LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
54 t., 2013, 140–145

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Madhavos formulės

Juozas Juvencijus Mačys

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt

Santrauka. Nagrinėjama Madhavos–Gregorio–Leibnico eilutė skaičiui π ir Madhavos liekamojo nario formulės. Apžvelgiamos rafinuotos hipotezės, mėginančios paaiškinti, kaip Madhava sugebėjo rasti optimalias eilutės pataisas. Vietoj tų neįtikimų spėjimų pasiūlyta visiškai paprasta hipotezė, kuri remiasi elementariu būdu pataisoms gauti, grindžiamu paties Madhavos metodu.

Raktiniai žodžiai: skaičius π, Madhavos–Gregorio–Leibnico eilutė, liekamasis narys, pataisa, grandininė trupmena.

1671 m. škotų matematikas Gregoris (James Gregory, 1638–1675) ir nepriklausomai nuo jo 1673 m. vokiečių matematikas Leibnicas (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) nurodė pirmąją eilutę, kuria naudojantis galima apskaičiuoti skaičiaus π reikšmę. Ir kokia buvo sensacija, kai po kurio laiko paaiškėjo, kad šitą (ir daug kitų eilučių) jau prieš 250 (!) metų buvo užrašęs indų matematikas ir astronomas Madhava (Mādhava, 1350–1425). Štai ta eilutė:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Ja naudojantis įmanoma apskaičiuoti π reikšmę norimu tikslumu:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots. \tag{1}$$

Tiesa, imdami čia 1, 2, 3, 4 dėmenis ir t. t., gauname $p_1 = 4$, $p_2 = 2{,}66\ldots$, $p_3 = 3{,}46\ldots$, $p_4 = 2{,}89\ldots$, $p_5 = 3{,}33\ldots$, taigi tik paėmę 8 narius matome, kad $3{,}01\ldots < \pi < 3{,}28\ldots$, o norėdami gauti po kablelio bent vieną teisingą ženklą, turime imti net 50 dėmenų (žr. [1]). Puikiai tai suvokdamas, Madhava įvedė vadinamąsias pataisas ir užrašė (1) formulę taip:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1} + (-1)^n \cdot 4F(n). \tag{2}$$

Jis pasiūlė tris apytiksles $F(n)$ išraiškas:

$$F_1(n) = \frac{1}{4n}, \qquad F_2(n) = \frac{n}{4n^2+1}, \qquad F_3(n) = \frac{n^2+1}{4n^3+5n}. \tag{3}$$

Jos labai tikslios – pavyzdžiui, iš (1) formulės turime $p_{19} = 3{,}194\ldots$, $p_{20} = 3{,}091\ldots$, o (2) formulėje imdami $F(n) = F_3(n)$, gauname $\tilde{p}_{19} = 3{,}1415926529\ldots$, $\tilde{p}_{20} =$

3,1415926540..., t. y. 8 tikslius skaitmenis po kablelio. Bet labiausiai visus stebino, kad šios išraiškos yra optimalios, kai vardiklis yra atitinkamo laipsnio daugianaris.

Matematikai ir matematikos istorikai daug triūsė bandydami atspėti, kaip Madhavai pavyko tai padaryti. Buvo prieita išvados, kad jis žinojo kurią nors labai tikslią π aproksimaciją, o tada jau galėjo apskaičiuoti $F(n)$ reikšmes su mažais n, išreikšti jas grandininėmis trupmenomis ir atspėti $F(n)$ išraišką.

Iš tikrųjų, indų matematikai jau nuo IX amžiaus žinojo reikšmę $\pi \approx 355/113$. Su šia reikšme iš (2) formulės turime

$$\begin{aligned}
F(1) &= \left|\frac{\pi}{4} - 1\right| = \left|\frac{355}{452} - 1\right| = \frac{97}{452} = \frac{1}{452/97} = \frac{1}{4 + 64/97} = \frac{1}{4+}\Big/\frac{1}{1+}\Big/\frac{33}{54} \\
&= \frac{1}{4+}\Big/\frac{1}{1+}\Big/\frac{1}{1+}\Big/\frac{21}{33},
\end{aligned}$$

$$F(2) = \left|\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3}\right| = \frac{355}{452} - \frac{2}{3} = \frac{161}{1356} = \frac{1}{8+}\Big/\frac{1}{2+}\Big/\frac{1}{2+}\Big/\frac{18}{25},$$

$$F(3) = \frac{551}{6780} = \frac{1}{12+}\Big/\frac{1}{3+}\Big/\frac{1}{3+}\Big/\frac{27}{47},$$

$$F(4) = \frac{2923}{47460} = \frac{1}{16+}\Big/\frac{1}{4+}\Big/\frac{1}{4+}\Big/\frac{72}{155},$$

$$F(5) = \frac{21153}{427140} = \frac{1}{20+}\Big/\frac{1}{5+}\Big/\frac{1}{5+}\Big/\frac{315}{753},$$

$$F(6) = \frac{194457}{4698540} = \frac{1}{24+}\Big/\frac{1}{6+}\Big/\frac{1}{6+}\Big/\frac{1422}{5023},$$

$$F(7) = \frac{2170599}{61081020} = \frac{1}{28+}\Big/\frac{1}{7+}\Big/\frac{1}{7+}\Big/\frac{18707}{40863}.$$

Iš šių lygybių galima spėti, kad $F(n) = \frac{1}{4n+}\big/\frac{1}{n+}\big/\frac{1}{n+t_n}$. Atmetę $\frac{1}{n+}\big/\frac{1}{n+t_n}$, gauname $F_1(n) = \frac{1}{4n}$. Atmetę $\frac{1}{(n+t_n)}$, gauname $F_2(n) = \frac{1}{4n+}\big/\frac{1}{n} = \frac{n}{4n^2+1}$. Pagaliau, atmetę t_n, gauname $F_3(n) = \frac{1}{4n+}\big/\frac{1}{n+}\big/\frac{1}{n} = \frac{n^2+1}{4n^3+n}$.

Ši ir panašios hipotezės (žr. [1], [4]) sunkiai įtikimos dėl kelių priežasčių. Pirma, Madhavos mokiniai būtų žinoję tokį metodą ir jį aprašę. Nemini jie ir reikiamų π artinių. Štai Madhavos mokyklos atstovas Sankara, kurio darbuose Madhava cituojamas gana nuosekliai (paties Madhavos išliko tik keli darbai iš astronomijos), visiškai kitaip aiškina pataisų $F_1(n)$, $F_2(n)$ ir $F_3(n)$ atsiradimą. Pateiksime jo (anot Sankaros – paties Madhavos) samprotavimų esmę (žinoma, perrašę kai ką šiuolaikiškiau; remsimės straipsniu [2], kuriame klausimo istorija išdėstyta ypač nuodugniai).

Lygybę (2) perrašome taip:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 1/(2n-1) + (-1)^n F(n). \tag{4}$$

Joje n pakeičiame į $n+1$:

$$\pi/4 = 1-1/3+1/5-1/7+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1/(2n-1)+(-1)^n\cdot 1/(2n+1)+(-1)^{n+1}F(n+1).$$

Atėmę jas vieną iš kitos, gauname

$$(-1)^n \cdot 1/(2n+1) + (-1)^{n+1}F(n+1) - (-1)^n F(n) = 0,$$

t. y.

$$F(n) + F(n+1) = 1/(2n+1). \tag{5}$$

Taigi reikia rasti $F(n)$, tenkinančią šią lygybę. Kadangi tiksliai rasti $F(n)$ nepavyksta, ieškome kuo geresnės pavidalo $F(n) = A/n$ funkcijos. Kadangi $A/n + A/(n+1) \sim 1/(2n+1)$, tai eilės $1/n$ tikslumu $A/n + A/n = 1/2n$, $A = 1/4$. Vadinasi, ieškomoji funkcija $1/n$ tikslumu yra $F_1(n) = 1/4n$.

Rastų (4) lygties sprendinių tikslumą matuojame paklaida

$$\big|F(n) + F(n+1) - 1/(2n+1)\big|. \tag{6}$$

Pataisos $F_1(n) = 1/4n$ paklaida yra

$$1/4n + 1/(4n+4) - 1/(2n+1) = 1/4n(n+1)(2n+1). \tag{7}$$

t. y. eilės $1/n^3$.

Kadangi $F_1(n)$ šiek tiek per didelė, bandome ją pataisyti ir imame $F(n) = 1/(4n+B)$, kur $B \geqslant 0$. Bet kad ir kokia būtų konstanta $B > 0$, pataisos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4n+B} + \frac{1}{4n+4+B} - \frac{1}{2n+1}\\
&\quad = \frac{1}{4n+B} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+4+B} - \frac{1}{4n+4} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{2n+1}\\
&\quad = -\frac{B}{4n(4n+B)} - \frac{B}{(4n+4)(4n+4+B)} + \frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

eilė dideliems n yra $1/n^2$, taigi $F_1(n) = 1/4n$ yra geriausia pavidalo $1/(4n+B)$ pataisa ir duoda eilės $1/n^3$ paklaidą.

Kadangi vardiklyje imti konstantą vietoj B neverta, tai ieškome geriausios pavidalo $F(n) = \frac{1}{4n+}\frac{/C}{n} = \frac{n}{4n^2+C}$, kai $C > 0$ pataisos.

Štai čia Madhava ėmė $C = 1$ ir įsitikino, kad pataisa $F_2(n) = \frac{n}{4n^2+1}$ labai gera. Panašiai jis ieškojo pavidalo $F(n) = \frac{1}{4n+}\frac{/1}{n+}\frac{/D}{n} = \frac{n^2+D}{n(4n^2+4D+1)}$ dar geresnės pataisos ir vėl įsitikino, kad geriausia imti $D = 1$, tada gauname pataisą $F_3(n) = \frac{n^2+1}{4n^3+5n}$.

Taigi mūsų hipotezę galima suformuluoti taip:

Madhava suvokė, kad pataisas galima vis gerinti grandininių trupmenų metodu, ėmė $C = 1$, $D = 1$ ir įsitikino, kad geresnių konstantų atitinkamose grandininėse trupmenose nėra.

Aptarsime, kaip Madhava galėjo įsitikinti pataisų $F_1(n)$, $F_2(n)$ ir $F_3(n)$ optimalumu. Kaip jau matėme, jis patikrino, kad pataisos $F(n) = 1/(4n+B)$, kai $B > 0$, duoda eilės $1/n^2$ paklaidą, o $B = 0$ atitinka pataisą $F_1(n)$, kurios paklaidos eilė yra $1/n^3$. Jis taip pat žinojo, kad $F_2(n)$ paklaidos eilė yra $1/n^5$,

$$\frac{n}{4n^2+1} + \frac{n+1}{4(n+1)^2+1} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{4}{(4n^2+1)(4n^2+8n+5)(2n+1)}, \tag{8}$$

o paklaidos $F(n) = \frac{1}{4n+}\frac{/C}{n}$, kai $C \neq 1$, eilė yra tik $1/n^3$.

Tikriausiai Madhava sugebėjo apskaičiuoti, kad $F_3(n)$ paklaidos eilė yra $1/n^7$,

$$\begin{aligned}\frac{n^2+1}{4n^3+5n}&+\frac{(n+1)^2+1}{4(n+1)^3+5(n+1)}-\frac{1}{2n+1}\\&=\frac{9}{n(4n^2+9)(n+1)(4n^2+8n+9)(2n+1)},\end{aligned}\tag{9}$$

ir įsitikino, kad $F(n)=\frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{D}{n}$, kai $D\neq 1$, duoda tik $1/n^5$ eilės paklaidą.

Madhava (ir jo mokiniai) nė nebandė įrodinėti, kad nurodytos pataisos pačios geriausios – jiems visiškai užteko įsitikinti, kad jos tiesiog labai geros. Beje, teiginio, kad tik reikšmės $B=1$ ir $D=1$ duoda atitinkamos eilės paklaidas, įrodymas visiškai analogiškas įrodymui, kad $A=0$, – tiesiog skaičiavimai gremėzdiškesni. Be to, nepamirškime, kad visus skaičiavimus Madhava atlikdavo be algebrinės simbolikos, o tiesiog žodžiais (!). Net bet kuri formulė buvo nusakoma žodžiais, o dažniausiai, kad lengviau būtų įsiminti, – posmais (literatūrologai pasakytų – stansais).

Ir dar: įsitikinti formulių tikslumu Madhava puikiausiai galėjo „praktiškai“: juk visos jos skirtos apskaičiuoti π reikšmei (Madhava neabejotinai žinojo kelias dešimtis skaičiaus π dešimtainių ženklų). Todėl paėmus nedidelį n, sakykime, $n=10$, galima apskaičiuoti π reikšmę naudojantis kiekviena iš tiriamųjų pataisų. Gaunamos paklaidos iš karto parodo formulės kokybę.

Skaitytojui gali kilti toks klausimas: kodėl Madhava parašė tik tris pataisų formules? Kitaip sakant, kodėl, sakykime, jis nenurodė ketvirtosios pataisos $F_4(n)$? Atsakymas čia paprastas – atspėti ją jau per sunku. Atspėti $C=1$ ar $D=1$ paprasta: o nuo ko gi pradėti spėlioti, jei ne nuo vieneto? Bet vargu ar galima atspėti, kad norint gauti $F_4(n)$, išraiškoje

$$F(n)=\frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{K}{n}\tag{10}$$

reikia imti $K=\frac{12}{5}$, – tik tada gausime eilės $1/n^9$ paklaidą. Net jeigu Madhava įsitikino, kad formulės su $K=2$ ir $K=3$ neblogos, jis matė, kad paklaida yra eilės $1/n^7$. Tai dar kartą rodo Madhavos – matematiko – mastą: jis skelbė ne šiaip geras, o tik tikslias formules. Beje, „ketvirtoji Madhavos formulė“ atrodytų taip:

$$\begin{aligned}F_4(n)&=\frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{12}{5n}\Big/=\frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{5n}{5n^2+12}=\frac{1}{4n+}\Big/\frac{5n^2+12}{5n^3+17n}\\&=\frac{5n^3+17n}{20n^4+73n^2+12}.\end{aligned}$$

Dabar pasižiūrėkime, kaip visos Madhavos formulės įrodomos griežtai (tiksliau, kaip įrodomas konstantų A, B, C, D, taip pat ir K optimalumas).

Pradėkime nuo pirmos pataisos $F_1(n)$. Ją gauname, optimaliai pasirinkę pavidalo $F_1(n)=A/n$ pataisą. Tada

$$\frac{A}{n}+\frac{A}{n+1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{n^2(4A-1)+n(4A-1)+A}{n(n+1)(2n+1)},$$

ir kai $A\neq 1/4$, tai dideliems n paklaida bus eilės $1/n$, o kai $A=1/4$ – tai eilės $1/n^3$. Taigi mažiausią paklaidą duoda $A=1/4$, ir tada gauname $F_1(n)=1/4n$, kurios paklaida yra

$$F_1(n) + F_1(n+1) - 1/(2n+1) = 1/4n(n+1)(2n+1). \tag{11}$$

Pataisa F_1 šiek tiek per didelė (duoda teigiamą eilės $1/n^3$ paklaidą), todėl galima būtų bandyti mažesnę pataisą $F(n) = 1/(4n+B)$, kur konstanta $B > 0$. Bet to nė nereikia – pataisa $F_2(n) = 1/(4n+1/n)$ juk dar mažesnė, o duoda eilės $1/n^5$ paklaidą.

Įrodysime, kad pataisų $F(n) = 1/(4n + \frac{C}{n}) = \frac{n}{4n^2+C}$ klasėje pataisa $F_2(n)$ yra optimali. Mums reikia įsitikinti, kad paklaida $\frac{n}{4n^2+C} + \frac{n+1}{4(n+1)^2+C} - \frac{1}{2n+1}$ yra eilės $1/n^5$ tik kai $C = 1$. Tai nesunku padaryti analogiškai kaip įrodant konstantos A optimalumą, bet skaičiavimai labai supaprastėja, kai paklaidą pertvarkome remdamiesi (7) formule:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n}{4n^2+C} - \frac{1}{4n}\right) + \left(\frac{n+1}{4(n+1)^2+C} - \frac{1}{4n+4}\right) - \frac{1}{2n+1}\\ &\quad = -\frac{C}{4n(4n^2+C)} - \frac{C}{(4n+4)(4n^2+8n+4+C)} + \frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}.\end{aligned}$$

Matome, kad jeigu $C \neq 1$, tai paklaidos eilė bus $1/n^3$, o kai $C = 1$, tai eilę $1/n^5$ jau žinome (žr. (6)).

Kadangi $F_2(n)$ per maža, tai ją padidiname, bet ir vėl neverta nagrinėti pataisų $F(n) = \frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+D}$, o iš karto tirti $F(n) = \frac{1}{4n+}\Big/\frac{1}{n+}\Big/\frac{D}{n} = \frac{n^2+D}{n(4n^2+4D+1)}$.

Dabar paklaidą vertiname, remdamiesi (6) formule:

$$\begin{aligned}&F(n) + F(n+1) - 1/(2n+1)\\ &\quad = \frac{n^2+D}{n(4n^2+4D+1)} - \frac{n}{4n^2+1} + \frac{(n+1)^2+D}{(n+1)[4(n+1)^2+4D+1]}\\ &\qquad - \frac{n+1}{4(n+1)^2+1} - \frac{4}{(4n^2+1)(4n^2+8n+5)(2n+1)}.\end{aligned}$$

Pirmas ir antras dėmenys duoda reiškinį $D/n(4n^2+4D+1)(4n^2+1)$, t. y. $\sim D/16n^5$. Trečias ir ketvirtas dėmenys duoda tiek pat (tai tie patys ankstesni dėmenys, tik n pakeistas į $n+1$), taigi kartu turime $\sim D/5n^5$. Kadangi iš jo atimama $\sim 1/8n^5$, tai paklaida, kai $D \neq 1$, bus eilės $1/n^5$. Kai $D = 1$, $F(n)$ virsta $F_3(n)$, ir jau matėme (žr. (7) formulę), kad tada paklaidos eilė tampa $1/n^7$.

Visiškai taip pat, remdamiesi (8) formule, įrodome, kad tik su $K = 12/5$ išraiškoje (10) paklaidos eilė yra $1/n^9$.

Ir pabaigai. Šiuolaikinė matematika žino (žr. (3)) tikslų (4) lygties sprendinį – jis išreiškiamas begaline grandinine trupmena:

$$F(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+}\Big/\frac{1^2}{2n+}\Big/\frac{2^2}{2n+}\Big/\frac{3^2}{2n+\dots}.$$

Imdami čia tik pirmąsias grandis, gauname $F_1(n)$, $F_2(n)$, $F_3(n)$, $F_4(n)$.

Be kita ko, tai reiškia (žr. (2) formulę su $n = 1$), kad

$$\pi = 4 - \frac{2}{2+}\Big/\frac{1^2}{2+}\Big/\frac{2^2}{2+}\Big/\frac{3^2}{2+}\Big/\frac{4^2}{2+\dots}.$$

Literatūra

[1] T. Hayashi, T. Kusuba and M. Yano. The correction of the madhava series for the circumference of a circle. *Centaurus*, **33**:149–174, 1990.

[2] A.P. Jushkevich. *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig, 1964.

[3] J. Mačys ir J. Sušinskas. *Eilučių propedeutika mokykloje*. (Šiame leidinyje).

[4] C.T. Rajgopal and M.S. Rangachari. *On an untapped source of medieval Keralese mathematics*. Available from internet: //springerlink.com/countent/mnr38341n762n544/?.

SUMMARY

Madhava's formulae

J.J. Mačys

Two hypotheses on the derivation of Madhava's corrections of the series for number π are considered.

Keywords: number π, Madhava–Gregory–Leibniz series, correction, continuous fractions.