Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
**59** t., 2018, 46–53

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

# Kubinių lygčių klasifikacija

**Juozas Juvencijus Mačys[1], Jurgis Sušinskas[2]**

[1] *Vilniaus universitetas, Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas*
Akademijos g. 4, LT-08663 Vilnius
[2] *Vilniaus universitetas, Biomedicinos mokslų institutas*
Čiurlionio 21, LT-03101 Vilnius
E. paštas: juozas.macys@mii.vu.lt, jurgis.susinskas@mii.vu.lt

**Santrauka.** Kadangi paaiškėjo, kad ne tik trečiojo, bet ir ketvirtojo laipsnio lygtys su realiaisiais koeficientais mokykliškai (nesiremiant kompleksinių skaičių teorija) išsprendžiamos realiųjų skaičių aibėje, tapo įmanoma jas suklasifikuoti. Šiame straipsnyje pateikta trečiojo laipsnio lygčių klasifikacija (ketvirtojo laipsnio lygčių klasifikacija bus pateikta kitame straipsnyje, rengiamame spaudai).

**Raktiniai žodžiai:** kubinės lygtys, ketvirtojo laipsnio lygtys, racionalieji sprendiniai, algebriniai sprendiniai, trigonometriniai sprendiniai.

Mokykloje su kubinėmis ir ketvirtojo laipsnio lygtimis susiduriama retai (praktiškai tik su tokiomis, kurios turi racionaliųjų sprendinių). Paplitusi nuomonė, kad joms spręsti reikalingi kompleksiniai skaičiai (žr. [1]). Iš tikrųjų šias lygtis puikiausiai galima spręsti elementariai, ir čia visiškai užtenka mokyklinių žinių (žr. [2, 3]). Todėl visas kubines ir ketvirtojo laipsnio lygtis su realiaisiais koeficientais, sprendžiamas realiųjų skaičių aibėje, galima suklasifikuoti. Šiame straipsnyje pateikta kubinių lygčių klasifikacija. Kiekvieną lygčių tipą iliustruoja konkretus pavyzdys, kuris nuosekliai išsprendžiamas ir paaiškinamas.

**Dvinarės lygtys.** Bendras kubinės (trečiojo laipsnio) lygties pavidalas yra

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0).$$

Pačios paprasčiausios kubinės lygtys – dvinarės lygtys

$$ax^3 + b = 0, \qquad ax^3 + bx = 0, \qquad ax^3 + bx^2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Panagrinėkime pirmą iš jų. Kadangi $a \neq 0$ (kitaip lygtis iš viso nėra kubinė), tai galime dalyti iš $a$: $x^3 + \frac{b}{a} = 0$. Dabar nepradėkime skaidyti. Keliame laisvąjį narį į dešinę ir traukiame kubinę šaknį: $x^3 = -\frac{b}{a}$, $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Panašiai nereikia skaidyti ir ketvirtojo laipsnio dvinarių lygčių: pavyzdžiui, jei $x^4 = 1$, tai $x = \pm 1$. (Beje, kubinė lygtis visada turi sprendinių, o ketvirtojo ar antrojo laipsnio – ne visada. Sakykime, jei $x^4 + 1 = 0$ ar $x^2 + 1 = 0$, tai sprendinių nėra, ir nereikia net vieneto kelti į kitą pusę: juk kairė pusė teigiama, o dešinė – ne.)

Žinoma, jeigu $b = 0$, tai dvinarė lygtis virsta vienanare lygtimi $ax^3 = 0$. Tada $x^3 = 0$, ir lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 0$.

*1 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$x^3 + x = 0. \tag{1}$$

Kairę pusę išskaidome: $x(x^2 + 1) = 0$. Taigi lygtis subyra į dviejų lygčių visumą: $x = 0$ ir $x^2 + 1 = 0$. Pirmoji lygtis duoda sprendinį 0, antroji sprendinių neturi. Taigi (1) lygties vienintelis sprendinys 0.

*Atsakymas.* $\{0\}$.

*2 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$x^3 + x^2 = 0. \tag{2}$$

Išskaidome: lygtis vėl subyra į dvi, $x^2 = 0$ ir $x + 1 = 0$. Pirmosios vienintelis sprendinys yra 0, antrosios $-1$.

*Atsakymas.* $\{-1;\ 0\}$.

*3 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$x^3 + 1 = 0.$$

Kad ir kaip būtų keista, daugiausiai nesusipratimų mokykloje pasitaiko su panašiomis lygtimis. Dažnas mokinys puola kairiąją pusę skaidyti: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. To visiškai nereikia: keliame 1 į kitą pusę, $x^3 = -1$, ir traukiame kubinę šaknį: $x = -1$.

*Atsakymas.* $\{-1\}$.

**Lygtys, neturinčios laisvojo nario.** Kai laisvasis narys lygus nuliui, lygtis atrodo taip: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. Iškeliame $x$ prieš skliaustus: $x(ax^2 + bx + c) = 0$. Vadinasi, $x = 0$ arba $ax^2 + bx + c = 0$. Vienas sprendinys $x = 0$, kitų sprendinių gali duoti kvadratinė lygtis.

*4 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $3x^3 + 4x^2 + 2x = 0$.
Iškeliame $x$: $x(3x^2 + 4x + 2) = 0$. Lygtis $3x^2 + 4x + 2$ sprendinių neturi, nes jos diskriminantas neigiamas: $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8$. Lieka sprendinys $x = 0$.

*Atsakymas.* $\{0\}$.

**Sangrąžinės lygtys.** Tai pavidalo

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \tag{3}$$

lygtys (pavadinimas siejasi su žodžiais „grįžti“, „sangrąža“: jeigu koeficientus vardyti paeiliui, turėsime $a$, $b$, $b$, $a$, grįždami skaitome atvirkščiai, bet vėl koeficientai bus $a$, $b$, $b$, $a$). Jas išspręsti visai paprasta: pastebime, kad lygtis visada turi sprendinį $x = -1$, todėl kairiąją pusę galima išskaidyti iškeliant $x + 1$: $ax^3 + a + bx^2 + bx = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx)$. Taigi lygtis suskyla į dvi: $x+1 = 0$ ir $ax^2 - (a-b)x+a = 0$. Lieka išspręsti kvadratinę lygtį.

Beje, čia „atspėjome“ sprendinį, o tada kairiąją pusę lengvai išskaidėme. Su sprendinių spėjimu ir skaidymu ne kartą susidursime ir vėliau.

*5 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$5x^3 - 8x^2 - 8x + 5 = 0.$$

Kadangi lygtis sangrąžinė, skaidome: $5x^3 + 5 - 8x^2 - 8x = 5(x^3 + 1) - 8x(x + 1) = 5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 8x(x + 1) = (x + 1)(5x^2 - 5x + 5 - 8x)$. Taigi $x + 1 = 0$ arba $5x^2 - 13x + 5 = 0$. Iš pirmos lygties $x = -1$, iš antros $x = \frac{13 \pm \sqrt{69}}{10}$.

*Atsakymas.* $\big\{ -1;\ \frac{13-\sqrt{69}}{10};\ \frac{13+\sqrt{69}}{10} \big\}$.

**Lygtys, kuriose sprendinį pavyksta atspėti.** Kartais kubinės lygties sprendinį pavyksta tiesiog atspėti ar pastebėti. Beje, sprendinį iš karto pastebėjome sangrąžinėje lygtyje ($x = -1$) ir lygtyje be laisvojo nario ($x = 0$). Kai vieną sprendinį $x = \alpha$ jau turime, nesunku lygtį išskaidyti, iškeliant $x - \alpha$.

*6 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $x^3 - 11x^2 + 24x + 36 = 0$. Nesunku pastebėti jos sprendinį $x = -1$. Lieka išskaidyti iškeliant $x + 1$ – tai lengva padaryti grupuojant: $x^3 - 11x^2 + 24x + 36 = x^2(x + 1) - 12x^2 - 12x + 36x + 36 = x^2(x + 1) - 12x(x + 1) + 36(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 12x + 36) = (x + 1)(x - 6)^2$.

*Atsakymas.* $\{-1;\ 6\}$.

Iš viso, kai lygtis turi sprendinį $x = 1$ ar $x = -1$, jį pastebėti lengva. Sunkiau atspėti kitokius sprendinius.

*7 pavyzdys.* Lygties $x^3 = 15x + 4$ sprendinį pastebime ne iš karto. Ir vis dėl to, patikrinę $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ir $x = 4$, nudžiungame: su $x = 4$ abi lygties pusės virsta 64. Taigi keliame dėmenis į vieną pusę ir reiškinyje $x^3 - 15x - 4$ iškliaudžiame $x - 4$: $x^3 - 15x - 4 = x^3 - 16x + x - 4 = x(x^2 - 16) + x - 4 = x(x + 4)(x - 4) + x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$.

*Atsakymas.* $\{-\sqrt{3} - 2; \sqrt{3} - 2; 4\}$.

*8 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$x^3 + 6x = \big(3x^2 + 2\big)\sqrt{2}. \tag{4}$$

Jos sprendinį atspėti jau sunkiau. Čia kyla mintis pabandyti $\sqrt{2}$, ir mums pasiseka, – tinka. Toliau jau viskas aišku – iškliaudžiame $x - \sqrt{2}$: $x^3 - (\sqrt{2})^3 - 3x(x\sqrt{2} - 2) = (x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 2) - 3x\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{2})(x^2 - 2x\sqrt{2} + 2) = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^3$. Lygtis $(x - \sqrt{2})^3 = 0$ ištraukus kubinę šaknį virsta $x - \sqrt{2} = 0$, taigi (4) lygtis turi vienintelį sprendinį $\sqrt{2}$.

Beje, spėti galima samprotaujant taip: kadangi lygtyje matome $\sqrt{2}$, galime tikėtis, kad sprendinys yra pavidalo $t\sqrt{2}$. Kitaip sakant, bandykime atlikti keitinį $x = t\sqrt{2}$. Tada $t^3 2\sqrt{2} + 6t\sqrt{2} = (3 \cdot 2t^2 + 2)\sqrt{2}$, ir padalijus iš $2\sqrt{2}$ radikalai išnyksta: $t^3 + 3t = 3t^2 + 1$, $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Čia jau visai nesunku pastebėti skirtumo kubą: $(t - 1)^3 = 0$, $t = 1$, taigi $x = t\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

*Atsakymas.* $\{\sqrt{2}\}$.

**Lygtys, suprastinamos pritaikant formules.** Jau spręsdami lygtį $x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=0$ suvokėme, kad galima remtis skirtumo kubo formule: $x^3-3x^2\sqrt{2}+3x(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3=0$, $(x-\sqrt{2})^3=0$, $x=\sqrt{2}$.

Tiesa, formulę pastebėti dažnai sunkoka.

*9 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $(2x-3)^3+x^3+3x=3x^2+1$. Perkėlę narius į vieną pusę, remiamės skirtumo kubu: $(2x-3)^3+x^3-3x^2+3x-1=0$, $(2x-3)^3+(x-1)^3=0$. Keliame vieną kubą į kitą pusę, $(2x-3)^3=-(x-1)^3$. Traukiame kubinę šaknį: $2x-3=-(x-1)$, $3x=4, x=\frac{4}{3}$.

*Atsakymas.* $\{\frac{4}{3}\}$.

*10 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$. Joje įžiūrėti kokią nors formulę ypač sunku. Viskas paaiškėja atsikračius trupmenų. Padauginę iš 3, turime $3x^3+3x^2+3x+1=0$. Čia jau įkvepia sumos kubas: $2x^3+x^3+3x^2+3x+1=0$, $2x^3+(x+1)^3=0$. Dviejų kubų $(x\sqrt[3]{2})^3$ ir $(x+1)^3$ sumos vėl nereikia skaidyti. Keliame vieną kubą į kitą pusę: $2x^3=-(x+1)^3$, $x\sqrt[3]{2}=-(x+1)$, $x\sqrt[3]{2}+x=-1$, $x(\sqrt[3]{2}+1)=-1$. Kad dalijant vardiklyje nebūtų radikalų, abi puses dauginame iš $(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1: x(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1$, $x(\sqrt[3]{8}+1)=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1$, $3x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1$, $x=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1)$.

*Atsakymas.* $\{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}-1)\}$.

Pridursime, kad išspręsti šią lygtį standartiškai (taikant Kardano formulę, žr. toliau) sunkiau.

**Lygtys, turinčios racionaliųjų sprendinių.** Tai labai plati lygčių klasė – į ją įeina lygtys be laisvojo nario (juk nulinis sprendinys – racionalus), sangrąžinės lygtys (sprendinys $x=-1$) ir kitos. Kai lygties

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{5}$$

koeficientai – sveikieji skaičiai, yra paprastas metodas rasti visus racionaliuosius sprendinius – užtenka patikrinti visus skaičius $\pm\frac{p}{q}$, kur $p$ yra laisvojo nario $d$ teigiamieji dalikliai, o $q$ – vyriausiojo koeficiento $a$ teigiamieji dalikliai.

Galima tą būdą truputį patobulinti. Dauginame (5) lygtį iš $a^2$ ir $ax$ pažymime $y$: $a^3x^3+a^2bx^2+a^2cx+a^2d=0$, $y^3+by^2+acy+a^2d=0$. Dabar mūsų lygties visi koeficientai sveiki, o vyriausiasis – lygus 1. Tokios lygties racionalieji sprendiniai (jei jų yra) sveiki ir priklauso laisvojo nario teigiamųjų ir neigiamųjų daliklių aibei.

*11 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $2x^3-11x^2+12x+9=0$. Dauginame iš 4 ir $2x$ pažymime $y$: $8x^3-44x^2+48x+36=0$,

$$y^3-11y^2+24y+36=0. \tag{6}$$

Laisvojo nario dalikliai yra $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm4$, $\pm6$, $\pm9$, $\pm12$, $\pm18$, $\pm36$. Net netikrindami pastebime, kad $y=-1$ tinka, ir toliau galima nebevargti – mums užtenka ir vieno sprendinio. Sprendžiame (6) lygtį, skaidydami kairę pusę. Tai galima daryti kaip kam labiau patinka: dalyti „kampu“ ar skaidyti papildant ir grupuojant. Žinome, kad prieš skliaustus išsikels $y+1$, todėl dėmenį $y^3$ papildome dėmeniu $y^2$ (ir, žinoma, atimame tą $y^2$ kompensuodami): $y^3-11y^2+24y+36=y^3+y^2-y^2-11y^2+24y+36=y^2(y+1)-12y^2+24y+36$. Tęsiame panašiai: $y^2(y+1)-12y^2-12y+24y+36=y^2(y+1)-12y(y+1)+36y+36=(y+1)(y^2-12y+36)=(y+1)(y-6)^2$. Taigi sprendinius randame iš lygčių $y+1=0$ ir $(y-6)^2=0$, t.y. $y=-1$ arba $y=6$. Grįžtame prie $x$: $y=2x$, $x=\frac{y}{2}$, todėl $x=-\frac{1}{2}$ arba $x=3$.

*Atsakymas.* $\{-\frac{1}{2};\ 3\}$.

Beje, žinant kubinės lygties sprendinį $\alpha$, jos galima ir neskaidyti išskliaudžiant $x-\alpha$: atlikus keitinį $t=x-\alpha$, lygtis $t$ atžvilgiu turės sprendinį $t=0$. Tai reiškia, kad laisvasis narys išnyks, o tada $t$ išsikels prieš skliaustus automatiškai. Mūsų atveju (6) lygtis turi sprendinį $y=-1$. Todėl keičiame kintamąjį $z=y+1$, t.y. $y=z-1$. Tada (6) lygtis virsta $(z-1)^3-11(z-1)^2+24(z-1)+36=0$, $z^3-3z^2+3z-1-11z^2+22z-11+24z-24+36=0$, $z^3-14z^2+49z=0$, $z(z^2-14z+49)=0$, $z(z-7)^2=0$. Taigi $z=0$ arba $z=7$, o tada $y=-1$ arba $y=6$.

**Lygtys, turinčios vieną sprendinį (kai $27q^2+4p^3>0$ arba kai $p=0$, $q=0$).** Jeigu nepavyko rasti racionaliųjų sprendinių (ar kaip nors kitaip išskaidyti lygtį), visada galima pritaikyti algebrinį arba trigonometrinį keitinį ir lygtį išspręsti (žr. [2, 3]). Iš pradžių suteikiame lygčiai $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ kanoninį pavidalą

$$x^3+px+q=0. \tag{7}$$

Tai darome taip. Lygtį (5) dalijame iš $a$, ir ji įgyja pavidalą

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \tag{8}$$

(vyriausiasis koeficientas lygus vienetui). Dar geriau apsieiti be dalybos ir trupmenų: (5) lygtį dauginti iš $a^2$ ir $ax$ pažymėti $y$ – vėl gausime (8) pavidalo lygtį (beje, tai dažniausiai būname atlikę ieškodami racionaliųjų sprendinių). Pasirodo, kad (8) lygtyje galima atsikratyti dėmens su $x^2$, t.y. gauti (7) pavidalo lygtį. Iš tikrųjų, (8) lygtyje atlikime keitimą $y=x+\frac{b}{3}$, t.y. $x=y-\frac{b}{3}$. Tada dėmenis su $y^2$ duos tik $x^3$ ir $bx^2$, ir $x^3+bx^2=x^2(x+b)=(y-\frac{b}{3})^2(y+\frac{2b}{3})=(y^2-\frac{2by}{3}+\frac{b^2}{4})(y+\frac{2b}{3})$, taigi atskliaudus narių su $y^2$ nebelieka, – gausime kanoninę lygtį (7).

Jeigu kubinės (7) lygties diskriminantas $\Delta=-4p^3-27q^2$ (taip jį vadinti įprasta) neigiamas, atliekame algebrinį keitimą

$$x=\sqrt[3]{y}-\frac{p}{3\sqrt[3]{y}}. \tag{9}$$

Lygtis (7) virsta $(\sqrt[3]{y}-\frac{p}{3\sqrt[3]{y}})^3+p(\sqrt[3]{y}-\frac{p}{3\sqrt[3]{y}})+q=0$, $y-\frac{p^3}{27y}--3\sqrt[3]{y}\cdot\frac{p}{3\sqrt[3]{y}}(\sqrt[3]{y}-\frac{p}{3\sqrt[3]{y}})+p(\sqrt[3]{y}-\frac{p}{3\sqrt[3]{y}})+q=0$, $y-\frac{p^3}{27y}+q=0$,

$$y^2+qy-\frac{p^3}{27}=0. \tag{10}$$

Kadangi šios kvadratinės lygties diskriminantas $q^2+\frac{4p^3}{27}$ tik daugikliu $-27$ skiriasi nuo $\Delta$, tai jis teigiamas, ir $y=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$. Grįžtame prie $x$ pagal (9) (abi $y$

reikšmės duoda tą patį sprendinį):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{11}$$

Tai – vadinamoji Kardano formulė. Kai diskriminantas $\Delta = -27q^2 - 4p^3 < 0$, tai šis sprendinys vienintelis (žr. [2, 3]).

*12 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $x^3 - x - 1 = 0$. Kadangi jos diskriminantas $-27q^2 - 4p^3 = -27(-1)^2 - 4(-1)^3 = -23$ neigiamas, tai pagal Kardano formulę (11) gauname vienintelį sprendinį $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{4\cdot 27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{4\cdot 27}}} = \frac{1}{2\cdot 3}(\sqrt[3]{4\cdot 27 + \sqrt{23}} + \sqrt[3]{4\cdot 27 - \sqrt{23}}) = \frac{1}{6}(\sqrt[3]{108 + \sqrt{23}} + \sqrt[3]{108 - \sqrt{23}})$. Žinoma, galima nesiremti Kardano formule, o taikyti keitinį $x = \sqrt[3]{y} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}$ ir atlikti visus skaičiavimus patiems.

*Atsakymas.* $\left\{\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{108 + \sqrt{23}} + \sqrt[3]{108 - \sqrt{23}}\right)\right\}$.

**Lygtys, turinčios du sprendinius (kai $27q^2 + 4p^3 = 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$).** Kai diskriminantas $\Delta$ lygus 0, Kardano formulė (11) duoda sprendinį $x = -\sqrt[3]{4q}$. Kadangi $27q^2 + 4p^3 = 0$, tai $p = -\sqrt[3]{\frac{27q^2}{4}}$, ir (7) lygtis virsta

$$x^3 - x\sqrt[3]{\frac{27q^2}{4}} + q = 0. \tag{12}$$

Žinome, kad galima išskliausti $x + \sqrt[3]{4q}$, todėl išskaidyti paprasta: $x^3 + 4q - x\sqrt[3]{\frac{27q^2}{4}} - 3q = (x + \sqrt[3]{4q})(x^2 - x\sqrt[3]{4q} + \sqrt[3]{16q^2}) - 3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}(x + \sqrt[3]{4q}) = (x + \sqrt[3]{4q})(x^2 - x\sqrt[3]{4q} + \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}) = (x + \sqrt[3]{4q})(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}})^2$.

Taigi (12) lygtis (vadinasi, ir (7) lygtis) turi 2 sprendinius: $x = -\sqrt[3]{4q}$ ir $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (žinoma, kai $q = 0$, tai ir $p = 0$, todėl turime vienintelį sprendinį $x = 0$). Beje, nulinio diskriminanto atvejo nagrinėti paprastai neprisieina: kai (7) lygties koeficientai racionalūs, sprendiniai bus racionalūs, ir juos jau būsime radę anksčiau. Iš tikrųjų, $\sqrt[3]{4q}$ šiuo atveju racionalus, nes $\sqrt[3]{4q} = \sqrt[3]{\frac{4\cdot 27q^3}{27q^2}} = 3q\sqrt[3]{\frac{4}{-4p^3}} = -\frac{3q}{p}$.

*13 pavyzdys.* Išspręskime lygtį $x^3 - x\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} = 0$. Čia $p = -\sqrt{3}$, $q = \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$, $27q^2 + 4p^3 = 27\cdot\frac{4}{9}\sqrt{3} - 4\cdot 3\sqrt{3} = 0$. Kardano formulė duoda sprendinį $x = -\sqrt[3]{4q}$, $x = -(4\cdot\frac{2}{3}\sqrt[4]{3})^{\frac{1}{3}} = -(8\cdot 3^{-\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = -2\cdot 3^{-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Matėme, kad kitas sprendinys gaunamas iš šio, dauginant jį iš $(-\frac{1}{2})$, taigi lygus $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

*Atsakymas.* $\left\{-\frac{2}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right\}$.

*Pastaba.* Iš atsakymo aišku, kad sprendžiant pradinę lygtį buvo verta išbandyti keitinį $x = \frac{y}{\sqrt[4]{3}}$. Tada $\frac{y^3}{\sqrt[4]{27}} - y\sqrt[4]{3} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} = 0$, $y^3 - 3y + 2 = 0$. Dabar sprendinys $y = 1$ akivaizdus, ir skaidome iškeldami $y - 1$:

$$y^3 - y - 2y + 2 = y(y^2 - 1) - 2(y - 1) = (y - 1)(y^2 + y - 2) = (y + 2)(y - 1)^2.$$

Vadinasi, $y = -2$ arba $y = 1$, taigi $x = -\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ arba $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Sprendžiant šitaip neprireikia jokios teorijos. Beje, 8 pavyzdyje jau patarėme išbandyti, pavyzdžiui, keitinį $x = y\sqrt[4]{3}$ (jis irgi padeda išspręsti lygtį).

**Lygtys, turinčios tris sprendinius (kai $27q^2 + 4p^3 < 0$).** Jeigu nepavyko rasti lygties racionaliųjų sprendinių, o kanoninės (7) lygties diskriminantas $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ teigiamas, tai lygtis turi tris trigonometrinio pavidalo sprendinius (plačiau žr. [2]). Atlikime keitinį $x = \sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\varphi$. Tada (7) lygtis suprastinus virsta $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \frac{3q\sqrt{3}}{2|p|\sqrt{|p|}}$, o pasižymėjus dešinę pusę $C$, – lygtimi $\cos 3\varphi = C$. Prisiminkime sąlygą $27q^2 + 4p^3 < 0$. Iš jos matome, kad $p < 0$, $27q^2 < 4|p^3|$, $3|q|\sqrt{3} < 2|p|\sqrt{|p|}$. Vadinasi, $|C| < 1$, todėl $3\varphi = 2n\pi \pm \arccos C$, $\varphi = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos C$. Remdamiesi redukcijos formulėmis, įsitikiname, kad gauname tik tris nesutampančias $\cos\varphi$ reikšmes – užtenka imti $\varphi_1 = \cos(\frac{1}{3}\arccos C)$, $\varphi_2 = \cos(\frac{1}{3}\arccos C + \frac{2}{3}\pi)$, $\varphi_3 = \cos(\frac{1}{3}\arccos C - \frac{2}{3}\pi)$. Grįžę prie $x = \sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\varphi$, turime (7) lygties tris sprendinius (o daugiau jų ir būti negali)

$$\left\{\sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|\sqrt{|p|}}\right), \sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|\sqrt{|p|}} \pm \frac{2}{3}\pi\right)\right\}.$$

Juose galima pereiti prie to paties argumento, remiantis sumos kosinuso formule $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$:

$$\left\{\sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|\sqrt{|p|}}\right), \sqrt{\frac{4|p|}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|\sqrt{|p|}}\right)\right.$$
$$\left. \pm \sqrt{|p|}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|\sqrt{|p|}}\right)\right\}.$$

*14 pavyzdys.* Išspręskime lygtį

$$x^3 - \frac{49}{3}x + \frac{286}{27} = 0. \tag{13}$$

Kadangi $27q^2 + 4p^3 = \frac{286^2}{27} - \frac{4\cdot 49^3}{27} < 0$ (nes $286^2 < 4\cdot 49^3$, $286 < 2\cdot 7^3$, $143 < 7\cdot 49$), tai reikia taikyti trigonometrinį keitinį $x = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{49}{3}}\cos\varphi = \frac{14}{3}\cos\varphi$. Mūsų (13) lygtis virsta $\frac{14^3}{27}\cos^3\varphi - \frac{49}{3}\cdot\frac{14}{3}\cos\varphi + \frac{286}{27} = 0$, $14^3\cos^3\varphi - 3\cdot 49\cdot 14\cos\varphi + 286 = 0$, $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi + \frac{143}{7^3} = 0$, $\cos 3\varphi = -\frac{143}{343}$, $3\varphi = \arccos(-\frac{143}{343}) + 2n\pi$, $\varphi_1 = \frac{1}{3}\arccos(-\frac{143}{343})$, $\varphi_{2,3} = \frac{1}{3}\arccos(-\frac{143}{343}) \pm \frac{2\pi}{3}$. Taigi atsakymas būtų toks:

$$\left\{\frac{14}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{143}{343}\right)\right), \frac{14}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{143}{343}\right) \pm \frac{2\pi}{3}\right)\right\}.$$

Atrodytų, galime atsikvėpti – atsakymas gautas. Bet eikime dar žingsnelį – apskaičiuokime apytiksliai tas reikšmes skaičiuokliu. Gauname, kad tai $3,666\ldots$, $-4,333\ldots$, $0,666\ldots$. Bet juk tai panašu į $3,(6) = 3\frac{2}{3}$, $-4\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$! Tik dabar prisiminėme geležinę taisyklę – trečiojo (ir ketvirtojo) laipsnio lygtis reikia pradėti spręsti ieškant racionaliųjų sprendinių.

Grįžtame prie (13) lygties. Padauginę iš 27, turime $27x^3 - 49 \cdot 9x + 286 = 0$. Verta įsivesti $y = 3x$:

$$y^3 - 147y + 286 = 0. \tag{14}$$

Kadangi vyriausiasis koeficientas 1, tai racionaliųjų sprendinių rasime tik tarp laisvojo nario $286 = 2 \cdot 143 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ daliklių. Žinome, kad užtenka rasti bent vieną sprendinį – tada lygtį išskaidysime. Taigi greitai aptinkame sprendinį $y = 2$. Iš tikrųjų, $y^3 - 147y = 2(4 - 147) = -2 \cdot 143 = -286$. Nesunku rasti ir kitus du (14) lygties sprendinius 11 ir $-13$. Taigi (13) lygties sprendiniai $x = \frac{1}{3}y$ yra $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{3}$, $-\frac{13}{3}$. Pagaliau!

*Atsakymas.* $\left\{-\frac{13}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right\}$.

Įsitikinome, kad jeigu kanoninės lygties $x^3+px+q = 0$ ($|p|+|q| \neq 0$) diskriminantas $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ neigiamas, tai lygtis turi vieną sprendinį, jei lygus nuliui – du sprendinius, o jei teigiamas – tris sprendinius. Įdomu, kad ir atvirkščiai – jeigu ši lygtis turi vieną sprendinį, tai diskriminantas neigiamas, jei du – diskriminantas lygus nuliui, jei tris – diskriminantas teigiamas. Šių teiginių įrodymas prieštaros metodu akivaizdus.

## Literatūra

[1] S.B. Gashkov. *Sovremennaja elementarnaja algebra*. MCNMO, Moskva, 2006.

[2] J.J. Mačys. Elementary theory of cubics and quartics. *Liet. mat. rink. LMD darbai, ser. A*, **58**:16–22, 2017.

[3] J.J. Mačys. *Trečiojo ir ketvirtojo laipsnio lygtys. Matematika ir matematikos dėstymas*, Kaunas, 2017. (Atiduota spaudai.)

SUMMARY

**Classification of cubic equations**
*J.J.Mačys, J.Sušinskas*
Rather unexpectably all real equations of the fourth degree are solvable by real means. So we can classify all real equations of the third and fourth degree. In this article we classify real cubics. The real quartics will be classified in another article.

*Keywords*: cubics, real equations of the third degree, quartics, real equations of the fourth degree, rational solutions, algebraic solutions, trigonometric solutions.