

Aukštesnių eilių glaustiniai hiperpaviršiai

Kazimieras Navickis

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas
Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius
E. paštas: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjami n -matės Euklido erdvės hiperpaviršiaus aukštesnių eilių glaustiniai hiperpaviršiai. Tai leidžia nagrinėti duotojo hiperpaviršiaus geometrines savybes jo taško aukštesnių eilių diferencialinėse aplinkose.

Raktiniai žodžiai: hiperpaviršius, glaustinis hiperpaviršius.

Tarkime, kad S – hiperpaviršius n -matėje Euklido erdvėje. Hiperpaviršių S galima apibrėžti išreikštine lygtimi, neišreikštine lygtimi arba parametrinėmis lygtimis.

1 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas išreikštine lygtimi $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_p = 1, \dots, n - 1)$

$$S: x^n = f^n(x^\alpha), \quad (1)$$

funkcija f^n yra tolydinė ir turi tolydines dalines išvestines taške (x_0^α) iki eilės $r + 1$; $r \in \mathbb{N}$.

Pažymėkime

$$\vec{r} = \{x^1; x^2; \dots; x^{n-1}; f^n(x^\alpha)\},$$
$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\alpha}.$$

Nuo vektorių sistemos $\{\vec{r}_\alpha\}$ pereikime prie kitos vektorių sistemos $\{\vec{a}_\alpha\}$ pagal formules

$$\vec{a}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\alpha} \lambda_{\alpha\beta} \vec{r}_\beta,$$

reikalaudami, kad vektoriai \vec{a}_α būtų vienas kitam ortogonalūs. Pažymėkime

$$g_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{r}_\beta,$$
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1\alpha} \\ g_{12} & g_{22} & \dots & g_{2\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & \dots & g_{\alpha\alpha} \end{pmatrix},$$
$$G_\alpha = \det(M_\alpha),$$
$$a_{\alpha\alpha} = \vec{r}_\alpha \cdot \vec{a}_\alpha.$$

Kadangi šiuo atveju yra taikomas Gramo–Šmidto ortogonalizacijos procesas, tai dydžius $\lambda_{\alpha\beta}$ randame iš lygčių sistemų

$$(\lambda_{\alpha 1} \lambda_{\alpha 2} \dots \lambda_{\alpha \alpha}) \cdot M_{\alpha} = (00 \dots a_{\alpha \alpha}).$$

Jei $G_{\alpha\beta}^{(\alpha)}$ yra elemento $g_{\alpha\beta}$ adjunktas determinante G_{α} , tai

$$\vec{a}_{\alpha} = \frac{a_{\alpha\alpha}}{G_{\alpha}} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G_{\alpha\beta}^{(\alpha)} \vec{r}_{\beta}.$$

Vektoriai

$$\vec{E}_{\alpha} = \frac{\vec{a}_{\alpha}}{|\vec{a}_{\alpha}|} = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha-1} \cdot G_{\alpha}}} \sum_{\beta=1}^{\alpha} G_{\alpha\beta}^{(\alpha)} \vec{r}_{\beta}$$

sudaro hiperpaviršiaus S liečiamosios hiperplokštumos ortonormuotą bazę. Hiperpaviršiaus S normalės vektorius

$$\vec{N} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n-1}] = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \dots & \vec{i}_{n-1} & \vec{i}_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & f_1^n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & f_{n-1}^n \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \{f_{\alpha}^n; -1\},$$

čia

$$f_{\alpha}^n = \frac{\partial f^n}{\partial x^{\alpha}},$$

$\{\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n\}$ – standartinė Euklido erdvės bazė. Normalės vektoriaus \vec{N} ilgis

$$|\vec{N}| = \sqrt{1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} (f_{\alpha}^n)^2} = \sqrt{G_{n-1}}.$$

Pažymėkime

$$\vec{E}_n = \frac{\vec{N}}{\sqrt{G_{n-1}}}.$$

Vektorių sistema $\{\vec{E}_i\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) sudaro n -matės Euklido erdvės ortonormuotą bazę hiperpaviršiaus S taške (x^i) .

Hiperpaviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0^i)$ aplinkoje; čia $x_0^n = f^n(x_0^{\alpha})$. Vektoriinių funkcijų \vec{E}_i reikšmes taške M_0 žymėsime \vec{e}_i :

$$\vec{e}_i = l_i^j \vec{i}_j.$$

Matrica

$$R = (l_j^i)$$

yra ortogonalioji. Bet kurio n -matės Euklido erdvės taško $M(x^i)$ koordinatės bazės $\{\vec{e}_i\}$ atžvilgiu žymėsime y^i . Tada

$$x^i = x_0^i + l_j^i y^j. \quad (2)$$

Hiperpaviršiaus S lygtis, atlikus (2) koordinačių transformaciją, bus tokia:

$$S: h(y^i) \equiv f^n(x_0^\alpha + l_i^\alpha y^i) - (x_0^n + l_i^n y^i) = 0. \tag{3}$$

Funkcijos h dalinių išvestinių

$$h_i = \frac{\partial h}{\partial y^i}, \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \dots$$

reikšmes taške M_0 žymėsime b_i, b_{ij}, \dots . Kadangi

$$b_\alpha = 0, \quad b_n = -\sqrt{G_{n-1}(M_0)} \neq 0,$$

tai lygtis $S: h(y^i) = 0$ apibrėžia funkciją

$$y^n = H^n(y^\alpha).$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \frac{\partial^p H^n}{\partial y^{\alpha_1} \dots \partial y^{\alpha_p}}, \\ c_{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(M_0), \\ A_\alpha^n &= \frac{\partial y^n}{\partial y^\alpha}. \end{aligned}$$

Diferencialinių operatorių

$$\partial_\alpha^\# = \partial \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + A_\alpha^n \frac{\partial}{\partial y^n} \tag{4}$$

pagalba apibrėžkime naujus diferencialinius operatorius

$$\partial_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\# = \partial_{\alpha_p}^\# \circ \dots \circ \partial_{\alpha_1}^\#.$$

Pažymėkime

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \partial_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\# h.$$

Dydžius $c_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ randame rekurentiškai iš lygčių sistemos

$$H_{\alpha_1 \dots \alpha_p} |_{c_\beta=0} = 0,$$

t.y. iš sistemos

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta} + b_n c_{\alpha\beta} = 0, \\ b_{\alpha\beta\gamma} + 3c_{(\alpha\beta} b_{\gamma)n} + c_{\alpha\beta\gamma} b_n = 0, \\ b_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + 6c_{(\alpha\beta} b_{\gamma\varepsilon)n} + 4c_{(\alpha\beta\gamma} b_{\varepsilon)n} + 3c_{(\alpha\beta} c_{\gamma\varepsilon)} b_{nn} + c_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} b_n = 0, \\ \dots \end{cases} \tag{5}$$

p -formos ($p \geq 2$)

$$\varphi_p = \frac{1}{p!} c_{\alpha_1 \dots \alpha_p} y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_p} \tag{6}$$

leidžia apibrėžti r -osios eilės hiperpaviršių

$$O_{M_0}^{(r)}(S): y^n = \sum_{a=2}^r \varphi_a, \quad (7)$$

kuris turi r -osios eilės kontakta taške M_0 su duotuoju hiperpaviršiumi S . Todėl ši hiperpaviršių vadinsime hiperpaviršiaus S r -osios eilės glaustiniu hiperpaviršiumi. Jo savybės leidžia nagrinėti paties hiperpaviršiaus S geometrines savybes.

2 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas neišreikštine lygtimi

$$S: F(x^i) = 0 \quad (8)$$

ir taškas $M_0(x_0^i) \in S$ yra toks, kad

$$F_n(M_0) = \left. \frac{\partial F}{\partial x^n} \right|_{M_0} \neq 0.$$

Tada tam tikroje taško M_0 aplinkoje hiperpaviršius S aprašomas (1) lygtimi ir

$$f_\alpha^n = -\frac{F_\alpha}{F_n}. \quad (9)$$

Funkcijos f^n aukštesnių eilių dalinės išvestinės gaunamos taikant diferencialinius operatorius

$$\mathcal{D}_\alpha^\# = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + f_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \quad (10)$$

Pažymėkime

$$F_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial^p F}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}},$$

$$d_{i_p \dots i_1} = F_{i_1 \dots i_p}(M_0),$$

čia $i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n; p = 1, 2, \dots$

Taške $M_0 \in S$ turime ortonormuotą bazę $\{\vec{e}_i\}$. Taikydami (2) koordinacių transformaciją (1) lygčiai, gauname (3) hiperpaviršiaus lygtį. Matome, kad glaustinio hiperpaviršiaus $O_{M_0}^{(r)}(S)$ radimui galime taikyti 1 atveju gautas formules.

3 atvejis. Tarkime, kad hiperpaviršius S apibrėžtas parametrinėmis lygtimis

$$S: x^i = x^i(u^\alpha), \quad (11)$$

funkcijos $x^i(u^\alpha)$ yra tolydinės ir turi tolydines dalines išvestines taške $V_0(u_0^\alpha)$ iki eilės $r+2$. Hiperpaviršių S nagrinėsime jo taško $M_0(x_0^i)$ aplinkoje; čia $x_0^i = x^i(V_0)$. Pažymėkime

$$x_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^\beta}, \quad u_\beta^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta},$$

$$\Delta = \det(x_\beta^\alpha).$$

Kadangi

$$x_\gamma^\alpha u_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha, \quad u_\gamma^\alpha x_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha,$$

tai matricos (x_β^α) ir (u_β^α) yra viena kitai atvirkštinės:

$$(u_\beta^\alpha) = (x_\beta^\alpha)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (x_\beta^\alpha),$$

čia x_β^α – elemento x_α^β adjunktas determinante Δ .

Jei $d_n = \Delta(V_0) \neq 0$, tai koordinates u^α galima išspręsti koordinačių x^α atžvilgiu:

$$u^\alpha = u^\alpha(x^\beta).$$

Iš (11) hiperpaviršiaus S lygčių dabar išplaukia, kad jis aprašomas lygtimi

$$S: x^n = x^n(u^\alpha(x^\beta))$$

arba

$$S: x^n = f^n(x^\alpha). \quad (1)$$

Šiuo atveju galima apibrėžti diferencialinius operatorius

$$L_\alpha^\# = u_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta}$$

ir jų kompozicijas $L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^\#$. Iš (1) lygties randame, kad

$$f_\alpha^n = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta},$$

čia $\Delta_\alpha = x_\alpha^\beta \cdot x_\beta^n$. Šiuo atveju

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^n = L_{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}}^\# f_{\alpha_p}^n.$$

Šitaip glaustinio hiperpaviršiaus $O_{M_0}^{(r)}(S)$ radimas aptariamam atveju yra suvestas į 1 atvejų gautų formulių taikymą.

Literatūra

- [1] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

SUMMARY

Osculating hypersurfaces of higher order

K. Navickis

Osculating surfaces of second order have been studied in classical differential geometry [1]. In this article we generalize this notion to osculating hyper-surfaces of higher order of hyper-surfaces in Euclidean n -space. Various related results are obtained using the derivatives of higher order.

Keywords: hypersurface, osculating hypersurface.