LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
52 tomas, 2011, 349–352
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Asimptotiniai skleidiniai normalinės aproksimacijos atveju

Algimantas Bikelis, Juozas Augutis, Kazimieras Padvelskis

Vytauto Didžiojo universitetas, Informatikos fakultetas
Vileikos 8, LT-44404 Kaunas
E. paštas: marius@post.omnitel.net, j.augutis@if.vdu.lt, k.padvelskis@if.vdu.lt

Santrauka. Nagrinėjame k-mačio tikimybinio skirstinio $P(A)$ sąsūkos $P^{*n}(A\sqrt{n})$ asimptotinį elgesį, kai $n \to \infty$ ir A priklauso Euklido erdvės R^k poaibių σ-algebrai $\mathfrak{M}$ arba jos siauresniems poaibiams.

Raktiniai žodžiai: tikimybiniai skirstiniai, sąsūkos, Bergstremo tapatrybė, Čebyševo-Kramerio asimptotinis skleidinys.

Nagrinėjame nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k-mačių atsitiktinių vektorių seką

$$\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_n, \ldots.$$

Tarkime, kad $\vec{\xi}_1$ matematinių vilčių vektorius $E\vec{\xi}_1 = \vec{0} \in R^k$, o antrųjų momentų matirca $\varSigma$ yra neišigimusi. Tarkime $\varPhi_1(A) \sim N_k(\vec{0}, \varSigma)$ yra Gauso k-matis skirstinys.

Pažymėkime

$$\vec{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \vec{\xi}_j$$

ir

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = P\{\vec{S}_n \in A\}$$

visoms Borelio aibėms $A \in \mathfrak{M}$ Euklido erdvėje R^k.

Pasinaudoję Bergstremo tapatybe [1] gauname

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = \varPhi_1^{*n}(A\sqrt{n}) + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^{s} \frac{(-1)^j}{\nu!} C_\nu^{(j)} \varPhi_1^{*(n-\nu)} * \bigl(n(P-\varPhi_1)\bigr)^{*\nu}(A\sqrt{n})$$
$$+ C_n^{s+1}(P-\varPhi_1)^{*(s+1)} * \mathbb{E}\bigl(P^{*(n-\theta)} * \varPhi_1^{*(\theta-s-1)}\bigr)(A\sqrt{n}).$$

Čia $n > 1$, $C_\nu^{(j)}$ yra pirmos rūšies Strilingo skaičius ($C_\nu^{(0)} = 1$),

$$\mathbb{E}\bigl(P^{*(n-\theta)} * \varPhi_1^{*(\theta-s-1)}\bigr) = \sum_{m=s+1}^{n} P\{\theta = m\} P^{*(n-m)} * \varPhi_1^{*(m-s-1)},$$

θ – neigiamas hipergeometrinis atsitiktinis dydis, įgyjantis $m = s+1, s+2, \ldots, n$, su tikimybėmis

$$P\{\theta = m\} = C_{m-1}^{s}/C_{n}^{s+1}.$$

Yra žinomos [2] dvi teoremos apie tapatybėje (1) narių asimptotinį elgesį.

1 teorema. *Tarkime tikimybinis skirstinys $P(A) = P\{\vec{\xi} \in A\}$ turi $2+\delta$ eilės, $0 < \delta \leqslant 1$, baigtinius momentus, tuomet egzistuoja konstanta C priklausoma tik nuo k, s ir δ tokia, kad*

$$\sup_{A\in\mathfrak{M}} \left|\Phi_1^{*(n-\nu)} * \bigl(n(P-\Phi_1)\bigr)^{*\nu}(A\sqrt{n})\right| \leqslant \left(\frac{C\mathbb{E}(\vec{\xi}^{T}\Sigma^{-1}\vec{\xi})^{\frac{2+\delta}{2}}}{n^{\delta/2}}\right)^{\nu}.$$

Čia $1 \leqslant \nu \leqslant s$,

$$\mathbb{E}\bigl(\vec{\xi}^{T}\Sigma^{-1}\vec{\xi}\bigr)^{\frac{2+\delta}{2}} = \int_{R^k} \bigl(\vec{x}^{T}\Sigma^{-1}\vec{x}\bigr)^{\frac{2+\delta}{2}}\, dP(\vec{x}),$$

$\vec{\xi}^{T}$ – transponuotas vektorius $\vec{\xi}$.

2 teorema. *Tarkime galioja 1 teoremos sąlygos ir charakteringoji funkcija atsitiktinio vektoriaus $\vec{\xi}$ išpildo Kramerio sąlygą*

$$\overline{\lim}_{\|\vec{t}\|\to\infty}\left|\mathbb{E}e^{i(\vec{t},\vec{\xi})}\right| < 1. \tag{C}$$

Tuomet

$$\sup_{A\in\mathfrak{M}}\left|r_n^{(s+1)}(A)\right| = o\bigl(n^{-(\delta/2)s}\bigr).$$

Čia

$$r_n^{(s+1)}(A) = C_n^{s+1}(P-\Phi_1)^{*(s+1)} * \mathbb{E}\bigl(P^{*(n-\theta)} * \Phi_1^{*(\theta-s-1)}\bigr)(A\sqrt{n}).$$

Sąsūka

$$\Phi_1^{*(n-\nu)} * \bigl(n(P-\Phi)\bigr)^{*\nu}(A\sqrt{n}) = \int_A p_\nu(\vec{y})\, d\vec{y}$$

turi „tankį“ $p_\nu(\vec{y})$. Panaudodami tikimybinių skirstinių $P(A)$ ir $\Phi_1(A)$ charakteringąsias funkcijas gauname $p_\nu(\vec{y})$ formalų asimptotinį skleidinį

$$\begin{aligned} p_\nu(\vec{y}) = {} & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+\nu+2m}\frac{(-\nu)^m}{m!(3\nu+l)!}\frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial\varepsilon^m\partial\varrho^{3\nu+l}} \\ & \times\left[\int_{x\in R^k}\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)2\pi}}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\right. \\ & \left.\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\vec{y}-\vec{x}\varrho)^{T}\Sigma^{-1}(\vec{y}-\vec{x}\varrho)\right\}d(P-\Phi_1)^{*\nu}(\vec{x})\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}}, \end{aligned} \tag{2}$$

kai $1 \leqslant \nu \leqslant s$. Čia $|\Sigma|$ yra matricos Σ determinantas.

Iš (1) ir (2) išplaukia sąsūkos $P^{*n}(A\sqrt{n})$ formalus asimptotinis skledinys:

$$
\begin{aligned}
&P^{*n}(A\sqrt{n})\\
&\quad= \varPhi(A) + \sum_{j=0}^{s-1}\left(\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^{s} \frac{(-1)^j}{\nu!} C_\nu^{(j)} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+\nu+2m} \frac{(-\nu)^m}{m!(3\nu+l)!}\\
&\qquad\times \frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial\varepsilon^m \partial\varrho^{3\nu+l}}\left[\int_{\vec{x}\in R^k} P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho \in A\}\, d(P-\varPhi_1)^{*\nu}(\vec{x})\right]\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} + \cdots\\
&\quad= P\{\vec{\xi}\in A\} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{j=0}^{s-1}\sum_{\nu=j+1}^{s}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+m}\nu^m}{\nu! m!(3\nu+l)!} C_\nu^{(j)}\\
&\qquad\times \frac{\partial^{m+3\nu+l}}{\partial\varepsilon^m \partial\varrho^{3\nu+l}}\left[\int_{\vec{x}\in R^k} P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho \in A\} d(P-\varPhi_1)^{*\nu}(\vec{x})\right]\Big|_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} + \cdots.
\end{aligned}
$$

Čia

$$
\begin{aligned}
&P\{\vec{\eta}_\varepsilon + \vec{x}\varrho < \vec{z}\}\\
&\quad= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\varepsilon)}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{|\varSigma|}} \int_{\vec{y}<\vec{z}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1+\varepsilon)}(\vec{y}-\vec{x}\varrho)^T \varSigma^{-1}(\vec{y}-\vec{x}\varrho)\right\} d\vec{y}.
\end{aligned}
$$

$\vec{\eta}_\varepsilon \sim N_k(\vec{0}, (1+\varepsilon)\varSigma)$ – k-matis Gauso tikimybinis skirstinys.

3 teorema. *Tarkime atsitinis vektorius $\vec{\xi}$ turi $2+\delta$ eilės, $0<\delta\leqslant 1$, baigtinius absoliutinius momentus ir charakteringoji funkcija $\mathbb{E}\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\xi})}$ tenkina Kramerio sąlygą* (C), *tuomet*

$$
\begin{aligned}
&P\bigl\{\vec{S}_n^T \varSigma^{-1}\vec{S}_n < x\bigr\}\\
&\quad= P\bigl\{\chi_k^2 < x\bigr\} + \sum_{j=0}^{s-1}\left(-\frac{1}{n}\right)^j \sum_{\nu=j+1}^{s}\frac{1}{\nu!}C_\nu^{(j)} \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n-\nu}\right)^r \frac{1}{r!} P\left\{\chi_{k+2r}^2 < x\frac{n}{n-\nu}\right\}\\
&\quad\times \int_{\vec{x}\in R^k}\left(\frac{1}{2}\vec{x}^T\varSigma^{-1}\vec{x}\right)^r \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{n-\nu}\vec{x}^T\varSigma^{-1}\vec{x}}\, d\bigl(n(P-\varPhi_1)\bigr)^{*\nu}(\vec{x}) + o\bigl(n^{-(\delta/2)s}\bigr),
\end{aligned}
$$

čia $x>0$, $s=1,2,\ldots$, χ_k^2 – yra chikvadrato su k laisvės laiposniais atsitiktinis dydis.

3 teoremos tvirtinimas išplaukia iš (2) ir 2 teoremos iš [2].

Literatūra

[1] H. Bergström. On asymptotic expansionns of probability function. *Scand. Aktuarietidskrift*, **34**(1):1–34, 1951.

[2] A. Bikelis and J. Mogyorodi. On asymptotic expansion of the convolution of n multidimensional distribution functions. *Liet. mat. rink.*, **11**(3):433–443, 1970.

SUMMARY

Asymptotic expansion in approximation by normal law
A. Bikelis, J. Augutis, K. Padvelskis

We consider the asymptotic behavior of the convolution $P^{*n}(A\sqrt{n})$ of a k-dimensional probability distribution $P(A)$ as $n \to \infty$ for A from the σ-algebra $\mathfrak{M}$ of Borel subsets of Euclidian space R^k or from its subclasses.

Keywords: Probability distributions in R^k, convolutions, Bergström identity, Appell polynomials, Chebyshev–Cramer asymptotic expansion.