Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 130–134

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Dinaminių slopintuvų taikymas sistemai su apribotu žadinimu

Genovaitė Zaksienė

Kauno technologijos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas
Studentų 50, LT-51368 Kaunas
E. paštas: genovaite.zaksiene@ktu.lt

Santrauka. Su virpesiais susiduriame visose žmogaus gyvenimo ir veiklos srityse: technikoje, biologijoje, medicinoje ir net visuomeniniame gyvenime. Nagrinėjama autonominė sistema su apribotu žadinimu gali būti dinaminiu modeliu daugeliui techninių objektų, nes įvairūs funkcionalinės paskirties prietaisai, įtaisai, mašinos turi vienodų tipų dinaminius modelius. Vienas iš būdų kovoti su žalingais virpesiais yra dinaminių slopintuvų taikymas. Dinaminiai slopintuvai turi tokį privalumą, kad jų panaudojimas nereikalauja esminių konstrukcinių pakeitimų. Jei pagrindinę masę veikianti jėga iššaukia pavojingai dideles virpesių amplitudes, tai prijungus dinaminį slopintuvą, t. y. papildomą masę, galima žymiai sumažinti pagrindinės masės ampitudę.

Raktiniai žodžiai: Mechaninė sistema su apribotu žadinimu, dinaminis slopintuvas, mažo parametro metodas.

1 Dinaminio modelio tyrimas

Sistema su apribotu žadinimu ir dinaminiu slopintuvu aprašoma lygtimis [3]

$$\begin{cases} (M+M_1+M_2)\ddot{x}+cx+H\dot{x}=M_1r\big(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi\big), \\ m_1\ddot{x}_1-c_1(x-x_1)=0, \\ \big(2I+M_1r^2\big)\ddot{\varphi}=M_1r^2\left(\ddot{\varphi}\cos2\varphi-\dot{\varphi}^2\sin2\varphi+\dfrac{2}{r}\ddot{x}\sin\varphi\right)+M\dot{\varphi}, \end{cases} \tag{1}$$

čia m_1, c_1 – dinaminio slopintuvo masė ir standumas. Energijos šaltinis – variklis, sukantis rotorių M_2, kurio inercijos momentas I ir prie kurio pritvirtintas švytuoklinis – šarnyrinis mechanizmas su mase M_1 ir veikiantis pagrindą M, kurio standumo charakteristika c ir slopinimas H.

Slopinimo jėgą $H\dot{x}$, jėgas $M_1r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$, $M_1r\ddot{\varphi}\sin\varphi$ ir momentus, $M_1r^2\ddot{x}\sin\varphi$, $M(\dot{\varphi})$, pagreitį $\ddot{\varphi}$ skaitysime mažais, palyginus su kitomis jėgomis ir momentais, veikiančiais sistemoje. Tuo tikslu įvesime parametrą ε, kuris parodo tik dydžių eilę ir skaičiavimų gale priimsime lygiu vienetui.

Lygtys, įvedus mažą parametrą ε ir pažymėjimus, atrodys taip:

$$\begin{cases} m\ddot{x}+c_1(x-x_1)+cx=\varepsilon M_1r\big(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi\big)-\varepsilon H\dot{x}, \\ m_1\ddot{x}_1-c_1(x-x_1)=0, \\ \big(2I+M_1r^2\big)\ddot{\varphi}=\varepsilon M_1r^2\left(\ddot{\varphi}\cos2\varphi-\dot{\varphi}^2\sin2\varphi+\dfrac{2}{r}\ddot{x}\sin\varphi\right)+\varepsilon M\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{2}$$

Sistemos (2) savų dažnių lygtis atrodys taip:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\bigl(\omega^2 + (1+\mu_1)\omega_1^2\bigr) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\bigl(\omega^2 + (1+\mu_1)\omega_1^2\bigr)^2 - \omega^2 \cdot \omega_1^2},$$

čia $\frac{c}{m} = \omega^2$, $\frac{c_1}{m_1} = \omega_1^2$, $\frac{m_1}{m} = \mu$.

Transformacijos pagalba [2]

$$\begin{cases} x = z + z_1, \\ x_1 = \alpha z + \alpha_1 z_1, \end{cases} \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} = \frac{\omega_1 - \Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}, \qquad \frac{\alpha}{\alpha - \alpha_1} = \frac{\omega_1^2 - \Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}$$

pereisime prie normaliųjų koordinačių z, z_1:

$$\begin{cases} \ddot{z} + \Omega_1^2 z = \varepsilon \dfrac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1}\Bigl(\dfrac{M_1}{M}\bigl(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi\bigr) - \dfrac{H}{mr}(\dot{z} + \dot{z}_1)\Bigr) \\ \ddot{z} + \Omega_2^2 z_1 = -\varepsilon \dfrac{\alpha}{\alpha - \alpha_1}\Bigl(\dfrac{M_1}{M}\bigl(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi\bigr) - \dfrac{H}{mr}(\dot{z} + \dot{z}_1)\Bigr). \end{cases} \tag{3}$$

Ieškosime periodinių sprendinių su periodu $\frac{2\pi}{\gamma}$, $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $\gamma(0) = \gamma_0$, kur γ – variklio sukimosi greitis.

Nagrinėsime rezonansinius virpesius, kai pagrindo virpesių savas dažnis Ω_1^2 mažai skiriasi nuo žadinimo dažnio γ_0: $\gamma_0^2 - \Omega_1^2 = \varepsilon\Delta$.

Įvesime keitinį $\tau = \gamma t = \lambda\gamma_0 t$, $\lambda = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, $\frac{M_1}{m} = q_1$, $\frac{M_1 r^2}{2I + M_1 r^2} = q_2$, $\frac{M}{2I + M_1 r^2} = M'$, $\frac{H}{mr} = h$.

Lygčių sistema po pertvarkymų atrodys taip:

$$\begin{cases} \lambda^2 \ddot{z} + \lambda^2 z \\ \quad = \varepsilon\Bigl(\lambda^2 - \dfrac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2}\Bigr)z + \varepsilon\dfrac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1}\Bigl(q_1\bigl(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi\bigr) - \dfrac{h}{\gamma_0}(\dot{z} + \dot{z}_1)\Bigr) \\ \lambda^2 \ddot{z}_1 + \dfrac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2} z_1 = -\varepsilon\dfrac{\alpha}{\alpha - \alpha_1}\Bigl(q_1\bigl(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi\bigr) - \dfrac{h}{\gamma_0}(\dot{z} + \dot{z}_1)\Bigr) \\ \lambda^2 \ddot{\varphi} = \varepsilon q_2 \lambda^2\Bigl(\ddot{\varphi}\cos 2\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + (\ddot{z} + \ddot{z}_1)\cdot\sin\varphi + \dfrac{1}{\gamma_0^2}\varepsilon M'(\dot{\varphi}\lambda\gamma_0)\Bigr). \end{cases} \tag{4}$$

Sprendinio ieškosime mažo parametro metodu

$$\begin{cases} z_i = z_i^{(0)} + \varepsilon z_i^{(1)} + \varepsilon^2 z_i^{(2)} + \dots, \quad i = 0, 1, \\ \lambda = 1 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \dots, \\ \varphi = \tau + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \dots. \end{cases} \tag{5}$$

Įstačius (5) išraišką į (4) sistemą ir sulyginus narius prie vienodų ε laipsnių, nuliniam priartėjimui, gausime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \ddot{z}^{(0)} + z^{(0)} = 0, \\ \ddot{z}_1^{(0)} + \dfrac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2} z_1^{(0)} = 0, \\ \ddot{\varphi}^{(0)} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Šiai lygčių sistemai ieškosime sprendinio:

$$\begin{aligned} z^{(0)} = A^{(0)} \cos\big(\tau + \theta^{(0)}\big), \quad z_1^{(0)} = 0 \\ \varphi^{(0)} = \tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Konstantas $A^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, γ_0 rasime iš pirmojo priartėjimo sprendinių, pritaikius periodiškumo sąlygas [1, 4].

Pirmajam priartėjimui rasti, sudaroma lygčių sistema:

$$\begin{cases} \ddot{z}^{(1)} + z^{(1)} = -2\lambda_1 \ddot{z}^{(0)} - 2\lambda_1 z^{(0)} + \Big(1 - \dfrac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2}\Big) z^{(0)} \\ \qquad + \dfrac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1}\Big(q_1 \cos\tau - \dfrac{h}{\gamma_0}\big(\dot{z}^{(0)} + \dot{z}_1^{(0)}\big)\Big), \\ \ddot{z}_1^{(1)} + \dfrac{\Omega_2^2}{\gamma_0^2} z_1^{(1)} = -2\lambda_1 z_1^{(0)} - \dfrac{\alpha}{\alpha - \varepsilon_1} q_1 \cos\tau - \dfrac{h}{\gamma_2^0}\big(\dot{z}^{(0)} + \dot{z}_1^{(0)}\big), \\ \ddot{\varphi}^{(1)} = -2\lambda_1 \ddot{\varphi}^{(0)} + q_2\big(\ddot{\varphi}^{(0)} \cos 2\tau - {\dot{\varphi}^{(0)}}^2 \sin 2\tau + \big(\ddot{z}^{(0)} + \ddot{z}_1^{(0)}\big) \sin\tau\big) \\ \qquad + \dfrac{1}{\gamma_0^2}(a' - b'\gamma_0). \end{cases} \tag{8}$$

Kad sistemą turėtų periodinį sprendinį 2π periodo, būtina ir pakankama, kad galiotų sąlygos:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \bigg(- 2\lambda_1 \ddot{z}^{(0)} - 2\lambda_1 \ddot{z}^{(0)} + \Big(1 - \frac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2}\Big) z^{(0)} \\ &\qquad + \frac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} q_1 \cos\tau - \frac{h}{\gamma_0} \dot{z}^{(0)}\bigg) \cdot \sin(\tau + \dot{\theta})\, d\tau = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \bigg(- 2\lambda_1 \ddot{z}^{(0)} - 2\lambda_1 \ddot{z}^{(0)} + \Big(1 - \frac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2}\Big) z^{(0)} \\ &\qquad + \frac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} q_1 \cos\tau - \frac{h}{\gamma_0} \dot{z}^{(0)}\bigg) \cdot \cos(\tau + \dot{\theta})\, d\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \bigg(- 2\lambda_1 \ddot{\varphi}^{(0)} + q_2\big(\ddot{\varphi}^{(0)} \cos 2\tau - \dot{\varphi}^{(0)2} \sin 2\tau + \ddot{z}^{(0)} \sin\tau\big) + \frac{1}{\gamma_0^2}(a' - b'\gamma_0)\bigg)\, dt = 0.$$

Iš šių sąlygų gaunama lygčių sistema parametrams $A^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ ir γ_0 nustatyti:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} q_1 \cdot \sin\theta^{(0)} - \dfrac{h}{\gamma_0} A^{(0)} = 0, \\ \Big(1 - \dfrac{\Omega_1^2}{\gamma_0^2}\Big) A^{(0)} + \dfrac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} q_1 \cdot \cos\theta^{(0)} = 0. \end{cases}$$

$A^{(0)} = \frac{\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} \frac{q_1\gamma_0}{\sqrt{h^2 + (\gamma_0^2 - \Omega_1^2)^2}}$ arba grįžus prie ankstesnių pažymėjimų

$$A^{(0)} = \frac{(\omega_1^2 - \gamma_0^2)}{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \frac{q_1\gamma_0}{\sqrt{h^2 + (\gamma_0^2 - \Omega_1^2)^2}} \tag{9}$$

$\operatorname{tg}\theta^{(0)} = \frac{h\gamma_0}{\Omega_1^2-\gamma_0^2}$ ir lygtis dažniui γ_0

$$-\frac{q_2 A^{(0)}\gamma_0^2}{2}\sin\theta^{(0)} + a' - b'\gamma_0 = 0.$$

Kaip matyti iš išraiškos (9), esant išpildytai sąlygai $\omega_1^2 - \gamma_1^2 = \frac{c_1}{m_1} - \gamma_0^2 = 0$, pagrindo virpesių amplitudė $A^{(0)}$ gali būti žymiai sumažinta, t. y. kai dinaminio slopintuvo parametrai $\frac{c_1}{m_1}$ artimi rezonansiniam dažniui γ_0^2.

Sprendinio pirmasis priartėjimas randamas iš lygčių (8), įstačius $z^{(0)}$, $z_1^{(0)}$ išraiškas

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &= \frac{\gamma_0^2}{\Omega_2^2-\gamma_0^2}\left(-\frac{\alpha}{\alpha-\alpha_1}q_1 + \frac{h}{\gamma_0}A^{(0)}\cdot\sin\theta^{(0)}\right)\cos\tau + \frac{\gamma_0}{\Omega_2^2-\gamma_0^2}hA^{(0)}\cos\theta^{(0)}\cdot\sin\tau \\ &= A_1^{(1)}\cdot\cos\tau + B_1^{(1)}\cdot\sin\tau, \end{aligned}$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{q_2}{4}\cdot\sin 2\tau + \frac{q_2 A^{(0)}}{8}\cdot\sin\bigl(2\tau+\theta^{(0)}\bigr).$$

Konstantos $A^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, λ_1 randamos iš antro priartėjimo periodiškumo sąlygų. Pagrindo virpesių ir slopintuvo antrasis priartėjimas paskaičiuotas toks:

$$\begin{aligned} z^{(2)} &= \frac{1}{64}q_1\frac{q_2\alpha_1}{\alpha-\alpha_1}\cos 3\tau - \frac{1}{128}q_1\frac{q_2\alpha_1}{\alpha-\alpha_1}A^{(0)}\cos\bigl(3\tau+\theta^{(0)}\bigr) + A^{(2)}\cos\bigl(\tau+\theta^{(0)}\bigr), \\ z_1^{(2)} &= \frac{\gamma_0^2}{8(\Omega_2^2-9\gamma_0^2)}\,\frac{q_1q_2\alpha}{\alpha-\alpha_1}\cos 3\tau - \frac{\gamma_0^2}{16(\Omega_2^2-9\gamma_0^2)}\,\frac{q_1q_2\alpha}{\alpha-\alpha_1}\cdot A^{(0)}\cos\bigl(3\tau+\theta^{(0)}\bigr). \end{aligned}$$

Grįžus prie pradinių kintamųjų x, x_1: $x^{(2)} = \alpha z^{(2)} + \alpha_1 z_1^{(2)}$, pagrindo virpesių antrasis priartėjimas bus toks:

$$x^{(2)} = \left(\frac{(\omega_1^2-9\gamma_0^2)}{8(\Omega_2^2-9\lambda_0^2)} + \frac{\omega_1^2+\Omega_2^2}{8(9\gamma_0^2-\Omega_2^2)(\Omega_1^2-\Omega_2^2)}\right)\frac{q_1q_2}{8}\cos 3\tau + \frac{q_1q_2}{16}A^{(0)}\cos\bigl(3\tau+\theta^{(0)}\bigr). \tag{10}$$

Iš išraiškos (10) matyti, kad sumažinus pagrindo periodinių virpesių amplitudę $A^{(0)}$, trečios harmonikos amplitudė keičiasi nežymiai. Reiškia, nustatant dinaminį slopintuvą pagrindo pagrindinės harmonikos periodinių virpesių slopinimui, aukštesnių harmonikų amplitudės keičiasi nežymiai.

2 Išvados

1. Pagrindo rezonansinių virpesių slopinimui taikomo tiesinio dinaminio slopintuvo parametrai turi tenkinti sąlygą $\frac{c_1}{m_1} = \gamma_0^2$.
2. Taikant dinaminį slopintuvą pagrindo rezonansinių virpesių slopinimui, aukštesnių harmonikų amplitudės keičiasi nežymiai.

Literatūra

[1] V. Nainys and G. Zaksienė. Suppresion of mechanical oscillations in a nonlinear system. In *The 6-th International Conference, Environment Engineering,* vol. 1, pp. 185–190. Vilnius, 2005.

[2] L. Pust and O. Szollos. Forsed iregular oscillations of two degrees of freedom nonlinear systems. In *2nd European Nonlinear Oscillations Conference*, Prague, 1996.

[3] G. Zaksienė. Suppression of mechanical oscillations in nonlinear systems with restruction. In *Proceedings of the 6-th International Conference, Vibroengineering*, pp. 207–210. Kaunas, 2006.

[4] G. Zaksienė. Application of frictional damper for nonlinear systems. In *Proceedings of the 13th International Conference, Mechanika*, pp. 541–547, Kaunas, 2008.

SUMMARY

Application of dynamic damper for system with restriction excitation
G. Zaksienė

The model of dynamic damper was applied for suppression of oscillations of the nonlinear mechanical system.

Keywords: Dynamic damper, mechanical system with restriction excitation, small parameter method.