

Universitetų biudžeto ir finansų kompiuterinis modeliavimas

Feliksas Ivanauskas, Aleksas Pikturna, Karolis Valiulis

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas

Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

E. paštas: feliksas.ivanauskas@mif.vu.lt, aleksas.pikturna@cr.vu.lt, karolis.val@gmail.com

Santrauka. Darbo tikslas yra sukurti determinuotą diskretaus laiko universiteto finansų matematinį modelį, kuris leistų prognozuoti studentų, dėstytojų ir finansų kitimą laike bei jų tarpusavio sąveiką. Modelis sukurtas trijų diferencialinių lygčių pagrindu. Apskaičiuota modelio normuotų sąveikaujančių faktorių matrica. Naudojantis lygčių sistema galima analizuoti situaciją ir prognozuoti, koks bus studentų ir dėstytojų skaičius universitete ir koks galėtų būti finansavimas.

Raktiniai žodžiai: diferencialinės lygtys, kompiuterinis modeliavimas, universiteto finansai.

1 Įvadas

Pastaraisiais dešimtmečiais susiformavo sudėtingų procesų ir sistemų tyrinėjimo metodas vadinamas matematinio modeliavimu. Pirmame etape parenkamas analizuojamo proceso artinys ir jis aprašomas matematiškai. Po to yra parenkamas skaitinis sprendimo metodas. Trečiame etape rašoma skaičiavimo programa kompiuteriui. Tada atliekami skaičiavimai, jie analizuojami, lyginami su turimais duomenimis, tikslinamas matematinis modelis ir taikomas proceso ar sistemos savybėms tirti. Straipsnyje yra analizuojamas universitetų biudžeto kompiuterinis modeliavimas.

Vienas iš svarbiausių veiksnių, užtikrinančių aukštą universiteto produktyvumo laipsnį, yra universiteto finansavimas. Pilnas universiteto poreikių patenkinimas užtikrina studijų kokybę. Priešingu atveju, lėšų stygius neleistų atlikti planuojamų mokslinių tyrimų: tiek darbuotojai, tiek studentai nebūtų aprūpinami reikiamais ištekliais, tai neigiamai įtakotų universiteto mokslinį produktyvumą. Iškyla būtinybė sudaryti metodą, kuris leistų prognozuoti, kaip universiteto finansai kis ateityje, kaip tam tikri procesai įtakoja finansų kitimą. Panašų modelį yra pasiūlę JAV mokslininkai L.G. de Pillis ir E.G. de Pillis [1], kuris aprašo, kaip regiono industrija įtakoja produktyvių dėstytojų ir sėkmingų studentų populiacijas.

Pateiksime modelį, kuris yra skirtas finansų, studentų ir dėstytojų tarpusavio dinamikos universitete analizei. Modelis sukurtas remiantis Vilniaus universiteto pateikta 2000–2011 metų statistika.

2 Modelio parametrai ir lygtys

Universiteto finansų modelį sudaro trys diferencialinės lygtys. Pirmoji lygtis aprašo studentų skaičių universitete, antroji – dėstytojų, trečioji – universiteto finansus (gautas pajamas).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = c_{11}S + c_{12}D + c_{13}F, \\ \frac{dD}{dt} = c_{21}S + c_{22}D + c_{23}F, \\ \frac{dF}{dt} = c_{31}S + c_{32}D + c_{33}F. \end{cases} \quad (1)$$

Parametrų reikšmės:

- $S(t)$ – studentų skaičius laiku t ;
- $D(t)$ – dėstytojų skaičius laiku t ;
- $F(t)$ – universiteto generuojami finansai laiku t ;
- $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{33}$ – lygčių koeficientai, aprašantys sąveiką tarp studentų, dėstytojų skaičiaus ir universiteto finansų.

3 Lygčių koeficientų radimas

3.1 Statistiniai duomenys

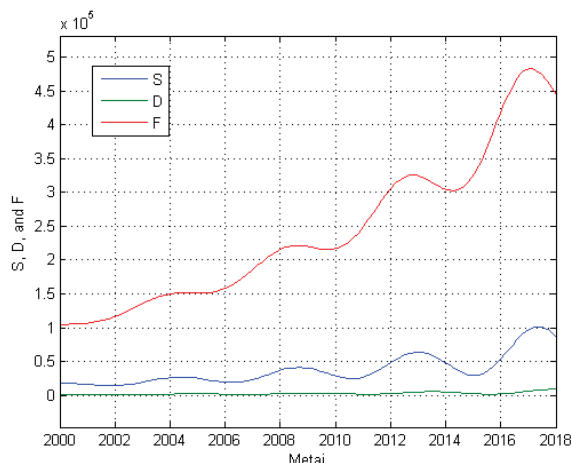
Lygčių koeficientų apskaičiavimas buvo atliekamas regresiniu būdu, pasinaudojant 2000–2011 metų Vilniaus universiteto statistiniais duomenimis. Pirmoje lentelėje pateikiamas studentų skaičius, dėstytojų etatų skaičius ir biudžeto pajamos tūkstančiais litų konkreitiems metams.

3.2 Koeficientų apskaičiavimas

Lygčių koeficientai buvo rasti išsprendžiant netiesinių kreivių pritaikymo (*angl. curve-fitting*) uždavinį naudojant mažiausių kvadratų metodą, remiantis pirmoje lentelėje pateiktais statistiniais duomenimis. Skaičiavimai atlikti naudojantis MATLAB programine įranga ir paketu „*Métodos Numéricas*“, kuris naudoja funkcijas *lsqcurvefit* [2] ir *ode45* [3]. Funkcija *lsqcurvefit* yra skirta koeficientų c suradimui, kurie išsprendžia problemą: $\min_c \|F(c, cdata) - ydata\|_2^2 = \min_c \sum_i (F(c, cdata_i) - ydata_i)^2$, o funkcija

1 lentelė. Vilniaus universiteto studentai, dėstytojai ir pajamos 2000–2011 metais.

Metai	Studentų skaičius	Dėstytojų etatų skaičius	Universiteto pajamos tūkst. litų
2000	17 710	1357	104 188
2001	18 445	1432	104 793
2002	20 298	1449	112 098
2003	22 369	1388	123 493
2004	24 221	1469	140 052
2005	25 014	1416	149 946
2006	24 794	1499	172 330
2007	24 933	1503	194 579
2008	24 502	1535	227 461
2009	23 707	1510	219 284
2010	22 574	1835	215 677
2011	21 562	1842	242 869



1 pav. S , D , F kitimas nuo 2000 iki 2018 metų.

ode45 išsprendžia diferencialines lygtis vidutinės tvarkos metodu (*angl. medium order method*). Skaičiuojant buvo atliekama 2000 iteracijų su nustatytu tikslumu 1×10^{-8} , gauti koeficientai: $c_{11} = 1,48$, $c_{12} = -20,65$, $c_{13} = 0,0217$, $c_{21} = 0,2315$, $c_{22} = -1,518$, $c_{23} = -0,0168$, $c_{31} = -0,4752$, $c_{32} = -24,01$, $c_{33} = 0,4245$.

Lygčių sistema įgyja pavidalą.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 1,48S - 20,65D + 0,02169F, \\ \frac{dD}{dt} = 0,2315S - 1,518D - 0,01681F, \\ \frac{dF}{dt} = -0,4752S - 24,01D + 0,4245F. \end{cases} \quad (2)$$

Pastaroji lygčių sistema buvo sprendžiama su MATLAB programine įranga, naudojant *ODESOLVE* paketą, skirtą diferencialinių lygčių sprendimui, su pradinėmis reikšmėmis (2000 metų Vilniaus universiteto statistiniais duomenimis):

- $S(0)17710$, $D(0)1357$, $F(0)104188$.

Atlikus skaičiavimus gauname (1 pav.), kad universiteto finansai auga, nors ir turi bangavimo požymių. Savo piką 2000–2018 metų periode pasiekia 2017 metais. Dėstytojų skaičius kinta nežymiai, turi bangavimo savybių, tačiau nei ryškaus didėjimo, nei ryškaus mažėjimo nematome. Studentų skaičius yra didėjantis, tačiau didėjant metams, bangavimas tampa vis ryškesnis ir didesnis.

4 Sąveikaujančių faktorių sąryšio matrica

Universiteto finansų analizei panaudotą matematinį modelį užrašome vektoriniu pavidalu:

$$\frac{dB}{dt} = A * B. \quad (3)$$

Čia vektorius B yra sudarytas iš trijų komponentių $B = \begin{pmatrix} S \\ D \\ F \end{pmatrix}$, čia S – studentų skaičius, D – dėstytojų skaičius, F – universiteto finansavimas (gautos pajamos), matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,48 & -20,65 & 0,02169 \\ 0,2315 & -1,518 & -0,01681 \\ -0,4752 & -24,01 & 0,4245 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

5 Normuotų sąveikaujančių faktorių sąryšio matrica

Patogesnės analizės dėlei dydžius S , D ir F normuojame į S_n , D_n , F_n ($S_n(2000) = D_n(2000) = F_n(2000) = 1$). Normavimas leidžia aiškiau įvertinti analizuojamų procesų pokyčius. Pažymėję

$$\begin{aligned} S &= S_{2000} * S_n, \\ D &= D_{2000} * D_n, \\ F &= F_{2000} * F_n, \end{aligned} \quad (5)$$

$S_{2000} = 17\,710$, $D_{2000} = 1357$, $F_{2000} = 104\,188$. Gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} S'_n \\ D'_n \\ F'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,48 & -1,58 & 0,127 \\ 3,021 & -1,518 & -1,291 \\ -0,08 & -0,312 & 0,4245 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ D_n \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

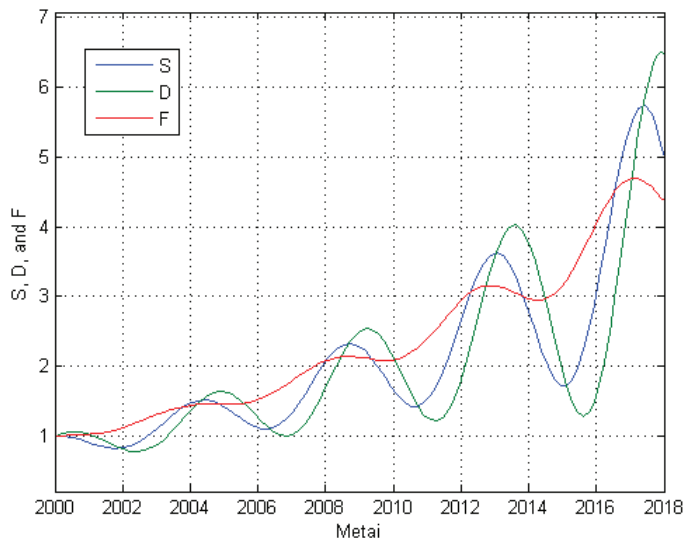
Sistema yra nesimetrinė. Analizuodami normuotų sąveikaujančių faktorių sąryšio matricos elementus galime daryti išvadą, kad 2000–2012 metų periode studentų skaičiaus augimą teigiamai įtakojo patys studentai (koef. 1,48), jį neigiamai veikė dėstytojų augimas (koef. $-1,58$). Finansų augimas labai didelės įtakos neturėjo, tačiau vis tiek ši skaičių veikė teigiamai (koef. 0,127).

Dėstytojų skaičiaus augimą skatino tik vienintelis veiksnys – didėjantis studentų skaičius (koef. 3,021). Pačių dėstytojų ir finansų skaičiaus augimas neigiamai veikė universiteto dėstytojų skaičių (koef. atitinkamai $-1,518$ ir $-1,291$).

Finansų augimą teigiamai įtakojo tik vienintelis veiksnys – patys finansai (koef. 0,4245). Didėjantis studentų skaičius turėjo nors ir nedidelę, tačiau neigiamą įtaką universiteto finansų skaičiaus augimui (koef. $-0,08$). Didesnį neigiamą poveikį darė didėjantis darbuotojų skaičius (koef. $-0,312$).

Ši lygčių sistema buvo sprendžiama naudojantis MATLAB programine įranga. Pradinės reikšmės yra imamos $S_n(2000) = D_n(2000) = F_n(2000) = 1$. Gauname 2000–2012 metų rezultatų aprašymą (6) sistemos sprendiniu ir prognozę 2013–2018 metams.

Brėžinyje galime vizualiai pamatyti pastebėjimus, kurie buvo aprašyti analizuojant normuotų sąveikaujančių faktorių sąryšio matricos elementus. Finansų augimą neigiamai įtakoja studentų ir dėstytojų augimas. Finansų kreivė pradeda augti tik tada, kai dėstytojų ir studentų skaičius pradeda mažėti. Dėstytojų kreivės augimą teigiamai įtakoja tik studentų augimas. Galime matyti brėžinyje, jog pradėdant didėti studentų skaičiui pradeda didėti ir dėstytojų skaičius. Dėstytojų mažėjimas teigiamai veikia studentų kreivės augimą.



2 pav. Finansų, dėstytojų ir studentų kitimas laike.

6 Išvados

Atlikus modeliavimą galime daryti tokią išvadą – sukurtasis modelis aprašo pagrindinių universiteto procesų: studentų, dėstytojų, finansų tarpusavio dinamiką universitete. Remiantis šiuo modeliu galima prognozuoti VU raidą.

Literatūra

- [1] L.G. de Pillis and E.G. de Pillis. The long-term impact of university budget cuts: a mathematical model. *Math. Comput. Model.*, **33**(8/9):851876, 2001.
- [2] MathWorks.se: lsqcurvefit, 2012 [žiūrėta 2013 m. gegužės 26 d.]. Adresas internete: <http://www.mathworks.se/help/optim/ug/lscurvefit.html>.
- [3] MathWorks.se: ode45, 2012 [žiūrėta 2013 m. gegužės 26 d.]. Adresas internete: <http://www.mathworks.se/help/matlab/ref/ode45.html>.

SUMMARY

Computational modeling of University budget and finance

F. Ivanauskas, A. Pikturna, K. Valiulis

The discrete time mathematical model describing fundamental processes of the university, i.e. inter-dynamics among students, lectures and finances is presented. The model consists of three differential equations.

Keywords: discrete time models, ordinary differential equations, estimation of parameters.