LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS, 2019
Lietuvos matematikų draugijos darbai, serija B
https://doi.org/10.15388/LMR.B.2019.15232

ISSN 0132-2818
eISSN 2335-898X
60 tomas, 28–33

# Aukštesniųjų laipsnių lygtys

**Juozas Juvencijus Mačys**

*Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas*
Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt

**Santrauka.** Nagrinėjama sudėtinga dviejų lygčių sistema. Sprendžiant paliečiama visa aukštesniųjų laipsnių lygčių teorija. Aptariami panašių uždavinių sprendimo būdai.

**Raktiniai žodžiai:** lygčių sistemos, aukštesniųjų laipsnių lygtys, sveikieji sprendiniai, racionalieji sprendiniai, realieji sprendiniai.

2019 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiada įvyko Klaipėdoje kovo 23 dieną. Olimpiados uždavinius ir jų sprendimus galima rasti [1].

Šiame straipsnyje nagrinėjamas sunkiausias olimpiados uždavinys, kurį sprendė 11–12 klasių mokiniai. Jį išspręsti pavyko vos dviem dalyviams, ir tai visiškai atitiko vertinimo komisijos prognozes, kad uždavinys padės nustatyti nugalėtojus ir jų pasirengimo lygį. Štai tas uždavinys.

*Duota lygčių sistema*

$$x^2 - xy^2 + x + 2 = 0, \tag{1}$$
$$2y - x^2y - 14x = 0. \tag{2}$$

a) *Nurodykite bent vieną jos sprendinį.*
b) *Raskite visus jos sprendinius.*

Spręsdami uždavinį, susiduriame su aukštesniųjų laipsnių (trečiojo, ketvirtojo ir aukštesnių) lygtimis. Straipsnyje pateikiama įvairiausių uždavinio sprendimo būdų, ir iš esmės aptariama visa aukštesniųjų laipsnių lygčių teorija (plačiau ji išdėstyta [2]).

**Pirmas būdas.** Pradėkime nuo paties mokiniškiausio būdo: iš vienos lygties kurį nors kintamąjį išsireikškime kitu, o gautą išraišką įstatykime į kitą lygtį.

Matome, kad paprasčiausia iš (2) lygties ygreką išsireikšti iksu:

$$y\left(2 - x^2\right) = 14x.$$

Kad įstatant $y$ nebūtų trupmenų, (1) lygtį iš karto dauginame iš $(2-x^2)^2$:

$$\begin{gathered}(x^2+x+2)(2-x^2)^2 - xy^2(2-x^2)^2 = 0,\\ (x^2+x+2)(2-x^2)^2 - x\cdot 196x^2 = 0.\end{gathered}$$

Sutvarkę turime lygtį

$$x^6+x^5-2x^4-200x^3-4x^2+4x+8=0. \tag{3}$$

Lygtis neturi racionaliųjų sprendinių, ir išskaidyti ją nelengva. Todėl atidėkime ją kuriam laikui.

**Antras būdas.** Natūraliai kyla mintis pabandyti iksą išsireikšti ygreku. Deja, abi lygtys (1) ir (2) kvadratinės $x$ atžvilgiu, taigi jas sprendžiant atsiras radikalų, o juos naikinant reikės kelti kvadratu, ir lygtį gausime dar aukštesnio laipsnio. Bet išeitį rasti paprasta: iš (1) lygties $x^2$ išsireiškiame iksais ir ygrekais ir įstatome į (2) lygtį, – dėmenų su $x^2$ nebebus, ir galėsime išsireikšti $x$:

$$\begin{gathered}x^2 = xy^2-x-2,\\ 2y-(xy^2-x-2)y-14x=0,\\ x(y^3-y+14)=4y. \qquad (4)\end{gathered}$$

Dabar galima rasti ikso išraišką ygrekais ir statyti ją, pavyzdžiui, į (1) lygtį. Bet vėl galima išvengti trupmenų, padauginus (4) lygtį iš $(y^3-y+14)^2$:

$$\begin{gathered}x^2(y^3-y+14)^2 + (1-y^2)x(y^3-y+14)(y^3-y+14) + 2(y^3-y+14)^2 = 0,\\ 16y^2 + 4y(1-y^2)(y^3-y+14) + 2(y^3-y+14)^2 = 0,\\ 8y^2 + (y^3-y+14)(2y-2y^3+y^3-y+14) = 0,\\ 8y^2 - (y^3-y+14)(y^3-y-14) = 0,\\ 8y^2 - (y^3-y)^2 + 14^2 = 0, \qquad (5)\\ y^6-2y^4-7y^2-196=0.\end{gathered}$$

Pažymėję $y^2=z$, turime trečiojo laipsnio lygtį

$$z^3-2z^2-7z-196=0.$$

Visa kubinių lygčių sprendimo teorija išdėstyta [2], bet čia jos neprireiks. Ieškome racionaliųjų sprendinių (jie būtinai sveikieji). Kadangi $196 = 2^2\cdot 7^2$, tai, nagrinėdami šio skaičiaus daliklius, greitai aptinkame sprendinį $z=7$, o tada kairę pusę išskaidome, išskirdami daugiklį $z-7$:

$$\begin{aligned}z^3-2z^2-7z-196 &= z^3-7z^2+5z^2-35z+28z-7\cdot 28\\ &= z^2(z-7)+5z(z-7)+28(z-7)\\ &= (z-7)(z^2+5z+28).\end{aligned}$$

Lygtis $z^2+5z+28=0$ sprendinių neturi, nes diskriminantas neigiamas, taigi $z=7$. Grįžtame prie ygreko: $y^2=7$, $y=\pm\sqrt{7}$.

Dabar galima imti $y=\sqrt{7}$ ir iš (4) lygties rasti $x$, tada tą patį padaryti su $y=-\sqrt{7}$. Bet kadangi $y^2$ mums patogesnis už $y$, tai (4) lygtį dauginame iš $y$, o $y^2$ keičiame į 7:

$$\begin{gathered}x\bigl(y^4-y^2+14y\bigr)=4y^2,\\ x\bigl(49-7+14y\bigr)=28,\\ x(42+14y)=28,\\ x(3+y)=2.\end{gathered}$$

Vėl mums kairėje pusėje patogesnis $y^2$, todėl daugimane abi puses iš $3-y$:

$$\begin{gathered}x\bigl(9-y^2\bigr)=2(3-y),\\ x(9-7)=2(3-y),\\ x=3-y.\end{gathered}$$

Dabar jau aišku: kai $y=\sqrt{7}$, tai $x=3-\sqrt{7}$, o kai $y=-\sqrt{7}$, tai $x=3+\sqrt{7}$. Abu sprendiniai tinka.

*Atsakymas.* Du sprendiniai: $(3-\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(3+\sqrt{7};-\sqrt{7})$.

**Trečias būdas.** Eliminuoti $x$ galima kitaip. (1) lygtį dauginame iš $y$:

$$\begin{gathered}x^2y-xy^3+xy+2y=0,\\ 2y-x^2y-14x=0.\end{gathered}$$

Sudėjus vėl išnyksta $x^2$, ir galima išsireikšti $x$:

$$4y-xy^3-14x=0,\qquad x\bigl(y^3-y+14\bigr)=4y.$$

Atėmus – taip pat:

$$2x^2y-xy^3+xy+14x=0,\qquad 2xy-y^3+y+14=0.$$

Suvienodiname gautose lygtyse koeficientus prie $x$:

$$\begin{gathered}2xy\bigl(y^3-y+14\bigr)=8y^2,\\ 2xy\bigl(y^3-y+14\bigr)=\bigl(y^3-y-14\bigr)\bigl(y^3-y+14\bigr).\end{gathered}$$

Vadinasi,

$$\begin{gathered}8y^2=\bigl(y^3-y-14\bigr)\bigl(y^3-y+14\bigr),\\ 8y^2=\bigl(y^3-y\bigr)^2-14^2.\end{gathered}$$

Bet tai faktiškai jau turėta (5) lygtis! Išspręskime dabar ją kitaip.

Dalykime ją iš $y^2$ (dalyti galima, nes nei $x$, nei $y$ nelygūs 0: jeigu $x=0$, (1) lygtis tampa $2=0$, – prieštara; jeigu $y=0$, tai iš (2) lygties $x=0$, – prieštara):

$$\bigl(y^2-1\bigr)^2-\frac{14^2}{y^2}=8. \tag{6}$$

Jeigu $0 < y^2 \leq 1$, tai kairė pusė mažesnė už $1 - 14^2 < 0$. Jeigu $y^2 \geq 1$, tai $y^2$ didėjant, kairė pusė didėja (nuo $-14^2$ iki $+\infty$). Vadinasi, lygtis $y^2$ atžvilgiu turi vienintelį sprendinį. Jį nesunku apčiuopti: $(y^2-1)^2 > 8$, $y^2 - 1 > \sqrt{8}$, $y^2 > \sqrt{8}+1$, $y^2 > 3$. Kai $y^2 = 6$, tai kairė pusė $(6-1)^2 - \frac{14^2}{6} = 25 - \frac{98}{3}$ dar neigiama, o kai $y^2 = 7$, tai $(7-1)^2 - \frac{14^2}{7} = 36 - 4 \cdot 7 = 8$.

Taigi $y^2 = 7$, o toliau kaip antrame būde. Beje, sprendinių galima netikrinti įsitikinus, kad spręsdami sistemą ją pertvarkėme ekvivalenčiai. Bet nėra sunku juos patikrinti ir tiesiogiai. Pavyzdžiui, jei $x = 3 - \sqrt{7}$, $y = \sqrt{7}$, tai (1) ir (2) lygtys virsta lygybėmis:

$$\begin{aligned} x^2 - xy^2 + x + 2 &= x\bigl(x - y^2 + 1\bigr) + 2 = (3-\sqrt{7})(3-\sqrt{7}-7+1)+2 \\ &= (3-\sqrt{7})(-3-\sqrt{7}) + 2 = -(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7}) + 2 \\ &= -(9-7)+2 = 0, \\ 2y - x(xy+14) &= 2\sqrt{7} - (3-\sqrt{7})(3\sqrt{7}+7) = 2\sqrt{7} - \sqrt{7}(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7}) \\ &= 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 0. \end{aligned}$$

**Ketvirtas būdas.** Nebloga ir mintis atskirti kintamuosius – palikti ygrekus kairėje, o iksus nuvaryti į dešinę. Taigi (1) lygtį dalijame iš $x$, o (2) – iš $xy$:

$$y^2 - 1 = x + \frac{2}{x}, \tag{7}$$

$$\frac{14}{y} = \frac{2}{x} - x. \tag{8}$$

Dabar atsikratyti iksų visai paprasta: keliame abi lygtis kvadratu ir atimame vieną iš kitos:

$$\bigl(y^2-1\bigr)^2 - \frac{196}{y^2} = 8.$$

Vėl gavome (6) lygtį. Būtent toks sprendimo būdas pateiktas [1].

Atsikratyti iksų galima ir kitaip: sudėję (7) ir (8) lygtis, turime

$$y^2 - 1 + \frac{14}{y} = \frac{4}{x}, \tag{9}$$

o atėmę –

$$y^2 - 1 - \frac{14}{y} = 2x. \tag{10}$$

Sudauginę paskutines dvi lygtis, vėl gauname (6) lygtį. Ir jau visiškai tas pats sprendimo būdas – išsireikšti $x$ iš bet kurios iš (9) ar (10) lygčių ir įstatyti į kitą. Tai nestebina: ir antro, ir trečio, ir ketvirto būdų esmė – iksų eliminavimas. Beje, aišku, kad (1) lygtį dalyti iš $x$, o (2) iš $xy$ – tai beveik tas pat, kas (1) lygtį dauginti iš $y$, o (2) palikti tą pačią: juk $\frac{1}{x} : \frac{1}{xy} = y : 1$.

**Ir vėl pirmas būdas.** Prisiminkime, kad reikia išspręsti lygtį

$$x^6 + x^5 - 2x^4 - 200x^3 - 4x^2 + 4x + 8 = 0. \tag{3}$$

Pagrindinė algebros teorema realiesiems skaičiams formuluojama taip:

*Kiekvieną $n$-tojo laipsnio polinomą galima išskaidyti į tiesinių ir kvadratinių polinomų sandaugą.*

Tai reiškia, kad kiekvienas $n$-tojo ($n \geqslant 2$) polinomas dalijasi iš kvadratinio polinomo. Beje, išskaidyti trečiojo ir ketvirtojo laipsnio polinomus nesunku (žr. [2]), ir yra net formulės, kaip tai padaryti. O štai penktojo, šeštojo ar aukštesnių laipsnių polinomų skaidymo formulių ar algoritmų nėra, ir lieka tik viltis, kad padaryti tai įmanoma ir be formulių (juk ne šiaip sau duodamas toks uždavinys). Taigi tikimės, kad (3) polinomą (neapibrėžtųjų koeficientų metodu) pavyks išskaidyti į antrojo ir ketvirtojo laipsnio polinomų sandaugą:

$$\begin{aligned} &x^6 + x^5 - 2x^4 - 200x^3 - 4x^2 + 4x + 8 \\ &\quad = \left(x^2 + ax + p\right)\left(x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + q\right). \end{aligned}$$

Atskliaudę dešinę pusę ir sulyginę koeficientus prie atitinkamų $x$ laipsnių, turime:

$$\begin{gathered} a + b = 1, \\ c + ab + p = -2, \\ d + ac + pb = -200, \\ q + ad + pc = -4, \\ aq + pd = 4, \\ pq = 8. \end{gathered} \tag{11}$$

Pradėkime nuo $pq = 8$. Reikėtų išnagrinėti visas sveikąsias reikšmes $p = \pm 1, \pm 2 \pm 4, \pm 8$. Bet 6-tojo laipsnio polinomą galima išskaidyti į tris kvadratinius trinarius, o jų visi trys laisvieji nariai negali būti neigiami (jų sandauga lygi 8). Todėl galime imti trinarį su teigiamuoju laisvuoju nariu, ir nagrinėti reikės tik $p = 1, 2, 4, 8$.

Imkime $p = 1$, tada $q = 8$, ir (11) sistema virsta

$$\begin{gathered} a + b = 1, \\ c + ab = -3, \\ d + ac + b = -200, \\ ad + pc = -12, \\ 8a + d = 4. \end{gathered}$$

Įsitikinti, kad ji neturi sveikųjų sprendinių, paprasta: iš penktos lygties matome, kad $d$ dalijasi iš 4, tada iš ketvirtos lygties aišku, kad $c$ dalijasi iš 4, iš trečios lygties turime, kad $b$ dalijasi iš 4, ir antra lygtis prieštaringa – kairė pusė dalijasi iš 4, o dešinė – ne.

Imkime $p = 2$, tada $q = 4$, ir (11) sistema virsta

$$\begin{gathered} a + b = 1, \\ c + ab = -4, \\ d + ac + 2b = -200, \\ ad + 2c = -8, \\ 4a + 2d = 4. \end{gathered}$$

Iš jos turime $b = 1 - a$, tada $c = -4 - ab = -4 - a + a^2$, $d = 2 - 2a$, ir iš trečios lygties $2 - 2a + a(-4 - a + a^2) + 2 - 2a = -200$, t. y. $a^3 - a^2 - 8a = -204$, $a(a^2 - a - 8) = -2^2 \cdot 3 \cdot 17$. Čia $a = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ moduliu aiškiai per maži, o $a = -6$ tinka, nes $36 + 6 - 8 = 2 \cdot 17$.

Taigi $a = -6$, $b = 7$, $c = 38$, $d = 14$, ir (3) polinomas išskaidytas:

$$\begin{aligned} &x^6 + x^5 - 2x^4 - 200x^3 - 4x^2 + 4x + 8 \\ &\quad = \left(x^2 + 6x + 2\right)\left(x^4 + 7x^3 + 38x^2 + 14x + 4\right). \end{aligned}$$

Lygtis

$$x^4 + 7x^3 + 38x^2 + 14x + 4 = 0$$

sprendinių neturi, nes jos kairėje pusėje esantis polinomas visiems $x$ teigiamas:

$$x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 25x^2 + 14x + 4 = x^2\left(x^2 + 7x + 13\right) + \left(25x^2 + 14x + 4\right),$$

ir abiejų kvadratinių trinarių diskriminantai neigiami, $7^2 - 4 \cdot 13 < 0$, $14^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 4(7^2 - 100) < 0$. Taigi lieka išspręsti lygtį

$$x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Jos sprendiniai $x = 3 \pm \sqrt{7}$.

Kai $x = 3 + \sqrt{7}$, tai iš (2) lygties $y(2 - x^2) = 14x$, bet kadangi $x^2 = 6x - 2$, tai $y(4-6x) = 14x$, $y(2-3x) = 7x$, $y(2-9-3\sqrt{7}) = 7(3+\sqrt{7})$, $y(-7-3\sqrt{7}) = 7(3+\sqrt{7})$, $-y\sqrt{7}(\sqrt{7} + 3) = 7(3 + \sqrt{7})$, $y = -\sqrt{7}$.

Kai $x = 3 - \sqrt{7}$, tai panašiai randame $y = \sqrt{7}$.

Sprendiniai $(3 + \sqrt{7}; -\sqrt{7})$ ir $(3 - \sqrt{7}; \sqrt{7})$ surasti.

Baigiant keli žodžiai apie uždavinio formuluotę. Gali kilti klausimas, kam užduotis suskaidyta į dvi dalis – a) rasti vieną sprendinį ir b) rasti visus sprendinius. Juk faktiškai jeigu jau randame vieną sprendinį, tai randame ir kitą. Atsakymas į šį klausimą paprastas: jeigu dalyvis per neapsižiūrėjimą būtų pametęs vieną sprendinį (pavyzdžiui, traukdamas šaknį ar tikrindamas sprendinius), tai vis tiek jis būtų gavęs už uždavinį beveik visus taškus – 5 ar 6 iš 7 galimų.

## Literatūra

[1] A. Dubickas. 2019 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai. Adresas internete:
https://klevas.mif.vu.lt/∼dubickas/files/dvifai/2019LMO.pdf

[2] J.J. Mačys. Elementary theory of cubics and quartics. *Liet. matem. rink. Proc. LMS, Ser. A*, **58**:16–22, 2017. Available from Internet:
https://www.mii.lt/LMR/A/2017/58A04.pdf.

SUMMARY

**Equations of higher orders**

*J.J. Mačys*

A complicated system of two equations with two variables is considered. The theory of equations of higher orders required for solution is given. Many different methods of solution are indicated.

*Keywords*: equation systems, equations of higher orders, integer solutions, rational solutions, real solutions.