Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 48–52

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

О кардинальных инвариантах пространства конечных подмножеств

Гинтарас Пранинскас

Клайпедский университет
Г. Манто 84, 92294 Клайпеда
E-mail: gintaras.p@zebra.lt

Аннотация. В статье исследуются некоторые кардинальные инварианты пространства конечных подмножеств пространства. Получен результат, что такие кардинальные инварианты как плотность и сетевий вес, характер и π – характер, π – вес и вес совпадают в любой $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – топологии (Утверждение 1). Также получены оценки числа Линделефа и числа Суслина (Теоремма 2). Также доказано, что пространство конечные подмножества имеет счетний псевдохарактер тогда и только тогда, когда его диагональное число счетно (Утверждение 4). Также получема характеристика, когда пространство конечных подмножеств имеет счетный характер (Утверждение 5).

Ключевые слова: топологическое пространство, пространство подмножеств, топология очановского типа, кардинальные инварианты..

В статье все пространства считаем хаусдорфовыми. $\mathcal{P}^*(X)$ обозначает семейство всех (включая пустое) подмножеств пространства X. $\exp^*_{<\aleph_0} X$ обозначает все конечные подмножества пространства X, а через $\exp^*_{\leqslant\aleph_0} X$ все счетные подмножества X.

Для $M \subset \mathcal{P}^*(X)$ определяем топологию при помощи базы $\{[A, B]_{\mathcal{M}}\colon A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ некоторые семейства подмножеств замкнутые относительно конечных объединений. Множество $[A, B]_{\mathcal{M}} = \{(P)\colon (P) \in M$ и $P \subset A$ и $P \cap B = \varnothing\}$. Топологии подобного типа первые рассматривались Ю. С. Очаном, а позже в общем виде Р. Кашубой.

Некоторые простейшие взаимосвязи кардинальных инвариантов пространства конечных подмножеств отражает нижеследующее предложение.

Утверждение 1. *Пусть пространство* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *наделено некоторой* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *– топологией. Тогда*: $d(\exp^*_{<\aleph_0} X) = n\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X) = |X|$, $\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \pi\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$, $\pi\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$.

Доказательство. Докажем, что плотность $d(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ равна $|X|$ – мощности пространства X. Так как $|\exp^*_{<\aleph_0} X| = |X|$, то $|X| \geqslant d(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Предположим, что $M \subset \exp^*_{<\aleph_0} X$ некоторое всюду плотное подпространство. Подмножества вида $[\{x\}, \varnothing]$ открыты в $\exp^*_{<\aleph_0} X$ для каждого $x \in X$, следовательно, для каждого $x \in X$ найдется $(M) \in \mathcal{M}$, чтобы $x \in M$. Тогда $X = \cup\{M\colon (M) \in \mathcal{M}\}$. Ввиду конечности подмножеств $\mathcal{M}$, заключаем, что $d(\exp^*_{<\aleph_0} X) \geqslant |X|$. В сумме получаем: $d(\exp^*_{<\aleph_0} X) = |X|$. Так как сетевой вес пространства всегда содержится между плотностью и мощностью пространства, то справедливы и следующие равенства: $d(\exp^*_{<\aleph_0} X) = n\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X) = |X|$.

Докажем теперь, что характер $\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ равен π – характеру $\pi\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Сначала заметим, что π – характер в точке всегда не превышает характера в этой точке. Пусть $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$ и $\pi\beta = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$ некоторая π – база точки (P) в $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Тогда $\beta = \{[P, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$ локальная база точки (P). Действительно, если $[P, B]$ некоторая базисная окрестность точки (P), то найдется подмножество $[A_\alpha, B_\alpha] \in \pi\beta$, чтобы $[A_\alpha, B_\alpha] \subset [P, B]$, но тогда и $[P, B_\alpha] \subset [A, B]$, причем $[P, B_\alpha] \in \beta$. По π – базе в точке (P) мы построили локальную базу β этой точки, причем $|\pi\beta| \geqslant |\beta|$. Предположив, что $|\pi\beta| = \pi\chi(P)$ в $\exp^*_{<\aleph_0} X$, получаем, что характер в точке (P) не превосходит π – характера, а следовательно, они равны. Ввиду произвольности точки $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$ заключаем, что $\pi\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \chi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$.

Докажем, что π – вес $\pi\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ равен его весу $\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Пусть $\pi\mathcal{B} = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$ π – база пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$, состоящая из базисных множеств и $|\pi\mathcal{B}| = \pi\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Семейство $\beta\mathcal{B}$, состоящее из всевозможных подмножеств вида $[E, B_\alpha]$, где $E \in C_0(A_\alpha)$, $\alpha \in I$ является базой пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$, причем $|\pi\mathcal{B}| \geqslant |\beta\mathcal{B}|$. Докажем, что $\beta\mathcal{B}$ – база пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Пусть $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$ и $[P, D]$ некоторая окрестность точки (P) ($[P, D]$, принадлежит стандартной базе $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – топологии). Найдется $[A_\alpha, B_\alpha] \in \pi\beta$, чтобы $[A_\alpha, B_\alpha] \subset [P, D]$, но тогда $[P, B_\alpha] \subset [P, D]$ и $[P, B_\alpha] \in \beta\mathcal{B}$. Следовательно, $\beta\mathcal{B}$ действительно база пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ и $|\beta\mathcal{B}| \leqslant \pi\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$, а следовательно, $\pi\omega(\exp^*_{<\aleph_0} X) \geqslant \omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Так как π – вес пространства всегда не превышает его веса, заключаем, что $\pi\omega(\exp^* X) = \omega(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Предложение доказано. $\square$

Свойства пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$, наделенного очановской топологией, определяется подмножествами семейства $\mathcal{B}$. В оценках числа Линделефа и числа Суслина пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ большую роль играет мощность подмножеств семейства $\mathcal{B}$.

Теорема 1. *Пусть пространство* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *наделено некоторой* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – *топологией. Обозначим* $\tau = \sup\{|B|{:}]B \in \mathcal{B}\}$. *Тогда*: (i) *число Линделефа* $l(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \tau$, (ii) *число Суслина* $c(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ *пространства* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *не превосходит* 2^τ.

Доказательство. Докажем, что выполнено свойство (i). Каждому подмножеству $B \in \mathcal{B}$ соответствует замкнутое дискретное подпространство $\{(b)\colon b \in B\}$ пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$, поэтому $\tau \leqslant l(\exp^*_{<\aleph_0} X)$. Докажем, что $l(\exp^*_{<\aleph_0} X) \leqslant \tau$. Для этого докажем, что $l(\exp^*_{\leqslant n} X) \leqslant \tau$ для всех $n \in \mathtt{N}$ ($\exp^*_{\leqslant n} X$ рассматриваем как подпространство $\exp^*_{<\aleph_0} X$). Рассмотрим пространство $X^* = X \cup \{\beta\}$ с топологией, в которой открыты все подмножества X и те подмножества $Y \subset X^*$, содержащие точку β, для которых: $|X^* \backslash Y| \leqslant \tau$ (т.е. X^* одноточечная τ – финальная компактификация дискретного пространства). Заметим, что для любой степени $(X^*)^n$ пространства X^*, где $n \in \mathtt{N}$, выполнено $l((X^*)^n) \leqslant \tau$. Определим отображение $h_n\colon (X^*)^n \to \exp^*_{\leqslant n} X$ формулой: $h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\{x_i\colon x_i \neq \beta,\ i = 1, \ldots, n\})$ для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in (X^*)^n$, заметим, что $h_n(\beta, \beta, \ldots, \beta) = (\varnothing)$. Отображение h_n непрерывно. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (X^*)^n$ и $h_n(x_1, \ldots, x_n) = (P)$.

Предположим, что $\mathcal{U} = [A, B]$ некоторая базисная окрестность (P). Обозначим $\mathcal{V} = O_1 \times O_2 \times O_n$, где $O_i = \{x_i\}$, если $x_i \neq \beta$ и $O_i = X^* \setminus B$ если $x_i = \beta$. Открытое подможетво $\mathcal{V} \subset (X^*)^n$ является окрестностью $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $h_n(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Ввиду произвольности окрестности $\mathcal{U}$, отображение h_n непрерывно в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ввиду произвольности точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заключаем, что отображение h_n непрерывно. Отображение h_n является отображением "на". Следовательно, $l(\exp^*_{\leqslant n} X) \leqslant \tau$. Так как пространство $\exp^*_{\leqslant \aleph_0} X$ можно исчерпать подпространствами $\{\exp^*_{\leqslant n} X\colon n \in \mathtt{N}\}$ и $l(\exp^*_{\leqslant n} X) \leqslant \tau$ для каждого $n \in \mathtt{N}$, заключаем, что $l(\exp^*_{<\aleph_0} X) \leqslant \tau$. Так как $\tau \leqslant l(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ получаем $l(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \tau$.

Докажем, что выполнено условие (ii). Пусть $\mathcal{J} = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$ некоторое семейство базисных попарно непересекающихся подмножеств пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Докажем, что $|\mathcal{J}| \leqslant 2^\tau$. Сперва рассмотрим частный случай, когда $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, если $\alpha \neq \beta$ для всех $\alpha, \beta \in I$. Предположим, что $|\mathcal{J}| > 2^\tau$. Можем считать, что $|\mathcal{J}| = (2^\tau)^+$. Выделим из $\mathcal{J}$ подсемейство $\mathcal{J}' = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in I'\}$ мощности 2^τ. Обозначим $M = \cup\{B_\alpha\colon \alpha \in I'\}$ и $I^* = \{\alpha\colon A_\alpha \cap M = \varnothing,\ \alpha \in I\}$. Так как подмножества A_α, $\alpha \in I$ попарно не пересекаются и $|M| \leqslant 2^\tau$, то множество I^* не пусто ($|I^*| = (2^\tau)^*$). Пусть $\gamma \in I^*$. Так как $A_\gamma \cap B_\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in I'$, множество $[A_\gamma, B_\gamma]$ не пересекается с каждым из подмножество семества $\mathcal{J}'$, только в том случае, если $B_\gamma \cap A_\alpha \neq \varnothing$ для всех $\alpha \in I'$ (два интервала $[C, D]$ и $[E, F]$ не пересекаются, когда либо $C \cap F \neq \varnothing$, либо $E \cap D \neq \varnothing$), но тогда $|B_\gamma| = 2^\tau$. С другой стороны, $B_\gamma \in \tau$ и мощность B_γ, по предположению теоремы, не превышает τ. Получаем противоречие с предположением относительно того, что $\mathcal{J}$ семейство попарно непересекающихся базисных множеств мощности $(2^\tau)^+$. Следовательно, $|\mathcal{J}| \leqslant 2^\tau$.

Пусть теперь $\mathcal{J} = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$ произвольное семейство попарно нересекающихся базисных подмножеств. Обозначим $A = \cap\{A_\alpha\colon \alpha \in I\}$. Если $A = \varnothing$, предположив, что $|\mathcal{J}| = (2^\tau)^+$, мы могли бы выделить подсемейство $\tilde{\mathcal{J}} = \{[A_\alpha, B_\alpha]\colon \alpha \in \tilde{I}\}$ семейства $\mathcal{J}$, такой же мощности (т.е. $|\tilde{\mathcal{J}}| = (2^\tau)^+$, чтобы $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$, для всех $\alpha, \beta \in I$ и $\alpha \neq \beta$). Последнее, ввиду доказанного выше, противоречило бы тому, что $|B_\alpha| \leqslant \tau$ для всех $\alpha \in I$. Следовательно, $|\mathcal{J}| \leqslant 2^\tau$. Если $A \neq \varnothing$, тогда $\mathcal{J}$ состоит из попарно непересекающихся подмножеств тогда и только тогда, когда из попарно непересекающихся базисных подмножеств состоит семейство $\mathcal{J} = \{[A_\alpha \setminus A, B_\alpha]\colon \alpha \in I\}$. Так как $\cap\{A_\alpha \setminus A\colon \alpha \in I\} = \varnothing$, применив только что доказанное выше к семейству $\mathcal{J}$, получаем: $|\mathcal{J}| \leqslant 2^\tau$ и, так как $|I| = |\mathcal{J}|$, получаем, что $|I| \leqslant 2^\tau$. Свойство доказано. Теорема доказана. □

Следствие 1. Пусть пространство $\exp^*_{<\aleph_0} X$ наделено некоторой очановской топологией, тогда: $c(\exp^*_{<\aleph_0} X) \leqslant 2^{l(\exp^*_{<\aleph_0} X)}$.

Перед тем, как формулировать нижеследующее предложение, напомним, что диагональное число $\Delta(Y)$ пространства Y есть псевдохарактер $\Psi(D(Y), Y \times Y)$ диагонали $D(Y) = \{(y, y)\colon y \in Y\}$ в пространстве $Y \times Y$.

Утверждение 2. *Пусть пространство* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *наделено некоторой* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – *топологией. Псевдохарактер* $\Psi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ *пространства* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *счетен тогда и только тогда, когда диагональное число* $\Delta(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ *счетно.*

Доказательство. Диагональное число пространства счетно тогда и только тогда, когда пространство обладает счетным T_1 – измельчением (т.е. сущетвует счетное семейство $\mathcal{E}$ открытых покрытий пространства, чтобы для каждой точки x пространства имело место: $\cap\{\gamma(x)\colon \gamma \in \mathcal{E}\} = \{x\}$, где $\gamma(x)$ означает звезду точки x относительно покрытия $\gamma \in \mathcal{E}$). Поэтому нам достаточно доказать, что псевдохарактер пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ счетен тогда и только тогда, когда $\exp^*_{<\aleph_0} X$ обладает счетным T_1 – измельчением.

Пусть $\Psi(\exp^*_{<\aleph_0} X) = \aleph_0$ и $\psi\beta((P)) = \{\mathcal{U}_n((P))\colon n \in \mathtt{N}\}$ счетная псевдобаза точки (P), состоящая из базисных множеств $U_n((P)) = [A_n, B_n]$, для всех $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$. Можем считать, что $A_n = P$ и $B_n \subset B_{n+1}$ для всех $n \in \mathtt{N}$. Обозначим $\gamma_n\{U_n((P))\colon (P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X\}$. Для каждого $n \in \mathtt{N}$ семейство γ_n является открытым покрытием пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Заметим, что каждое покрытие γ_{n+1} вписано в γ_n. Счетное семейство покрытий $\mathcal{E} = \{\gamma_n\colon n \in \mathtt{N}\}$ является T_1 – измельчением. Докажем это. Пусть $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$. Так как покрытие γ_{n+1} вписано в покрытие γ_n для всех $n \in \mathtt{N}$, то звезда $\gamma_{n+1}((P))$ точки (P) относительно γ_{n+1} содержится в $\gamma_n((P))$ для всех $n \in \mathtt{N}$. В силу выбора покрытий γ_n, точка (P) принадлежит лишь конечному числу подмножеств из этого покрытия. Пусть (D) некоторая точка пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Предположим, $D \setminus P \neq \varnothing$. Для каждой точки $(F) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$, такой, что $F \subset P$, найдется $m = m((F)) \in \mathtt{N}$, чтобы $B_m \cap D \neq \varnothing$. Пусть $m^* = \max\{m((F))\colon F \subset P\}$, тогда $(D) \notin \gamma_{m^*}((P))$. Если теперь $D \subsetneq P$, то для каждой точки $(L) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$, такой, что $L \subset D$, найдется $k = k((L)) \in \mathtt{N}$, чтобы $B_k \cap P \neq \varnothing$. Пусть $k^* = \max\{k((L))\colon L \subset D\}$, тогда $(D) \notin \gamma_{k^*}((P))$. Следовательно, $\cap\{\gamma_n((P))\colon n \in \mathtt{N}\} = \{(\mathtt{P})\}$. Ввиду произвольности точки (P) заключаем, что $\mathcal{E}$ T_1 – измельчение.

Пусть теперь $\mathcal{E} = \{\gamma_n\colon n \in \mathtt{N}\}$ некоторое счетное T_1 – измельчение. По определению, для каждой точки $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$ имеем: $\cap\{\gamma_n((P))\colon n \in \mathtt{N}\} = \{(\mathtt{P})\}$, а следовательно, $\gamma_n((P))\colon n \in \mathtt{N}$ счетная псевдобаза точки (P) в $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Следовательно, псевдохарактер $\Psi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ счетен. Предложение доказано. $\square$

Напомним, что счетное семейство открытых покрытий $\mathcal{E}$ называет ся измельчением, если для каждой точки пространства x и любой ее окрестности O_x найдется покрытие $\gamma \in \mathcal{E}$, чтобы $\gamma(x) \subset O_x$.

Утверждение 3. *Пусть пространство* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *наделено некоторой* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – *топологией. Тогда характер* $\chi(\exp^*_{<\aleph_0} X)$ *пространства* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *счетен тогда и только тогда, когда пространство* $\exp^*_{<\aleph_0} X$ *обладает счетным измельчением.*

Доказательство. Предположим, что характер пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ счетен. Пусть $\chi_\beta((P)) = \{O_n((P))\colon n \in \mathtt{N}\}$ для каждой точки $(P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X$, является счетной локальной базой этой точки. Не ограничивая общности, можем считать, что $O_n((P)) = [A_n, B_n]$ где $[A_n, B_n]$ некоторая стандартная базисная окрестность точки (P), $A_n = P$ и $B_n \subset B_{n+1}$ для всех $n \in \mathtt{N}$. Обозначим $\gamma_n = \{O_n((P))\colon (P) \in \exp^*_{<\aleph_0} X\}$. Семейство открытых покрытий $\mathcal{E} = \{\gamma_n\colon n \in \mathtt{N}\}$ является измельчением. Докажем это. Пусть $(P) \in \exp^* X$ и $[A, B]$ некоторая ее окрестность, принадлежащая стандартной базе пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Если A не пусто, то для каждого $F \subset P$, $F \not\supset A$ найдется $m = m((F)) \in \mathtt{N}$, чтобы: $B_n \cap P \neq \varnothing$. Обозначим $m^* = \max\{m((F))\colon F \subset P,\ F \not\supset A\}$. Если $A = \varnothing$, то пусть $m^* = 1$. Для каждого $F \subset P$, $A \subset F$ найдется $k = k((F)) \in \mathtt{N}$, чтобы

$B_k \supset B$. Обозначим $k^* = \max\{k((F)) \colon A \subset F \subset P\}$. Пусть $r = \max\{m^*, k^*\}$. Тогда $\gamma_r((P)) \subset [A, B]$. В силу произвольности выбора точки (P) заключаем, что $\mathcal{E}$ действительно является измельчением, причем $\mathcal{E}$ счетно.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ некоторое счетное измельчение пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$. Тогда каждая точка (P) в $\exp^*_{<\aleph_0} X$ обладает счетной локальной базой: $\{\gamma((P)) \colon \gamma \in \mathcal{E}\}$. Следовательно, характер пространства $\exp^*_{<\aleph_0} X$ счетен. Предложение доказано. □

Список литературы

[1] R. Engelkin. *General topology.* Warszawa, 1978.

[2] R. Kasuba. The generalized Ochan topology in sets of subsets and topological Boolean rings. *Math. Nachr.*, **97**:47–56, 1980.

[3] А.В. Архангельский. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. *УМИ*, **35**:29–84, 1978.

[4] Ю.С. Очан. Пространство подмножеств топологического пространства. *Докл. АН СССР*, **32**(2):107–109, 1941.

SUMMARY

On cardinal invariants of space of finite subsets
G. Praninskas

In article some cardinal invariants of the space of finite subsets are examined. We obtained that such cardinal invariants us density and network weight, character and π – character, π – weight and weight coincide for any $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – topology (Proposition 1). Also we obtained estimates of space of the finite subset of Lindelioft number and Suslin's number (Theorema 2). Also is proved that for the space of finite subsets pseudocharacter is countable than and if than it's diagonal number is countable for any $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – topology (Proposition 4). Characterization when space of finite subsets has countable character is given (Proposition 5).

Keywords: Topological space, space of subsets, Ochan type topology, cardinal invariants.

REZIUMĖ

Apie baigtinių poaibių erdvės kardinalinius invariantus
G. Praninskas

Straipsnyje nagrinėjami kai kurie erdvės baigtinių poaibių erdvės kardinaliniai invariantai. Gautas rezultatas, kad tokie kardinaliniai invariantai kaip tankis ir tinklų svoris, charakteris ir π – charakteris, π – svoris ir svoris sutampa bet kokiai $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ – topologijai (Teiginys 1). Taip pat gavome baigtinių poaibių erdvės Lindeliofo ir Suslino skaičiaus įverčius (Teorema 2). Taip pat įrodėme, kad baigtinių poaibių erdvė su $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ - topologija turi skaitų pseudocharakterį, kada jos diagonalinis skaičius skaitus (Teiginys 4). Taip pat gauta charakteristika, kada baigtinių poaibių erdvė turi skaitų charakterį (Teiginys 5).

Raktiniai žodžiai: Topologinė erdvė, poaibių erdvė, Očano tipo topologija, kardinaliniai invariantai.