LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
53 t., 2012, 73–77

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Klasifikuojančio testo klausimų konstravimas, esant kiekybiniams diagnostiniams požymiams

Laura Gudelytė[1], **Aleksandras Krylovas**[1], **Tadas Laukevičius**[1], **Natalja Kosareva**[2]

[1] *Mykolo Romerio universitetas, Socialinės informatikos fakultetas*
Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
[2] *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
E. paštas: l.gudelyte@mruni.eu, krylovas@mruni.eu, tadas@mruni.eu
E. paštas: natalja.kosareva@vgtu.lt

Santrauka. Aprašoma baigtinės aibės elementų suskirstymo į atskiras grupes metodika, leidžianti gauti optimaliai, pasiūlyto kriterijaus prasme, suderintą su aprioriniu elementų rangavimu, tvarką. Metodika pagrįsta tam tikru kombinatoriniu algoritmu ir gali būti naudinga įvairių socialinių mokslų uždavinių sprendimui, kai statistikos metodų taikymas komplikuotas.

Raktiniai žodžiai: matematinis modeliavimas, testai, reitingavimas.

Tarkime, kad kiekvieną baigtinės aibės A elementą $a \in A$ atitinka tam tikras neneigiamas skaičius r (rangas) ir n dalykinių kintamųjų reikšmių $x_1, x_2, \dots, x_n$ (apibrėžtumo dėlei tarkime, kad $0 \leqslant x_j \leqslant 1$). Dviejų šio straipnio bendraautorių darbuose [5, 3] buvo nagrinėjami diagnostinių testų tikimybiniai modeliai, pagrįsti prielaidomis, kad yra žinomi kintamųjų r ir x_j tam tikri teoriniai sąryšiai (funkcijos). Populiarus socialiniuose moksluose indikatorių konstravimo būdas yra reikšmių x_j svertinių vidurkių skaičiavimas

$$r(a) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j(a), \quad w_j \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \tag{1}$$

ir jų rangavimas. *Testo klausimais* (*diagnostiniais požymiais*) vadinamos funkcijos

$$k_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < \alpha_j^{(1)}, \\ 1, & \text{kai } \alpha_j^{(1)} \leqslant x < \alpha_j^{(2)}, \\ \dots \\ m, & \text{kai } x \geqslant \alpha_j^{(m)}, \end{cases} \tag{2}$$

čia $0 < \alpha_j^{(1)} < \alpha_j^{(2)} < \dots < \alpha_j^{(m)} \leqslant 1$. Šiame darbe nagrinėsime tik dichotominius testus, t. y. kai (2) formulėje $m = 1$.

Dalykiniai kintamieji x_j dažnai yra ekspertinių vertinimų rezultatas ir todėl įgyja ranginės skalės reikšmes (žr. pvz. [8]). Diagnostinio testo rezultatas

$$t(a) = \sum_{j=1}^{n} k_j\bigl(x_j(a)\bigr) \tag{3}$$

turi būti kuo geriau suderintas su indikatoriais (1). Statistikoje tokių dydžių suderinamumui matuoti naudojami Kendalo ir Spirmeno ranginės koreliacijos koeficientai [7]. Tačiau statistinis požiūris į nagrinėjamus uždavinius ne visada yra metodologiškai pagrįstas, pavyzdžiui, dėl to, kad aprioriniai duomenys $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ gali būti unikalūs, jų skaičius dažnai būna nepakankamas statistiškai patikimoms išvadoms formuluoti ir pan. Šiame darbe nagrinėsime baigtinės aibės elementų klasifikavimo uždavinį.

1 Klasifikavimo uždavinys

Tarkime, kad yra žinomi baigtinės aibės A elementų a_i rangai r_i ir dalykinių kintamųjų reikšmių atitinkami rinkiniai $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Taigi pradinių duomenų matrica:

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ r_2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_l & x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ln} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Tarkime, kad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(0 < \alpha_j < 1)$ yra realiųjų skaičių rinkinys. Tada gauname testo $t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ rezultatų matricą

$$T_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \begin{pmatrix} r_1 & k_1(x_{11}) & k_2(x_{12}) & \dots & k_n(x_{1n}) & t_1 \\ r_2 & k_1(x_{21}) & k_2(x_{22}) & \dots & k_n(x_{2n}) & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_l & k_1(x_{l1}) & k_2(x_{l2}) & \dots & k_n(x_{ln}) & t_l \end{pmatrix}, \tag{5}$$

čia $k_j(x_{ij}) \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, n$ apskaičiuojami pagal (2) formulę, $t_i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $i = 1, 2, \dots, l$ apskaičiuojami pagal (3) formulę. Pažymėkime $m = \min(r_j)$, $M = \max(r_j)$ ir parinkime bet kurias monotonines funkcijas

$$R : [m, M] \to \{0, 1, \dots, s\} \quad (\forall r_1 < r_2), \qquad R(r_1) \leqslant R(r_2), \tag{6}$$

$$T : \{0, 1, \dots, n-1\} \to \{0, 1, \dots, s\} \quad (\forall t_1 < t_2), \qquad T(t_1) \leqslant T(t_2), \tag{7}$$

čia $s \leqslant n$ (mūsų nagrinėjamu atveju $s = n$). Kiekviena iš funkcijų (6), (7) grupuoja aibes A elementus į nesusikertančius poaibius:

$$A_j^R = \{a \in A\colon R(a) = j\}, \qquad A_i^T = \{a \in A\colon T(a) = i\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \tag{8}$$

čia

$$\bigcup_{j=0}^{n} A_j^R = A, \qquad \bigcup_{i=0}^{n} A_i^T = A.$$

Testo $t(a)$ suderinamumo su indikatoriumi $r(a)$ matą apibrėžiame taip:

$$B(T,R)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\cdot\left|A_i^T\cap A_j^R\right|, \tag{9}$$

čia $|A|$ – aibės A elementų skaičius [6]. Formulė (9) turi labai aiškią prasmę: skaičiuojama (su atitinkamu svoriu) kiek aibės A elementų pateko į poaibius A_j^R, A_i^T su skirtingais numeriais i, j. Geriausias testas $t(a)$ suderinamumo su $r(a)$ prasme randamas sprendžiant minimizavimo uždavinį

$$\min_{\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}} B(T,R). \tag{10}$$

2 Geriausio testo radimo galimybės

Aptarkime (10) uždavinio sprendimo algoritmą, kuris realizuotas mūsų sukurta C++ programa. Esant bet kuriam fiksuotam skaičių rinkiniui $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ (5) matricos elementai $k_j(x_{ij})$ lengvai apskaičiuojami pagal (2) formules. Jie lygūs 0 arba 1 ir sudaro matricos $2,3,\dots,n+1$ stulpelius, o paskutinio $n+2$-ojo stulpelio elementai t_i lygūs šių elementų sumai. Pirmojo stulpelio elementai yra žinomi *a priori*. Kiekvieno matricos D stulpelio elementus $x_{1j},x_{2j},\dots,x_{lj}$ lyginame su skaičiumi α_j. Nesunku matyti, kad (9) funkcija įgyja skirtingas reikšmes tik esant baigtiniam skaičiui parametrų $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ reikšmių. Pakanka pernumeruoti x_{ij} reikšmes didėjimo tvarka $x_{1j}^*,x_{2j}^*,\dots,x_{lj}^*$ ir paimti $\alpha_j^i=\frac{x_{ij}^*+x_{i+1,j}^*}{2}$. Taigi (10) uždavinys teoriškai gali būti išspręstas pilnu visų α_j^i kombinacijų perrinkimu, kurių yra $O(l^n)$. Sumažinti nagrinėjamų variantų skaičių padeda validumo reikalavimas testo klausimams, t. y. jų savybė matuoti būtent tai, ką rodo elemento a indikatorius $r(a)$. Autorių darbe [4] pasiūlytas vienas iš tokių reikalavimų. Pastebėkime, kad šis klausimas nėra išsamiai išnagrinėtas, tad jį paliekame būsimiems tyrimams.

3 Pavyzdys

Parodysime, kaip aprašyta metodika pritaikyta trijų klausimų testo atveju. Testas klasifikuoja geriausias Lietuvos mokyklas į 4 grupes. Ši klasifikacija gerai atitinka žurnale „Veidas“ [1] paskelbtą mokyklų reitingą. Pradinių duomenų matrica šiuo atveju yra

$$D=\begin{pmatrix}
1 & 0,6351 & 0,7814 & 0,9286\\
2 & 0,4583 & 0,4444 & 0,8983\\
3 & 0,4744 & 0,5208 & 0,4932\\
4 & 0,4863 & 0,4308 & 0,4013\\
5 & 0,3865 & 0,4632 & 0,3540\\
6 & 0,2517 & 0,3537 & 0,4609\\
7 & 0,2177 & 0,2794 & 0,3575\\
8 & 0,1325 & 0,2407 & 0,3175\\
9 & 0,2921 & 0,3490 & 0,3224\\
10 & 0,2284 & 0,2986 & 0,2518\\
11 & 0,0769 & 0,0000 & 0,3500\\
12 & 0,4000 & 0,0000 & 0,1000
\end{pmatrix}, \tag{11}$$

1 lentelė. Geriausių Lietuvos mokyklų grupavimas pagal trijų klausimų testo rezultatus.

Testo taškų suma	0	1	2	3
Mokyklos	10, 12	6, 7, 8, 9, 11	4, 5	1, 2, 3

čia pirmame stulpelyje esantis rangas atitinka žurnale „Veidas“ paskelbtą 2011 metų mokyklų reitingą: 1 – Vilniaus licėjus, 2 – VŠĮ Kauno technologijos gimnazija, 3 – Vilniaus jėzuitų gimnazija, 4 – Vilniaus Žirmūnų gimnazija, 5 – Panevežio J. Balčikonio gimnazija, 6 – Kauno J. Jablonskio gimnazija, 7 – Klaipėdos „Ąžuolyno“ gimnazija, 8 – VŠĮ Kauno jėzuitų gimnazija, 9 – Vilniaus M. Biržiškos gimnazija, 10 – Šiaulių J. Janonio gimnazija, 11 – Vilniaus Pranciškaus Skorinos vidurinė mokykla, 12 – Visagino Sedulinos vidurinė mokykla. Antrojo matricos D stulpelio elementai rodo, kokia dalis moksleivių iš lietuvių kalbos valstybinio brandos egzamino gavo 90 ar daugiau balų, trečiojo stulpelio – iš matematikos egzamino, ketvirtojo stulpelio – iš užsienio kalbos egzamino. (10) funkcijos minimali reikšmė $B = 2$, apskaičiuota naudojant anksčiau minėtą programą, įgyjama esant $\alpha_1 = 0{,}43$, $\alpha_2 = 0{,}44$, $\alpha_3 = 0{,}28$. Taigi testas skirsto 12 geriausių Lietuvos mokyklų į 4 grupes. Rezultatai pateikti 1 lentelėje.

Matome, kad tik 2 mokyklos, turinčios 10 ir 11 rangus, pateko ne į tas pačias, tačiau į gretimas grupes. Pastebime, kad trys 2012 metų geriausios mokyklos pagal „Veido“ [2] reitingą lieka tos pačios ir klasifikuojant tuo pačiu testu vėl pateks į 3 grupę.

4 Išvados

Taigi pateikta metodika leidžia konstruoti baigtinės aibės elementus klasifikuojantį testą, geriausią (10) kriterijaus prasme ir suderintą su aprioriniu tų pačių elementų rangavimu. Metodika pagrįsta tam tikru kombinatoriniu algoritmu ir leidžia išsamiai analizuoti esamą informaciją. Tai gali būti svarbu esant metodologiniams apribojimams taikyti statistinius metodus. Konstruojamo testo klausimai gali turėti išliekamąją vertę ir būti tam tikru reitingavimo orientyru. Išnagrinėto pavyzdžio atveju, kriterijus $\alpha_2 = 44\%$ rodo, kad pereiti į aukštesnio reitingo grupę mokykla galėtų, jei ne mažiau kaip 44% mokinių gautų iš matematikos valstybinio brandos egzamino 90 balų arba daugiau.

Literatūra

[1] 2011 metų gimnazijų reitingas. *Veidas*, **32**, 2011 08 08.

[2] 2012 metų gimnazijų reitingas. *Veidas*, **17**, 2012 04 23.

[3] A. Krylovas ir N. Kosareva. Politominio diagnostinio testo matematinis modelis. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **51**:279–284, 2010.

[4] A. Krylovas, N. Kosareva ir L. Gudelytė. Socialiniu indikatoriu konstravimas taikant informacijos matavimo principus. nekilnojamojo turto kainos modeliavimo pavyzdys. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**:195–199, 2011.

[5] N. Kosareva ir A. Krylovas. Diagnostinio testo matematinio modelio tyrimas. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **50**:202–207, 2009.

[6] A. Krylovas. *Diskrečioji matematika.* Vilnius: Technika, 2009.

[7] V. Čekanavičius ir G. Murauskas. *Statistika ir jos taikymai II.* TEV, Vilnius, 2008.

[8] J. Pfanzagl in cooperation with V. Baumann and H. Huber. *Theory of Measurement.* Physica-Verlag, Wurzburg-Wien, 1971.

SUMMARY

Construction of the classifying test items with quantitative diagnostic indicators

L. Gudelytė, A. Krylovas, T. Laukevičius, N. Kosareva

Method which describes destribution af elements of the finite set to disjoint groups, allowing to obtain of elements in the sense of proposed criterion, is described in the paper. The methodology is based on some combinatorial algorithm and can be useful for social science problems solving, when statistical methods application complicated.

Keywords: mathematical modeling, tests, ranking.