3 + (a + b)t, \\ y_3 = y_3, \\ y_4 = y_3 + 2bt, \end{bmatrix} dt, \\ \langle f_4(\tau, y) \rangle_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_4(\tau, y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{bmatrix} y_1 = y_4 - (a + b)t, \\ y_2 = y_4 + (a - b)t, \\ y_3 = y_4 - 2bt, \\ y_4 = y_4. \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad (6) sistema tiesiogiai nepriklauso nuo mažojo parametro ε ir todėl neturi asimptotinio integravimo problemų. Tai reiškia, kad uždavinį galima efektyviai spręsti skaitiniais metodais [3]. Šio straipsnio autorių darbe [4] buvo konstruojami asimptotinio sprendinio polinominiai artiniai. Sistemai (6) tirti taikome [4] metodiką.

3 Suvidurkintos sistemos tyrimas

Priklausomai nuo pradinių sąlygų ir dydžių a ir b , suvidurkintos sistemos (6) dešinės pusės gali būti lygios nuliui nerezonansiniu atveju arba nelygios – rezonansiniu [5].

Nerezonansiniu atveju suvidurkintos sistemos sprendiniai sutampa su (1) funkcijomis. Šiuo atveju funkcijos R_j nepriklauso nuo lėtojo laiko τ ir turi tik tas pačias harmonikas $\sin nx$, $\cos nx$, kurios sudaro pradines funkcijas.

Rezonansiniu atveju atsiranda priklausomybė nuo τ ir naujos harmonikos. Pastebėkime, kad (6) sistemos sprendinys yra artimas tiksliam (5) sistemos sprendiniui ilgajame laiko intervale $t \sim \varepsilon^{-1}$ kaip rezonansiniu, taip ir nerezonansiniu atveju. Tai reiškia, kad $\forall \mu > 0, \exists \varepsilon_\mu > 0$:

$$\left(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu], t \in \left[0, \frac{t^0}{\varepsilon} \right] \right) |r_j(t, x; \varepsilon) - R_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t)| < \mu, \quad (7)$$

čia t^0 yra nepriklausanti nuo μ ir ε konstanta, $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -a$, $\lambda_3 = b$, $\lambda_4 = -b$.

Kaip ir mūsų straipsnyje [4], ieškosime tokio pavidalo funkcijų $R_j(\tau, y_j)$ artinių:

$$\begin{aligned} R_j \approx T_j^{MN}(\tau, y_j) &= \sum_{k=1}^M (R_{jc0}^k + R_{jc1}^k \tau + \dots + R_{jcN}^k \tau^N) \cos ky_j \\ &+ (R_{js0}^k + R_{js1}^k \tau + \dots + R_{jsN}^k \tau^N) \sin ky_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Koeficientus $R_{j(c,s)}^k$ surandame neapibrėžtųjų koeficientų metodu. Analogiškus rezultatus gauname nuosekliomis iteracijomis. Parenkant tinkamas parametrų M, N reikšmes, užtikrinamas galiojantis, kai $t \in [0, \frac{t^0}{\varepsilon}]$, reikalingas aproksimacijos tikslumas.

4 Pavyzdys

Paimsime sistemos atskirą atvejį, kai $a = 1$ ir $b = 2$,

$$R_1(0, y) = R_2(0, y) = 0,$$

$$R_3(0, y) = R_4(0, y) = \sin y - 4 \cos y + 7 \sin 3y + 2 \cos 3y.$$

Gavome tokį sprendinio artinį:

$$T_1 = T_2 = \left(\frac{13}{4}\tau + \frac{13}{1536}\tau^3 - \frac{26351}{491520}\tau^5 \right) \cos 4y$$

$$+ \left(-\frac{15}{8}\tau - \frac{5}{1024}\tau^3 + \frac{2027}{65536}\tau^5 \right) \sin 4y, \tag{9}$$

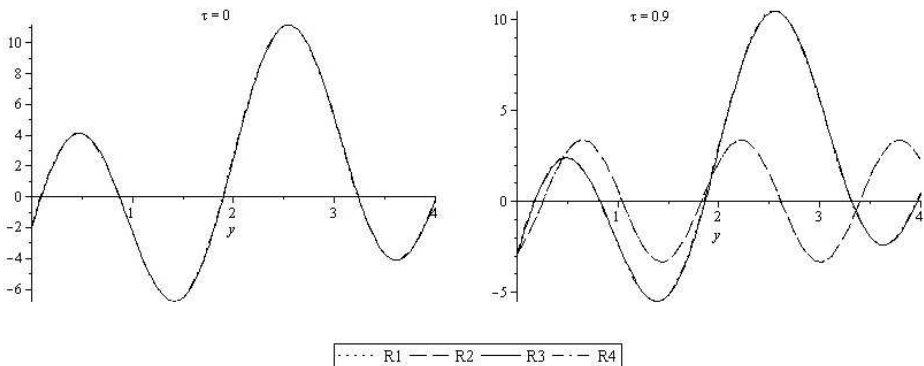
$$T_3 = T_4 = \left(-4 - \frac{53}{64}\tau^2 + \frac{8003}{98304}\tau^4 \right) \cos y + \left(1 + \frac{53}{256}\tau^2 - \frac{8003}{393216}\tau^4 \right) \sin y$$

$$+ \left(2 - \frac{51}{128}\tau^2 - \frac{2737}{65536}\tau^4 \right) \cos 3y + \left(7 - \frac{357}{256}\tau^2 - \frac{19159}{131072}\tau^4 \right) \sin 3y. \tag{10}$$

Pastebėkime, kad esant šioms pradinėms sąlygoms nerezonansiniu atveju (t. y., kai $\frac{a}{b} \neq \frac{1}{2}$) turėsime: $T_1 \equiv T_2 \equiv 0$, o

$$T_3 = T_4 = \sin y - 4 \cos y + 7 \sin 3y + 2 \cos 3y$$

ir visos funkcijos nepriklauso nuo τ . Formulės (9) rodo, kad atsiranda aproksimuojančios funkcijas T_1, T_2 harmonikos $\sin 4y, \cos 4y$ ir visų bangų amplitudės priklauso nuo lėtojo laiko τ .



1 pav. Funkcijų R_1, R_2, R_3, R_4 grafikai rezonansiniu atveju, su skirtingomis τ reikšmėmis.

Pastebėsime, kad dėl bangų rezonansinės sąveikos laikui bėgant atsiranda bangos R_1 , R_2 , nors laiko momentu $\tau = 0$, R_1 ir R_2 buvo nulinės funkcijos.

Pateikti 1 pav. funkcijų grafikai rodo, kad, kai $\tau = O(1)$, atsiranda bangų rezonansinė sąveika.

Dėl apribojimų straipsnio apimčiai nenagrinėjome modelio parametų fizikinės prasmės ir jų įtakos bangų profiliams, kuriuos nesunku gauti iš sukonstruotų Rymano invariantų aproksimacijų [4]. Tai yra mūsų tolesnių tyrimų objektas.

Literatūra

- [1] G.F. Carrier. On the nonlinear vibration problem of the elastic string. *Q. J. Appl. Math.*, **3**:157–165, 1945.
- [2] L.Q. Chen and H. Ding. Two nonlinear models of a transversely vibrating string. *Arch. Appl. Mech.*, **78**:321–328, 2008.
- [3] A. Krylovas and R. Čiegis. Approximation of hyperbolic weakly nonlinear system. *JNMP*, **8**(4):458–470, 2001.
- [4] A. Krylovas, O. Lavcel-Budko and P. Miškinis. Asymptotic solution of the mathematical model of nonlinear oscillations of absolutely elastic inextensible weightless string. *Nonlinear Anal., Model. Control*, **15**(3):307–323, 2010.
- [5] O. Lavcel-Budko ir A. Krylovas. Dviejų silpnai netiesinių stygų svyravimų sąveikos asimptotinis tyrimas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:24–28, 2015.
- [6] V. Paulauskas. *Matematinės fizikos lygtys*. Mintis, Vilnius, 1974. 456 pp.
- [7] A.S. Vasudeva Murthy 2013. On the string equation of Narasimha. In B. Rajendra et al. (Eds.), *Connected at Infinity II. A Selection of Mathematics by Indians. Text. Read. Math.*, volume 67, pp. 58–84. Hindustan Book Agency, New Delhi.

SUMMARY

Asymptotic investigation of a nonlinear model of string vibrations

O. Lavcel-Budko, A. Krylovas, P. Miškinis

The mathematical model of nonlinear oscillations of a weightless string is analysed. The uniformly valid asymptotic approximation in the long time interval, which is inversely proportional to the small parameter, is constructed. This asymptotic approximation is a solution of averaged along characteristics integro-differential system. A method for constructing special approximations of its solutions is proposed.

Keywords: resonance, asymptotic methods, nonlinear waves, averaging.