Lietuvos matematikos rinkinys ISSN 0132-2818
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B www.mii.lt/LMR/
54 t., 2013, 151–154

Trikampio kampų sinusų ir kosinusų racionaliosios reikšmės

Edmundas Mazėtis, Grigorijus Melničenko

Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius, Lietuva
E. paštas: edmundas.mazetis@leu.lt, gmelnicenko@gmail.com

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjami trikampiai, kurių du kampų sinusai, kosinusai yra racionalieji skaičiai. Irodyta, kad tokie trikampiai yra panašūs į Herono trikampius ir atvirkščiai.

Raktiniai žodžiai: pitagoriškieji trikampiai, Herono trikampiai, pitagoriškieji kampai, sinusai, kosinusai.

1 Įvadas

Nagrinėsime trikampių kampų bei kraštinių savybes, kai trikampio kampų trigonometrinės funkcijos sin ir cos yra racionaliosios. Manome, kad tokių temų nagrinėjimai gali būti naudingi matematika besidomintiems ir olimpiadoms besirengiantiems moksleiviams.

Kampai, kurių sinusai ir kosinusai yra racionalieji skaičiai, vadinami pitagoriškaisiais kampais. Jie yra svarbūs diskrečiojoje geometrijoje, nagrinėjant figūrų posūkius ir atvaizdžius, nes posūkiai yra vieni iš svarbiausių judesių skaitmeninių vaizdų transformavimuose [1, 4].

2 Svarbiausios sąvokos ir teoremos

1 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra sveikieji (racionalieji) skaičiai, vadinamas sveikuoju (racionaliuoju) pitagoriškuoju trikampiu.

2 apibrėžimas. Trikampis, kurio kraštinių ilgiai ir plotas yra sveikieji (racionalieji) skaičiai, vadinamas sveikuoju (racionaliuoju) Herono trikampiu.

1 lema. *Jei stačiojo trikampio statinių ilgiai – sveikieji skaičiai, o įžambinės – racionalusis skaičius, tai įžambinės ilgis yra sveikasis skaičius.*

Įrodymas. Sakykime, kad stačiojo trikampio statinių ilgiai s ir t – sveikieji skaičiai, o įžambinės ilgis r yra racionalusis, bet ne sveikasis skaičius. Tada $r = m/n$, čia m ir n – tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai. Iš lygybės $r^2 = s^2 + t^2$ išplaukia, kad $m^2 = n^2(s^2 + t^2)$. Kadangi m ir n – tarpusavyje pirminiai skaičiai, tai skaičius m^2 nedalija skaičiaus n^2. Tuomet skaičius m^2 turi dalinti skaičių $s^2 + t^2$. Tarkime, kad dalmuo lygus k. Tada $1 = n^2k$, o iš čia išplaukia, kad $n = 1$ – prieštara.

Kita lema yra gerai žinomas faktas. Kadangi šia lema naudosimės darbe, pateikiame trumpą jos įrodymą.

2 lema. *Bet kuriam racionaliajam Herono trikampiui egzistuoja jam panašus sveikasis Herono trikampis.*

Įrodymas. Sakykime, kad racionalieji skaičiai a, b, c, S yra trikampio kraštinių ilgiai ir jo ploto reikšmė. Pagal Herono formulės nesimetrinį variantą [3, p. 87] yra teisinga lygybė

$$16S^2 = (2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2.$$

Iš čia išplaukia, kad padauginus trikampio kraštinių ilgius iš jų ilgių vardiklių bendrojo mažiausiojo kartotinio, gauname trikampį, panašųjį į duotąjį, kurio visų kraštinių ilgiai ir plotas – sveikieji skaičiai.

3 Pitagoriškėji kampai

3 apibrėžimas. Trikampio kampas α vadinamas pitagoriškuoju, jei kampas α arba kampas $\pi - \alpha$ yra kurio nors sveikojo pitagoriškojo trikampio kampas [2].

1 teorema. *Smailiojo kampo sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai, tada ir tik tada, kai kampas – pitagoriškasis.*

Įrodymas. Sakykime, kad smailiojo kampo α sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai. Tada statusis trikampis su statiniais $a = \sin\alpha$ ir $b = \cos\alpha$ yra racionalusis pitagoriškasis trikampis. Pagal 2 lemą egzistuoja jam panašus sveikasis pitagoriškasis trikampis, t. y. kampas yra pitagoriškasis. Atvirkščio teiginio įrodymas akivaizdus.

2 teorema. *Jei kampas α bukasis, tai ekvivalentūs šie teiginiai*:

a) *kampo α sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai*;
b) *kampas α – pitagoriškasis*;
c) *kampas α lygus stačiojo kampo ir smailiojo pitagoriškojo kampo sumai.*

Įrodymas. a) $\Rightarrow$ b) Sakykime, kad bukojo kampo α sinusas ir kosinusas – racionalieji skaičiai. Iš redukcijos formulių gauname, kad smailiojo kampo $\pi - \alpha$ sinusas ir kosinusas – racionalieji skaičiai. Iš 1 teoremos tuomet išplaukia, kad smailusis kampas α yra pitagoriškasis. Atvirkščiai, jei bukasis kampas α yra pitagoriškasis, tai smailusis kampas $\gamma = \pi - \alpha$ yra kurio nors sveikojo pitagoriškojo trikampio kampas. Tuomet iš 1 teoremos išplaukia, kad kampo γ sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai. Bet $\alpha = \pi - \gamma$, todėl iš redukcijos formulių gauname, kad kampo α sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai.

b) $\Rightarrow$ c) Sakykime, kad bukasis kampas α yra pitagoriškasis. Tada smailusis kampas $\eta = \pi - \alpha$ pitagoriškasis, o smailusis kampas $\nu = \pi/2 - \eta$ – irgi pitagoriškasis. Taigi $\alpha = \pi - \eta = \pi/2 + \pi/2 - \eta = \pi/2 + \nu$.

c) $\Rightarrow$ a) Sakykime, kad $\alpha = \pi/2 + \nu$, čia ν – smailusis pitagoriškasis kampas. Tuomet iš redukcijos formulių gauname, kad kampo $\alpha = \pi/2 + \nu$ sinusas ir kosinusas – racionalieji skaičiai.

4 Trikampio kampų racionaliosios sinusų ir kosinusų reikšmės

3 lema. *Jei trikampio dviejų kampų sinusai ir kosinusai – racionalieji skaičiai, tai ir trečiojo kampo sinusas ir kosinusas – racionalieji.*

Įrodymas. Sakykime, kad α, β, γ – trikampio kampų didumai, o kampų α ir β sinusai ir kosinusai – racionalieji skaičiai. Kadangi $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, tai iš sumos sinusų bei kosinusų tapatybių gauname, kad kampo γ sinusas bei kosinusas irgi racionalieji.

4 lema. *Jei trikampis yra sveikasis pitagoriškasis, tai visų jo kampų sinusai ir kosinusai yra racionalieji skaičiai.*

Atvirkščiai, jei stačiojo trikampio kurio nors smailiojo kampo sinusai ir kosinusai yra racionalieji skaičiai, tai tas trikampis yra panašus sveikajam pitagoriškajam trikampiui.

Įrodymas. Pirmosios dalies įrodymas akivaizdus. Antrosios dalies įrodymui pastebėkime, kad jei stačiojo trikampio ABC kurio nors smailiojo kampo, pvz. kampo $\alpha = \angle BAC$, sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai, tai ir jo tangentas – racionalusis skaičius. Tarkime, kad

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad a', b' \in \mathbb{Z}.$$

Nubraižykime statųjį trikampį $\triangle A'B'C'$ žinant du statinius $C'B' = a'$, $C'A' = b'$ ir smailųjį kampą $\alpha = \angle B'A'C'$. Akivaizdu, kad $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Trikampio $A'B'C'$ statinių $C'B'$ ir $C'A'$ ilgiai yra sveikieji skaičiai, o įžambinės ilgis $A'B' = a'/\sin\alpha$ – racionalusis skaičius. Pagal 1 lemą, įžambinės ilgis yra sveikasis skaičius, taigi $\triangle A'B'C'$ – sveikasis pitagoriškasis trikampis.

3 teorema. *Jei trikampis yra sveikasis Herono, tai jo visų kampų sinusai ir kosinusai racionalieji skaičiai.*

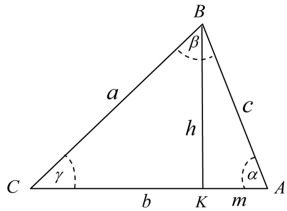
Atvirkščiai, jei trikampio kurių nors dviejų kampų sinusai ir kosinusai yra racionalieji skaičiai, tai tas trikampis yra panašus sveikajam Herono trikampiui.

Įrodymas. Įrodysime lemos pirmąją dalį. Sakykime, kad sveikieji skaičiai a, b, c – trikampio kraštinių ilgiai, sveikasis skaičius S – jo plotas (1 pav.). Trikampio bet kuriam kampui, pavyzdžiui α, yra teisingos lygybės

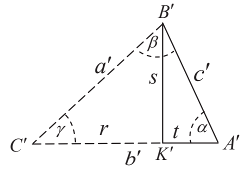
$$\sin\alpha = \frac{S}{2ab}, \qquad \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\pm 2ab}.$$

Taigi $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$ – racionalieji skaičiai.

Įrodysime lemos antrąją dalį. Sakykime, kad trikampio $\triangle ABC$ (1 pav.) kampų $\alpha = \angle BAC$ ir $\beta = \angle ABC$ sinusai ir kosinusai – racionalieji skaičiai. Iš 4 lemos išplaukia, kad ir kampo $\gamma = \angle ACB$ sinusas ir kosinusas yra racionalieji skaičiai. Jei trikampyje yra bukasis kampas, tarkime $\beta = \angle ABC$, nubrėžiame aukštinę BK iš viršūnės B į kraštinę AC. Trikampis $\triangle AKB$ – statusis, o jo kampo $\alpha = \angle BAK$ sinusai ir kosinusai yra racionalieji. Iš 4 lemos išplaukia, kad egzistuoja statusis trikampis $\triangle A'K'B'$ (2 pav.), kurio kraštinių ilgiai – sveikieji skaičiai ir $\triangle A'K'B' \sim \triangle AKB$. Nubrėžkime kraštinę $B'C'$ iki susikirtimo su kraštine $A'K'$ taške C' taip, kad



1 pav. $\triangle ABC$.



2 pav. $\triangle A'B'C'$.

ji sudarytų su kraštine $A'B'$ kampą β (2 pav.). Akivaizdu, kad $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Kadangi trikampis $\triangle C'K'B'$ – statusis, tai

$$C'B' = a' = \frac{s}{\sin\gamma}, \qquad A'C' = b' = r + t = s\operatorname{ctg}\gamma + t = s\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + t.$$

Iš čia išplaukia, kad kraštinių $C'B'$ ir $A'C'$ ilgiai yra racionalieji skaičiai. Akivaizdu, kad trikampių $\triangle A'K'B'$ ir $\triangle C'K'B'$ plotai yra racionalieji. Tuomet trikampio $\triangle A'B'C'$ plotas irgi racionalusis skaičius. Taigi $\triangle A'B'C'$ – racionalusis Herono trikampis, kuris pagal 2 lemą panašus sveikajam Herono trikampiui.

Iš šios lemos tuoj pat gauname, kad joks lygiakraštis trikampis nėra Herono (nei racionalusis, nei sveikasis). Tikrai, lygiakraščiame trikampyje $\sin\alpha = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, t. y. $\sin\alpha$ – nėra racionalusis skaičius.

4 teorema. *Ekvivalentūs šie teiginiai*:

a) *trikampis panašus kuriam nors sveikajam Herono trikampiui*;
b) *nors dviejų trikampio kampų sinusai ir kosinusai yra racionalieji*;
c) *nors du trikampio kampai yra pitagoriškieji.*

Įrodymas. Teiginys a) $\Leftrightarrow$ b) įrodytas (žr. 3 teoremą). Teiginys c) $\Leftrightarrow$ a) išplaukia iš 1, 2 ir 3 teoremų.

Literatūra

[1] W.S. Anglin. Using pythagorean triangles to approximate angles. *Am. Math. Mon.*, **95**(6):540–541, 1988.

[2] E.J. Eckert and P.D. Vestergaard. Groups of integral triangles. *Fibonacci Q.*, **27**(5):458–464, 1989.

[3] I.M. Gelfand, S.M. Lvovskii and A.L. Toom. *Trigonometrija*. MCNMO, Moscow, 2003.

[4] Y. Thibault, Y. Kenmochi and A. Sugimoto. Computing upper and lower bounds of rotation angles from digital images. *Pattern Recognition*, **48**(2):1708–1717, 2008.

SUMMARY

A rational sine and cosine of the angles of a triangle
E. Mazėtis, G. Melnichenko

The article deals with triangles whose sines and cosines of the angles are the rational numbers. We prove that these triangles are similar to Pythagorean or Heronian triangles, and vice versa.

Keywords: Pythagorean triangles, Heronian triangles, Pythagorean angles, sines, cosines.