

Apie maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymą

Arvydas Jokimaitis, Darius Petronaitis

Kauno technologijos universitetas, Fundamentalųjų mokslų fakultetas
Studentų g. 48, LT-51368 Kaunas

E. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt, darius.petronaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje rastas maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymo funkcijos įvertis.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliųjų reikšmių indeksas, ekstremaliųjų reikšmių statistika, meteorologija.

Įvadas

Šiame straipsnyje tirsime maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje bei trijuose didžiausiuose miestuose pasiskirstymą. Tai aktuali tema, nes ekstremalus gamtos reiškiniai: uraganiniai vėjai, potvyniai, karščiai, speigai ir kiti įtakoja žmogaus sveikatą, kelia pavojų jo saugumui, pažeidžia gamtos ekosistemų pusiausvyrą, kelia žalą inžineriniams statiniams. Pastaruoju metu klimatologai teigia, kad ateityje tokių ekstremalių gamtos reiškinių vis daugės. Pasaulyje ekstremalių reiškinių statistinei analizei skirta daug publikacijų, iš kurių galima paminėti [7], kurioje nagrinėjamas maksimalių oro temperatūrų Malaizijoje skirstinys. Iš Lietuvoje vykdomų tyrimų galima paminėti keletą publikacijų [2, 4].

Tyrime taikysime ekstremaliųjų reikšmių teoriją, kuri ekstremumų (maksimumų ir minimumų) pasiskirstymus aprašo apibendrintuoju ekstremaliųjų reikšmių skirstiniu, priklausančiu nuo parametro, kuris vadinamas ekstremaliųjų reikšmių indeksu. Tokiu būdu ekstremumų pasiskirstymo įvertinimas suvedamas į ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčio radimą.

Lietuvos hidrometeorologijos tarnyba prie Aplinkos ministerijos tyrimams suteikė hidrometeorologinę informaciją apie aukščiausias metines oro temperatūras užregistruotas visose 1961–2012 m. Lietuvos teritorijoje veikusiose meteorologinėse stotyse.¹ Apdorota informaciją apie maksimalias metines oro temperatūras Lietuvoje pateikta, 1 lentelėje. Nagrinėti ilgesnį laikotarpį trukdė duomenų trūkiai archyvinėje medžiagoje.

¹ Neįtraukti veikusių agrometeorologijos stočių, paprastųjų klimato stočių ir vandens matavimo stočių duomenys.

1 lentelė. Užregistruoti oro temperatūros maksimumai Lietuvos meteorologijos stotyse 1961–2012 m.

Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C
1961	30	1973	32	1985	30,6	1997	32,9	2009	31,7
1962	28,6	1974	30,9	1986	32,7	1998	34,5	2010	34,3
1963	35,2	1975	31,4	1987	31	1999	34,3	2011	32,5
1964	32,3	1976	30,7	1988	32,5	2000	31,9	2012	34,6
1965	29,4	1977	30,6	1989	32,9	2001	34		
1966	31,1	1978	29,2	1990	32	2002	35		
1967	30,9	1979	31,4	1991	32,4	2003	32,2		
1968	34,4	1980	29,1	1992	35,8	2004	31		
1969	31,4	1981	30,3	1993	30,7	2005	32,2		
1970	30,6	1982	31,4	1994	35,5	2006	35,2		
1971	33,5	1983	30,8	1995	33	2007	34,1		
1972	32	1984	32,9	1996	31,4	2008	31,3		

1 Ekstremaliųjų reikšmių pasiskirstymo parametrų vertinimo metodai

Tarkime, X_1, \dots, X_n, \dots nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys pasiskirstymo funkciją $F(x)$. Pažymėkime:

$$Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Jei pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina tam tikras sąlygas [6], tai egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = H_\gamma(x),$$

čia

$$H_\gamma(x) = \exp\left(- (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \quad \text{kai } 1 + \gamma x > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

apibendrintasis maksimaliųjų reikšmių pasiskirstymas. Parametras γ vadinamas ekstremaliųjų reikšmių indeksu. Priklausomai nuo parametro γ reikšmių gauname tris maksimumų ribinio pasiskirstymo tipus:

1. Frešė pasiskirstymą, kai $\gamma > 0$;
2. Veibulo pasiskirstymą, kai $\gamma < 0$;
3. Gumbelio pasiskirstymą, kai $\gamma = 0$.

Kai n yra pakankamai didelis, maksimumo Z_n pasiskirstymą galima aproksimuoti pasiskirstymu $H_\gamma\left(\frac{x-a_n}{b_n}\right)$.

Norėdami įvertinti maksimumo pasiskirstymą, turime rasti parametro γ ir poslinkio bei mastelio parametrų $a = a_n$ ir $b = b_n$ įverčius. Trumpai apžvelgsime dažniausiai taikomus šių parametrų įverčius.

Tarkime, Z_1, \dots, Z_n – maksimumų seka. Sudarome jų variacinę seką:

$$Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(n)}.$$

Pažymėkime:

$$M_{i,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln Z_{(n-j+1)} - \ln Z_{(n-k)})^i,$$

$$L_{1,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{Z_{(n-k)}}{Z_{(n-j+1)}} \right),$$

čia $1 \leq k \leq n$, $i = 1, 2$.

Darbe taikyti trys parametro γ įverčiai. Šie įverčiai pasirinkti todėl, kad jie galioja su visais $\gamma \in \mathbb{R}$.

1. Momentų įvertis [5]:

$$\hat{\gamma}_1 = M_{1,k,n} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{M_{2,k,n}}{M_{1,k,n}^2} - 1 \right)^{-1} \right).$$

2. Apibendrintas Hilo įvertis [3]:

$$\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}_{k,H} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln \hat{\gamma}_{j,H} - \ln \hat{\gamma}_{k,H}),$$

čia

$$\hat{\gamma}_{k,H} = M_{1,k,n}$$

Hilo įvertis [8].

3. Mišrusis momentų įvertis [1]:

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{\varphi_{k,n} - 1}{1 + 2 \min(\varphi_{k,n} - 1, 0)},$$

čia

$$\varphi_{k,n} = \frac{M_{1,k,n} - L_{1,k,n}}{L_{1,k,n}^2}.$$

Įverčiai $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\gamma}_3$ yra suderintieji, kai $k = k_n$, yra tokie, kad $k = k_n \rightarrow \infty$, $k_n = o(n)$, kai $n \rightarrow \infty$. Poslinkio parametro $a = a_n$ įvertis yra

$$\hat{a} = Z_{(n-k)}.$$

Jei parametro γ įvertis yra $\hat{\gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3$), tai mastelio parametras $b = b_n$ įvertinamas šitaip:

$$\hat{b}_j = Z_{(n-k)} M_{1,k,n} (1 - \min(0, \hat{\gamma}_j)).$$

2 Pagrindiniai rezultatai

Naudodamiesi, 1 lentelėje pateikta informacija įvertinome Lietuvos oro temperatūros maksimumų pasiskirstymo parametrų įverčius, kurie pateikti 2 lentelėje.

2 lentelė. Lietuvos oro temperatūros maksimumų pasiskirstymo parametrų įverčiai, kai $k = 28$.

Parametro γ įvertis		\hat{a}	\hat{b}
Momentų įvertis	-0,53	31,7	2,59
Apibendrintas Hilo įvertis	-0,49	31,7	2,52
Mišrusis momentų įvertis	-0,44	31,7	2,43

3 lentelė. Statistikos D_n reikšmės.

Parametro γ įvertis	D_n
Momentų įvertis	0,177
Apibendrintas Hilo įvertis	0,174
Mišrusis momentų įvertis	0,17

4 lentelė. Maksimalių oro temperatūrų trijuose didžiausiuose Lietuvos miestuose pasiskirstymo parametro γ įverčiai, kai $k = 28$.

Parametro γ įvertis	Vilniaus	Kauno	Klaipėdos
Momentų įvertis	-0,32	-0,28	-0,56
Apibendrintas Hilo įvertis	-0,37	-0,29	-0,36
Mišrusis momentų įvertis	-0,26	-0,23	-0,46

Toliau taikydami Kolmogorovo–Smirnovo kriterijų su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,05$ tikriname suderinamumo hipotezę H , kad Lietuvos maksimalių oro temperatūrų pasiskirstymo funkcija yra $H_{\hat{\gamma}}(\frac{x-\hat{a}}{\hat{b}})$. 3 lentelėje pateiktos Kolmogorovo statistikos D_n reikšmės visų trijų įverčių atveju, kai $k = 28$.

Šiuo atveju Kolmogorovo–Smirnovo kritinė reikšmė lygi 0,185, todėl visais trim atvejais suderinamumo hipotezė neatmestina.

Taip pat buvo surasti aukščiausių oro temperatūrų tose Lietuvos vietovėse, kuriose veikia meteorologines stotys, pasiskirstymo parametro įverčiai. 4 lentelėje pateikti keli iš jų.

3 Išvados

1 išvada. Parametro γ įverčio reikšmę įtakoja k reikšmės parinkimas. Mūsų tirtais atvejais pastebėta, kad su mažais arba dideliais (n atžvilgiu) k suderinamumo hipotezė nepriimtina.

2 išvada. Kai $28 \leq k \leq 34$, suderinamumo hipotezė mūsų tirtais atvejais neatmestina.

Literatūra

[1] M.I. Fraga Alves, M.I. Gomes, L. de Haan and C. Neves. The mixed moment estimator and location invariant alternatives. *Extremes*, **12**:149–185, 2009.

- [2] R. Alzbutas, K. Kupčiūnienė ir S. Lysak. Atominės elektrinės saugą veikiančių ekstremalių vėjų tikimybinis vertinimas. *Energetika*, **55**(1):20–26, 2009.
- [3] J. Beirlant, P. Vynckier and J. Teugels. Exces functions and estimation of the extreme-value index. *Bernoulli*, **2**:293–318, 1996.
- [4] V. Česnulytė and R. Alzbutas. Probabilistic modelling and uncertainty analysis of extreme weight of snow. In *11th International Probabilistic Safety Assessment and Management Conference and the Annual European Safety and Reliability Conference (PSAM11 ESREL2012)*, Helsinki, Finland, June 25–29, 2012, pp. 1243–1252. IAPSAM and ESRA, 2012. ISBN 978-1-62276-436-5.
- [5] A. Dekkers, J. Einmahl and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Stat.*, **17**:1833–1855, 1989.
- [6] B.V. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une séries aléatoire. *Ann. Math.*, **44**(3):423–453, 1943.
- [7] H. Hasan, N. Salam and M.B. Adam. Modelling extreme temperature in Malaysia using generalized extreme value distribution. *Eng. Techn.*, **78**:435–441, 2013.
- [8] B.M. Hill. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Stat.*, **3**(5):1163–1174, 1975.

SUMMARY

The maximum air temperature distribution in Lithuania

A. Jokimaitis, D. Petronaitis

In this article authors found out function estimate of maximum air temperature distribution in Lithuania.

Keywords: extreme value index, statistics of extremes, meteorology.