XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 519 21

КРИТЕРИИ ЭРГОДИЧНОСТИ ОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ В СПЕЦИАЛЬНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. III

З. Ю. Навицкас

Настоящая работа является продолжением предшествующих двух под таким же названием. Обозначения те же, что и в первой и второй частях. При ссылке на формулы, леммы, свойства, содержащиеся в первой и второй частях статьи, указывается лишь их номер.

§ 7. Критерии эргодичности

Цель этого параграфа – описать критерии возвратности марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и положительности ее состояний. В дальнейшем предположим, что всегда для $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ выполняется условие (5.9).

Замечание 7.1. Пусть имеется марковская цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ в E. Из [4] (см., например, § 3, стр. 9) следует, что $(x_n,\ n\geqslant 0)$ возвратна тогда и только тогда, когда ряд

$$I_a=\sum_{n=0}^{\infty} p_a^{(n)} \qquad (a\in E), \tag{7.1}$$

где $p_a^{(n)}=\mathbf{P}\{x_n=a\}$, расходится каким бы ни было начальное распределение $\left\{p_a^{(0)}: p_a^{(0)}=\mathbf{P}\{x_0=a\},\ a\in E,\ \sum_{a\in E} p_a^{(0)}=1\right\}$ (или аналогично невозвратна тогда и только тогда, когда при любом начальном распределении ряд (7.1) конечен.

Говоря образно, только в случае невозвратности марковской цепи существует функция Грина.

Замечание 7.2. Если I_a конечен (бесконечен) при каких-нибудь фиксированных состояниях и начальном распределении $\{p_a^{(0)}\}$, то он конечен (бесконечен) при любых состояниях $a\in E$ и при любых начальных распределениях $\{p_a^{(0)}\}$, поскольку $(x_n,\ n\geqslant 0)$ имеет один существенный эргодичный класс.

Лемма 7.1. *Пусть имеем какую-то невозвратную (или обрывающуюся) марковскую цепь* $(x_n,\ n\geqslant 0)$ *в* E, *и если в нее вложим марковскую цепь II типа* $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$ *в* $E_1\subset E$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_a^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_a^{(n)}<+\infty \qquad (a\in E_1), \tag{7.2}$$

где $\bar{p}_a^{(n)}=\mathbf{P}\{\bar{x}_n=a\}$ *при любом начальном распределении* $\{p_a^{(0)}\}$.

Доказательство. Имеет место

$$M_b\left(\sum_{n=0}^{N}\chi_a(x_n)\right)=\sum_{n=0}^{N}p_a^{(n)},$$

если

$$p_a^{(0)}=\delta(a,\ b)\ ^{*)}. \tag{7.3}$$

Воспользовавшись в доказательстве свойства 4 (§4) приведенными свойствами цепи $(x_n,\ n\geqslant 0)$ и последовательностью марковских моментов II типа, получаем

$$\sum_{n=0}^{N}\chi_a(\bar{x}_n)=\sum_{n=0}^{\tau_N}\chi(x_n),$$

откуда и из невозвратности $(x_n,\ n\geqslant 0)$ и хорошо известных свойств математического ожидания следует доказательство леммы.

Лемма 7.2. *Если марковская цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ в E возвратна, тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}p_a^{(N)}}{\sum\limits_{n=0}^{N}p_b^{(N)}}=\frac{u_a}{u_b}\qquad (a,\ b\in E),$$

где $\{u_a : a\in E,\ u_a\geqslant 0\}$ какое-нибудь решение стохастической системы уравнений цепи $(x_n,\ n\geqslant 0)$ при любом начальном распределении $\{p_a^{(0)}\}$.

Доказательство. Лемма является следствием теорем (9.5) и (9.7) из [1] (см. стр. 81 и 83).

Следствие 7.1. *Пусть $(x_n,\ n\geqslant 0)$ возвратна и $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$ в $E_1\subset E$ является вложенной в нее марковской цепью II типа, тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\bar{p}_a^{(n)}}{\sum\limits_{n=0}^{N}\bar{p}_b^{(n)}}=\frac{u_a}{u_b}\qquad (a,\ b\subset E_1),$$

где $\bar{p}_a^{(n)}=\mathbf{P}\{\bar{x}_n=a\}$, при любом начальном распределении $\{p_a^{(0)}\}$.

Доказательство следует из свойства 4 (§ 4) и леммы 7.2.

Пусть дана полунепрерывная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и

$$p_{ab}=\mathbf{P}\{x_n^{(\hat{E})}=b\mid x_{n-1}^{(\hat{E})}=a\}\qquad (a,\ b\in\hat{E};\ n\geqslant 1).$$

Построим марковскую цепь $(x_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$ в $\mathfrak{U}_m=\{(i,\ j) : i=\overline{1,\ s};\ j=\overline{0,\ m}\}$ с условными вероятностями перехода через один шаг, равными

$$\tilde{p}_{ab}(m)=\mathbf{P}\{x_{n+1}^{(m)}=b\mid x_n^{(m)}=a\}=\begin{cases}p_{ab}, & \text{если } a\in\mathfrak{U}_{m-1},\ b\in\mathfrak{U}_m,\\ 1, & \text{если } a=b\in\bar{\Gamma}_m,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

---

*) Здесь $M_b(\ldots)$ — математическое ожидание случайной величины, содержащейся в скобках, по мере $\mathbf{P}_b$, индуцированной с помощью начального распределения (7.3) и условных вероятностей перехода через один шаг цепи $(x_n,\ n\geqslant 0)$.

Лемма 7.3. *Пусть $K^{(m)}(a, b)$ $(a, b \in \mathfrak{U}_m)$ – функция Грина марковской цепи $(x_n^{(m)}, n \geqslant 0)$, тогда*

а) $K^{(m)}(a, b) < K^{(m+1)}(a, b)$ $(a, b \in \mathfrak{U}_m)$;

б) *в случае невозвратности $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$ существует*

$$\lim_{m\to\infty} K^{(m)}(a, b) = K(a, b) < +\infty \qquad (a, b \in E),$$

где $K(a, b)$ функция Грина цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$;

в) *в случае возвратности $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$*

$$\lim_{m\to\infty} K^{(m)}(a, b) = +\infty \qquad (a, b \in E);$$

г) $$\lim_{m\to\infty} \frac{K^{(m)}(a, b)}{K^{(m)}(c, d)} = \frac{u_b}{u_d},$$

где $\{u_a : a \in \hat{E}, u_a \geqslant 0\}$ какое-нибудь решение стохастической системы уравнений цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$.

Доказательство следует из определения функции Грина (для обрывающейся в $\mathfrak{U}_{m-1}$ марковской цепи $(x_n^{(m)}, n \geqslant 0)$. Оно дано в § 3, а для необрывающейся цепи с бесконечным числом состояний – в [5]), § 5, лемм 7.1, 7.2 и замечаний 7.1 и 7.2.

Введем величины:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{s} \eta(i, j) \cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,j)(k,j+1)} \qquad (j \geqslant 0),$$

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{s} \eta(i, j) \cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,j)(k,j-1)} \qquad (j \geqslant 1),$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} \eta(i, j) \cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,j)(k,j)} \qquad (j \geqslant 0).$$

$\big(\{\eta(i, j)\}$ определены системой уравнений (5.15)$\big)$, которые, очевидно, положительны, ограничены нулем и единицей и удовлетворяют равенству $\lambda_j + \mu_j + \gamma_j = 1$ $(j \geqslant 0)$.

Определение 7.1. Марковскую цепь $(x_n'', n \geqslant 0)$, определенную в фазовом пространстве $E_1 = \{j : j = 0, 1, 2, \dots\}$, с условными вероятностями перехода через один шаг:

$$\mathbf{P}\{x_n'' = j \mid x_n'' = i\} = p_{ij}'' = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } j = i+1, \quad i \geqslant 0, \\ \mu_i, & \text{если } j = i-1, \quad i \geqslant 1, \\ \gamma_i, & \text{если } j = i, \quad i \geqslant 0, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

назовем вспомогательной цепью для цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$.

Предположим, что

$$\gamma_j \leqslant c_1 < 1, \qquad j \geqslant 0.$$

Применив лемму 2.1, (1.3) и (1.4) получаем, что $(x_n'', n \geqslant 0)$ возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i} = +\infty \tag{7.4}$$

и имеет (в случае возвратности $(x_n'', n \geqslant 0)$ положительные состояния тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} < +\infty. \tag{7.5}$$

Кроме этого, если справедливо

$$0 < c_2 \leqslant \lambda_i \leqslant c_3 < 1, \qquad 0 < c_2 \leqslant \mu_i \leqslant c_3 < 1,$$

тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

следует (7.4) и (7.5).

Теперь исследуем связь между $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$ и $(x_n'', n \geqslant 0)$.

Лемма 7.4. *Если* $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$ *возвратна, тогда возвратна и* $(x_n'', n \geqslant 0)$.

Доказательство. Так как $(x_n^{(\hat{E})}, n \geqslant 0)$ возвратна, то в силу леммы 7.3 следует, что

$$\lim_{m \to \infty} K^{(m)}(a, b) = +\infty$$

для любых фиксированных $a, b \in \hat{E}$ *).

С другой стороны, для каждой цепи $(x_n^{(m)}, n \geqslant 0)$ можно построить вспомогательную цепь $(\bar{x}^{(m)}, n \geqslant 0)$ в фазовом пространстве $E^{(m)} = \{j : j = \overline{0, m}\}$ с условными вероятностями перехода через один шаг

$$\bar{p}_{ij}^{(m)} = \mathbf{P}\{\bar{x}_{n+1}^{(m)} = j \mid \bar{x}_n^{(m)} = i\} = \begin{cases} \bar{\lambda}_i^{(m)}, & \text{если } j = i+1; \quad i = \overline{0, m-1}, \\ \bar{\mu}_i^{(m)}, & \text{если } j = i-1; \quad i = \overline{1, m}, \\ \bar{\gamma}_i^{(m)}, & \text{если } j = i; \quad i = \overline{0, m}, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\bar{\lambda}_i^{(m)} = \frac{\sum_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0, 0), (k, i)\Big) \cdot \sum_{l=1}^{s} \bar{p}_{(k, i)(l, i+1)}(m)}{\sum_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0, 0), (k, i)\Big)},$$

*) Здесь и ниже $m \geqslant N(a, b) > 0$, так чтобы $a, b \in \mathfrak{A}_m$ (т. е. соответствующие пределы имели смысл).

$$\bar{\mu}_i^{(m)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0,\ 0),\ (k,\ i)\Big)\cdot \sum\limits_{l=1}^{s} \tilde{p}_{(k,\ i)\ (l,\ i-1)}(m)}{\sum\limits_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0,\ 0),\ (k,\ i)\Big)},$$

$$\bar{\gamma}_i^{(m)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0,\ 0),\ (k,\ i)\Big)\cdot \sum\limits_{l=1}^{s} \tilde{p}_{(k,\ i)\ (l,\ i)}(m)}{\sum\limits_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0,\ 0),\ (k,\ i)\Big)}.$$

Из определения $(\bar{x}_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$ следует, что

$$\bar{K}^{(m)}(0,\ i) = \sum_{k=1}^{s} K^{(m)}\Big((0,\ 0),\ (k,\ i)\Big)$$

является функцией Грина в точке $(0,\ i)$ марковской цепи $(\bar{x}_n^{(m)},\ n\geqslant 0)$.

В силу леммы 7.3 пункта г) имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\lambda}_i^{(m)} = \lambda_i, \quad \lim_{m\to\infty} \bar{\mu}_i^{(m)} = \mu_i, \quad \lim_{m\to\infty} \bar{\gamma}_i^{(m)} = \gamma_i.$$

Справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \bar{K}^{(m)}(0,\ i) = +\infty,$$

откуда следует, что $(x_n'',\ n\geqslant 0)$ не имеет функции Грина. В силу замечаний 7.1 и 7.2 получаем доказательство леммы.

Лемма 7.5. *Если* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *невозвратна, тогда существует такое начальное распределение*

$$\left\{ p_{(i,\ j)}^{(0)} : \sum_{i=1}^{s} p_{(i,\ j)}^{(0)} = 1 \right\} \qquad (j\geqslant 1), \tag{7.6}$$

что выполняется

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{s} p_{(i,\ j)}^{(0)} K\Big((i,\ j),\ (l,\ k)\Big)}{\sum\limits_{l=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{s} p_{(i,\ j)}^{(0)} K\Big((i,\ j),\ (l,\ k)\Big)} = \eta(l,\ k) \qquad (k\leqslant j).$$

Доказательство. Так как $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ невозвратна, то существует функция Грина, которую при начальном распределении (7.6) обозначим через

$$K(l,\ k) = \sum_{i=1}^{s} p_{(i,\ j)}^{(0)}\cdot K\Big((i,\ j),\ (l,\ k)\Big).$$

В $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ вложим марковскую цепь II типа $(y_n^{(j)},\ n\geqslant 0)$ в $\mathfrak{U}_j$, условные вероятности которой обозначим через $\{\hat{p}_{ab} : a,\ b\in\mathfrak{U}_j\}$.

В силу леммы 7.1 $K(l, k)$ удовлетворяет систему уравнений:

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=r-1}^{r+1} \sum_{l=1}^{s} K(l, k)\hat{p}_{(l,k)(i,r)} = K(i, r) \quad (i=\overline{1, s};\ r=\overline{0, j-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=j-1}^{j} K(l, k)\hat{p}_{(l,k)(i,j)} + p^{(0)}_{(i,j)} = K(i, j) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{7.7}$$

Если положим $p^{(0)}_{(i,j)} = q(\infty)$ в системе уравнений (7.7) и $\sum\limits_{i=1}^{s} Q_{(i,j)} \cdot \eta(i, j) = 1$ (см. теорему 5.2) в системе уравнений (5.15) вместо уравнения $\sum\limits_{a\in\bar{\Gamma}_j} \eta(a) = 1$, тогда в силу теоремы 5.2 справедливо

$$K(i, j) = c_j \cdot \eta(i, j) \qquad (i=\overline{1, s})$$

и тем самым

$$K(l, k) = c_k \cdot \eta(l, k) \qquad (l=\overline{1, s},\quad 0 \leqslant k < j),$$

где $\{c_k : k=\overline{0, j}\}$ — строго положительные множители.

Итак, лемма доказана.

Построим на $E^{(m)}$ марковскую цепь $(z_n^{(m)}, n \geqslant 0)$ с условными вероятностями перехода, равными

$$P\{z_{n+1}^{(m)} = j \mid z_n^{(m)} = i\} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } j=i+1, \quad 0 \leqslant i < j, \\ \mu_i, & \text{если } j=i-1, \quad 1 \leqslant i < j, \\ \gamma_i, & \text{если } j=i, \quad 0 \leqslant i < j, \\ 1, & \text{если } i=j=m, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\hat{K}^{(m)}(i, j)$ $(0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant m)$ функция Грина марковской цепи $(z_n^{(m)}, n \geqslant 0)$.

Обозначим

$$\Theta_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \qquad (\Theta_0 \equiv 1).$$

Лемма 7.6. *Имеет место*

$$\varliminf_{m\to\infty} \hat{K}^{(m)}(m-1, 0) = \varliminf_{m\to\infty} \Theta_{m-1}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$${}_i\pi_m(k, l) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{z_n^{(m)} = l, z_j \neq i, l, k;\ \text{для всех } 0 < j < n \mid z_0^{(m)} = k\}$$

при $i, k, l < m$, тогда

$$\hat{K}^{(m)}(m-1, 0) = {}_m\pi_m(m-1, 0) \cdot \hat{K}^{(m)}(0, 0),$$

но, с другой стороны, вычислив $\hat{K}^{(m)}(0,\ 0)$ с помощью вложенных цепей маркова II типа, имеем

$$\hat{K}^{(m)}(0,\ 0)=\frac{1}{1-{}_0\pi_m(0,\ 0)}=\frac{1}{{}_0\pi_m(0,\ m)},$$

так как ${}_0\pi_m(0,\ m)+{}_0\pi_m(0,\ 0)=1$. Далее, в силу свойства VIII, § 3 и [1] (см. § 12 стр. 106 формула 12.5 и ее обобщения) имеем:

$$ {}_0\pi_m(0,\ m-1)=\frac{1}{\sum\limits_{r=0}^{m-2}\Theta_r},\qquad {}_m\pi_m(m-1,\ 0)=\frac{\Theta_{m-1}}{\sum\limits_{r=0}^{m-1}\Theta_r},$$

откуда получаем

$$\lim_{m\to\infty}\hat{K}^{(m)}(m-1,\ 0)=\lim_{m\to\infty}\frac{{}_m\pi_m(m-1,\ 0)}{{}_0\pi_m(0,\ m)}=\lim_{m\to\infty}\Theta_{m-1}.$$

Доказательство леммы закончено.

Лемма 7.7. а) *Если* $(x''_n,\ n\leqslant 0)$ *невозвратна, тогда и* $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *невозвратна*; б) *если* $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ *возвратна и*

$$\lim_{m\to\infty}\Theta_{m-1}>0, \tag{7.8}$$

тогда и $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *возвратна.*

Доказательство. Пункт а) следует из леммы 7.4.

Пусть $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ невозвратна. При начальном распределении $\{p^{(0)}_{(i,\ m)}=$ $=q_{(i,\ m)}(\infty)\}$ функцию Грина маркосвкой цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ *обозначим через* $K^{(m)}(a)$ $(a\in\hat{E})$.

В силу леммы 7.5 имеет место

$$\lambda_j^{(m)}=\lambda_j,\quad \mu_j^{(m)}=\mu_j,\quad \gamma_j^{(m)}=\gamma_j\qquad (j\leqslant m), \tag{7.9}$$

где

$$\lambda_j^{(m)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}K^{(m)}(i,\ l)\cdot\sum\limits_{k=1}^{s}p_{(i,\ l)(k,\ l+1)}}{\sum\limits_{i=1}^{s}K(i,\ l)}\qquad (l\leqslant 0),$$

$$\mu_j^{(m)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}K^{(m)}(i,\ l)\cdot\sum\limits_{k=1}^{s}p_{(i,\ l)(k,\ l-1)}}{\sum\limits_{i=1}^{s}K(i,\ l)}\qquad (l\geqslant 1),$$

$$\gamma_j^{(m)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}K^{(m)}(i,\ l)\sum\limits_{k=1}^{s}p_{(i,\ l)(k,\ l)}}{\sum\limits_{i=1}^{s}K^{(m)}(i,\ l)}\qquad (l\geqslant 0).$$

Из (7.9) следует

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_j^{(m)}=\lambda_j, \quad \lim_{m\to\infty} \mu_j^{(m)}=\mu_j, \quad \lim_{m\to\infty} \gamma_j^{(m)}=\gamma_j.$$

Пусть $(x_n^{(m)''}, n\geqslant 0)$ – марковская цепь с условными вероятностями перехода через один шаг, равными

$$\mathbf{P}\{x_n^{(m)'}=j \mid x_n^{(m)''}=i\}=\begin{cases}\lambda_i^{(m)}, & \text{если } j=i+1; \quad i\geqslant 0,\\ \mu_i^{(m)}, & \text{если } j=i-1; \quad i\geqslant 1,\\ \gamma_i^{(m)}, & \text{если } j=i; \quad i\geqslant 0,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях;}\end{cases}$$

тогда $\tilde{K}^{(m)}(j)=\sum_{i=1}^{s} K^{(m)}(i, j)$ – функция Грина марковской цепи $(x_n^{(m)''}, n\geqslant 0)$ при начальном условии $\mathbf{P}\{x_0^{(m)''}=m\}=1$.

Кроме этого, имеет место

$$\hat{K}^{(m)}(0)>\hat{K}^{(m)}(m-1,\ 0). \tag{7.10}$$

Так как $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ невозвратна, то по определению $\tilde{K}^{(m)}(j)$ в силу (5.9) выполняется:

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{K}^{(m)}(0)=0;$$

отсюда и из (7.10) следует, что невозвратная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ не может иметь возвратную вспомогательную марковскую цепь $(x_n'', n\geqslant 0)$' удовлетворяющую условию (7.8). Пункт б) доказан.

Этим доказательство леммы заканчивается.

Лемма 7.8. *Марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ возвратна с положительными состояниями тогда и только тогда, когда $(x_n'', n\geqslant 0)$ возвратна с положительными состояниями.*

Доказательство. Пусть $\left\{u_a : a\in\hat{E},\ u_a>0,\ \sum_{a\in\hat{E}} u_a=1\right\}$ решение стохастической системы уравнений марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j+1)}\,p_{(i,\,j+1)\,(k,\,j)}+\sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j)}\,p_{(i,\,j)\,(k,\,j)}+ \\ \quad +\sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j-1)}\,p_{(i,\,j-1)\,(k,\,j)}=u(k,\ j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{7.11}$$

где $k=\overline{1, s}$; $j\geqslant 0$ и $\left\{\bar{u}_a : a\in E_1,\ u_a>0,\ \sum_{a\in E_1} \bar{u}_a=1\right\}$ – решение стохастической системы уравнений марковской цепи $(x_n'', n\geqslant 0)$:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{j+1}\bar{u}_{j+1}+\gamma_j\bar{u}_j+\lambda_{j-1}\bar{u}_{j-1}=\bar{u}_j. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{7.12}$$

Просуммировав (7.11) по $k=\overline{1, s}$ и, имея в виду обозначения μ_j, λ_j и γ_j, получаем

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{j+1}\left(\sum_{k=1}^{s} u_{(k,\, j+1)}\right)+\gamma_j\left(\sum_{k=1}^{s} u_{(k,\, j)}\right)+\lambda_{j-1}\left(\sum_{k=1}^{s} u_{(k,\, j-1)}\right)=\sum_{k=1}^{s} u_{(k,\, j)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

откуда в силу замечания 1.1 и единственности решений $\{u_a\}$ и $\{\bar{u}_a\}$, следует

$$\sum_{i=1}^{s} u_{(i,\, j)}=\bar{u}_j. \tag{7.13}$$

Так как система уравнений (7.11) всегда имеет хоть одно положительное ограниченное решение, то из (7.13) следует доказательство леммы.

Теорема 7.1. *Вспомогательная марковская цепь $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ эквивалентна марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$. В случае возвратности $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ она должна удовлетворять условию* (7.8).

Доказательство является следствием лемм 7.4, 7.7 и 7.8.

Замечание 7.3. Теорема 1.1 является следствием теоремы 7.1.

Замечание 7.4. Имеет место более общее предложение, чем теорема 7.1, а именно: $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ и $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ эквивалентны.

Доказательство этого предложения довольно громоздкое и мы считаем нецелесообразным приводить его здесь.

§ 8. Итерационный метод вычисления векторов $\{\varkappa^{(\infty)}(j)\}_{j=0}^{\infty}$

Для использования теоремы 7.1 необходимо уметь вычислять координаты векторов $\{\varkappa^{(\infty)}(j)\}$ хотя бы с некоторой точностью. Таким образом получим достаточные условия эргодичности марковских цепей.

В этом параграфе опишем один практический способ вычисления $\{\varkappa^{(\infty)}(j)\}_{j=0}^{\infty}$ для непрерывных марковских цепей. Так как нам важен метод, а не окончательный результат, то ради простоты изложения ограничимся только непрерывными марковскими цепями в фазовом пространстве $E_2=\{i,\ j) : i=0,\ 1;\ j\geqslant 0\}$.

В § 5 было доказано, что при некоторых условиях существует единственная совокупность векторов $\{\varkappa^{(\infty)}(j)\}_{j=0}^{\infty}$, вычисляемая с помощью последовательности расширяющихся до всего фазового пространства кусков II типа.

Очевидно, единственность системы векторов $\{\varkappa^{(\infty)}(j)\}_{j=0}^{\infty}$ следует из единственности положительного решения стохастической системы данной марковской цепи с точностью до умножения из константы. Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 8.1. *Пусть дана полунепрерывная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ в $\hat{E}$. Каждое положительное решение стохастической системы уравнений цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ есть предел положительных решений последовательности стохастических систем уравнений некоторых, расширяющихся до всего фазового пространства, кусков II типа марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$**).

*) Указанный предел в утверждении понимается так же, как и в лемме 5.2.

Доказательство. Пусть $\{u_a : u_a>0,\ a\in\hat{E}\}$ некоторое положительное решение стохастической системы уравнений цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$. Воспользовавшись доказательством леммы 7.8, имеем

$$\sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j+1)} \sum_{k=1}^{s} p_{(i,\,j+1)\,(k,\,j)} = \sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j)} \cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,\,j)\,(k,\,j)} \qquad (j\geqslant 0), \tag{8.1}$$

так как, решая систему уравнений (7.12), получаем

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{j+1}\bar{u}_{j+1}=\lambda_j\bar{u}_j \qquad (j\geqslant 0). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Пусть $\{\mathfrak{U}_{\mathrm{I}}^m\}_{m=0}^{\infty}$ – последовательность фазовых пространств. В них определим куски II типа.

Допустим, что $\{\tilde{u}_a(m) : a\in\mathfrak{U}_{\mathrm{I}}^m,\ \tilde{u}_a(m)>0\}$ положительное решение стохастической системы уравнений куска II типа в фазовом пространстве $\mathfrak{U}_{\mathrm{I}}^m$.

Для него имеет место:

$$\sum_{i=1}^{s} \tilde{u}_{(i,\,j+1)}(m)\cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,\,j+1)\,(k,\,j)} = \sum_{i=1}^{s} u_{(i,\,j)} \cdot \sum_{k=1}^{s} p_{(i,\,j)\,(k,\,j)}, \tag{8.2}$$

когда $0\leqslant j\leqslant m+1$.

Граничные условия выберем следующим образом:

$$q_{(i,\,0)\,(k,\,0)}=p_{(i,\,0)\,(k,\,0)} \qquad (i,\ k=\overline{1,\ s}),$$

а остальные $\{q_{(i,\,m+1)\,(k,\,m+1)} : i,\ k=\overline{1,\ s}\}$ таким образом, чтоб имело место

$$\tilde{u}_{(i,\,j)}(m)=u_{(i,\,j)} \qquad (i=\overline{1,\ s},\ 0\leqslant j\leqslant m).$$

Это возможно в силу (8.1) и (8.2).

Итак, лемма доказана.

Замечание 8.1. Если полунепрерывная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ удовлетворяет условию (5.9), тогда, решая любым способом стохастическую систему уравнений цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$, всегда получим одно и тоже положительное решение с точностью до умножения из множителя.

Пусть дана непрерывная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ в – $\hat{E}$; ее можно, говоря образно, „разложить" на своеобразную „суперпозицию" нескольких марковских цепей.

Определим последовательность марковских моментов $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_0\equiv 0,$$

$$\tau_{k+1}=\inf\{n : n>\tau_k,\quad x_n\in\bar{\Gamma}_{j-1}\cup\bar{\Gamma}_{j+1},\quad x_l\in\bar{\Gamma}_j \quad \text{для всех} \quad n>l\geqslant\tau_k\}.$$

Построим

$$\bar{x}_{2k}=x_{\tau_k}^{(\hat{E})},\quad \bar{x}_{2k-1}=x_{\tau_k-1}^{(\hat{E})}.$$

Случайная функция $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$ является неоднородной (по отношению к времени) марковской цепью.

Однородными полунепрерывными марковскими цепями будут $(\bar{x}'_n,\ n\geqslant 0)$ и $(\bar{x}''_n,\ n\geqslant 0)$, где

$$\bar{x}'_n=\bar{x}_{2n},\quad \bar{x}''_n=\bar{x}_{2n+1}.$$

Марковские цепи $(\bar{x}_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$, $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$, $(\bar{x}'_n,\ n\geqslant 0)$ и $(\bar{x}''_n,\ n\geqslant 0)$ в силу их определений и леммы 2.2 эквивалентны.

Вычислим условные вероятности перехода через один шаг для марковской цепи $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$.

Имеем

$$\lambda_i(j)=\mathbf{P}\{\bar{x}_{2k}=(i,\ j+1)\,|\,\bar{x}_{2k-1}=(i,\ j)\}=$$
$$=\frac{\mathbf{P}\{x_1^{(\hat{E})}=(i,\ j+1)\,|\,x_0^{(\hat{E})}=(i,\ j)\}}{\mathbf{P}\{x_1^{(\hat{E})}\in\bar{\Gamma}_{j-1}\cup\bar{\Gamma}_{j+1}\,|\,x_0^{(\hat{E})}=(i,\ j)\}}=\frac{p_{(i,j)\,(i,j+1)}}{p_{(i,j)\,(i,j+1)}+p_{(i,j)\,(i,j-1)}}\qquad (j\geqslant 0);$$

аналогично

$$\mu_i=\mathbf{P}\{\bar{x}_{2k}=(i,\ j-1)\,|\,\bar{x}_{2k-1}=(i,\ j)\}=\frac{p_{(i,j)\,(i,j-1)}}{p_{(i,j)\,(i,j+1)}+p_{(i,j)\,(i,j-1)}}\qquad (j\geqslant 1)^{*)}.$$

Дальше получаем

$$\alpha_{kl}(j)=\mathbf{P}\{\bar{x}_{2k+1}=(l,\ j)\,|\,\bar{x}_{2k}=(k,\ j)\}=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}\{x_{m+1}^{(\hat{E})}=(l,\ j+1),$$
$$x_n^{(\hat{E})}\in\bar{\Gamma}_j,\quad \text{для всех}\quad m\geqslant n\geqslant 0\,|\,x_0^{(\hat{E})}=(k,\ j)\}+\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{P}\{x_{m+1}^{(\hat{E})}=(l,\ j-1),$$
$$x_n^{(\hat{E})}\in\bar{\Gamma}_j,\quad \text{для всех}\quad m\geqslant n\geqslant 0\,|\,x_0^{(\hat{E})}=(k,\ j)\}.$$

Суммы в правой стороне вычисляются обычным способом с помощью гармонических функций (см. § 3).

Пусть $\tilde{E}=\{0,1\}\times\hat{E}$, где $\{0,1\}$ – множество из двух элементов 0 и 1; тогда из $(\bar{x}_n,\ n\geqslant 0)$ получим однородную марковскую цепь $(x_n,\ n\geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\tilde{E}$, если

$$\bar{\bar{x}}_n=\begin{cases}(0,\ i,\ j),\ \text{если}\ n=2k\ \text{и}\ \bar{x}_n=(i,\ j);\ i=\overline{1,\ s};\ j\geqslant 0,\\(1,\ k,\ l),\ \text{если}\ n=2k+1\ \text{и}\ x_n=(k,\ l);\ k=\overline{1,\ s};\ l\geqslant 0.\end{cases}$$

Условные вероятности определяются для $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$ следующим образом:

$$\mathbf{P}\{x_{n+1}=a\,|\,\bar{\bar{x}}_n=b\}=$$
$$=\begin{cases}\alpha_{ik}(j),\ \text{если}\ b=(0,\ i,\ j);\ a=(1,\ k,\ j);\ j\geqslant 0;\ i,\ k=\overline{1,\ s},\\ \lambda_i(j),\ \text{если}\ b=(1,\ i,\ j);\ a=(0,\ i,\ j+1);\ j\geqslant 0;\ i=\overline{1,\ s},\\ \mu_i(j),\ \text{если}\ b=(1,\ i,\ j);\ a=(0,\ i,\ j-1);\ j\geqslant 1;\ i=\overline{1,\ s},\\ 0\quad \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

где $i,\ k=\overline{1,\ s}$. Марковские цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$ эквивалентны и, кроме того, $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$ является своеобразной „суперпозицией“ нескольких марковских цепей.

---

*) Здесь, если $p_{(i,j)\,(i,j+1)}=p_{(i,j)\,(i,j-1)}=0$, то $\lambda_i(j)$ и $\mu_i(j)$ можно брать любые, лишь бы имело место $\lambda_i(j)+\mu_i(j)=1$ и $\lambda_i(j)\geqslant 0$ и $\mu_i(j)\geqslant 0$.

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik}(j)\cdot p_i(j) = q_k(j), \quad k=\overline{1,\ s} \quad (j\geqslant 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_k(j+1)\,q_k(j+1)+\lambda_k(j-1)\,q_k(j-1)=p_k(j) \quad (k=\overline{1,\ s};\ \ j\geqslant 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{8.3}$$

при $\lambda_k(-1)\equiv 0$ $(k=\overline{1,\ s})$ и неизвестных $\{p_i(j),\ q_i(j)\colon i=\overline{1,\ s};\ j\geqslant 0\}$ служит стохастической системой уравнений для цепи $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$, где, в случае существования суммируемого положительного решения $\{p_i(j),\ q_i(j)\ :\ i=\overline{1,\ s};\ j\geqslant 0\}$ т.е.:

$$\sigma=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(p_i(j)+q_i(j)\right)\right)< +\infty,$$

имеет место:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\bar{\bar{x}}_n=(0,\ i,\ j)\}=\frac{p_i(j)}{\sigma}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\bar{\bar{x}}_n=(1,\ i,\ j)\}=\frac{q_i(j)}{\sigma}$$

каким бы ни было начальное распределение.

Исследуем некоторые полезные нам свойства цепи $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$.

I. Если стохастическая система уравнений цепи $(x_n^{(E)},\ n\geqslant 0)$ имеет единственное положительное решение с точностью до умножения из множителя, то таким же единственным решением обладает система (8.3).

Доказательство следует из определения упомянутых марковских цепей и леммы 2.2.

II. Если выполнено условие свойства I, тогда

$$\sum_{i=1}^{s} p_i(j)=\sum_{i=1}^{s} q_i(j) \qquad (j\geqslant 0). \tag{8.4}$$

Доказательство. Просуммировав по k первое уравнение в системе (8.3), имеем

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} \alpha_{ik}(j)p_i(j)=\sum_{k=1}^{s} q_k(j), \tag{8.5}$$

откуда получаем (8.4), так как

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}(j)=1 \qquad (j\geqslant 0).$$

III. В случае выполнения условия свойства I имеет место:

$$\sum_{k=1}^{s} \mu_k(j+1)\,q_k(j+1)=\sum_{k=1}^{s} \lambda_k(j)\,q_k(j) \qquad (j\geqslant 0).$$

Доказательство. В (8.3), исключив $p_i(j)$ и просуммировав по k, имеем

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{s} \mu_i(j+1)q_i(j+1)+\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(j)\,q_i(j)=\sum_{i=1}^{s} q_i(j+1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

откуда получаем

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} \mu_i(j+1)\, q_i(j+1)}{\sum_{i=1}^{s} q_i(j+1)} \cdot \sum_{i=1}^{s} q_i(j+1) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(j)\, q_i(j)}{\sum_{i=1}^{s} q_i(j)} \cdot \sum_{i=1}^{s} q_i(j).$$

Итак, свойство доказано.

Замечание 8.2. Коэффициенты вспомогательной цепи $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ (см. определение 7.1) для марковской цепи $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$ определяются следующим образом:

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(j)\, q_i(j)}{\sum_{i=1}^{s} q_i(j)}, \qquad \mu_j = \frac{\sum_{i=1}^{s} \mu_i(j)\, q_i(j)}{\sum_{i=1}^{s} q_i(j)}, \qquad \gamma \equiv 0$$

и, кроме этого, при выполнении условия свойства I для марковской цепи $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$ применима теорема 7.1.

Доказательство является следствием свойства I и эквивалентности цепей $(\bar{x}_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$, $(\bar{x}'_n,\ n\geqslant 0)$, $(\bar{x}''_n,\ n\geqslant 0)$, $(\bar{\bar{x}}_n,\ n\geqslant 0)$.

Для непрерывной марковской цепи $(x_n^{(E_2)},\ n\geqslant 0)$ в E_2 стохастическая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1(j)p_1(j) + \big(1-\alpha_0(j)\big)\, p_0(j) = q_0(j), \\ \big(1-\alpha_1(j)\big)\, p_1(j) + \alpha_0(j)p_0(j) = q_1(j), \\ \mu_1(j+1)\, q_1(j+1) + \lambda_1(j-1)\, q_1(j-1) = p_1(j), \\ \mu_0(j+1)\, q_0(j+1) + \lambda_0(j-1)\, q_0(j-1) = p_0(j), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{8.6}$$

где $\alpha_1(j)=\alpha_{01}(j)$, $\alpha_0(j)=\alpha_{10}(j)$.

Заметим, что, если нам известны величины $a(j)=\dfrac{q_1(j)}{q_0(j)}$, тогда легко можно найти $\{q_i(j) : i=0,1;\ j\geqslant 0\}$ $q_0(j)$ с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_0(j+1)\, q_0(j+1) + \mu_1(j+1)\, q_1(j+1) = \lambda_0(j)\, q_0(j) + \lambda_1(j)\, q_1(j) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{8.7}$$

(предварительно, например, потребовав, чтобы $q_0(j)+q_1(0)=1$).

Построим итерационные формулы:

$$\left\{\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n(j)=\dfrac{\alpha_0(j)+\Big(1-\alpha_1(j)\Big)\cdot b_n(j)}{\Big(1-\alpha_0(j)\Big)+\alpha_1(j)\cdot b_n(j)} \\
b_n(j)=\dfrac{\mu_1(j+1)\left[\dfrac{\lambda_1(j)+\dfrac{\lambda_0(j)}{a_{n-1}(j)}}{\mu_1(j+1)+\dfrac{\mu_0(j+1)}{a_{n-1}(j+1)}}\right]+\lambda_1(j-1)\left[\dfrac{\mu_1(j)+\dfrac{\mu_0(j)}{a_{n-1}(j)}}{\lambda_1(j-1)+\dfrac{\lambda_0(j-1)}{a_{n-1}(j-1)}}\right]}{\mu_0(j+1)\left[\dfrac{\lambda_0(j)+\lambda_1(j)\,a_{n-1}(j)}{\mu_0(j+1)+\mu_1(j+1)\,a_{n-1}(j)}\right]+\lambda_0(j-1)\left[\dfrac{\mu_0(j)+\mu_1(j)\,a_{n-1}(j)}{\lambda_0(j-1)+\lambda_1(j-1)\,a_{n-1}(j-1)}\right]}\cdot a_{n-1}(\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right. \qquad (8.$$

Лемма 8.2. *Если система уравнений* (8.6) *имеет единственное положительное решение* $\{p_i(j),\ q_i(j) : i=1,0;\ j\geqslant 0\}$ *с точностью до умножения из множителя, тогда отношения, построенные следующим образом:*

$$a(j)=\frac{q_1(j)}{q_0(j)}, \qquad b(j)=\frac{p_1(j)}{p_0(j)} \tag{8.9}$$

являются точкой неподвижности итерационной системы (8.9). *И, обратно, если существует*

$$\lim_{n\to\infty} a_n(j)=a(j), \quad \lim_{n\to\infty} b_n(j)=b(j) \tag{8.10}$$

при некоторых начальных значениях $\{a_0(j),\ b_0(j) : a_0(j)\geqslant 0;\ b_0(j)\geqslant 0;\ j\geqslant 0\}$, *тогда имеет место* (8.9).

Доказательство. Справедливость первой части леммы проверяется прямым элементарным вычислением.

Пусть существуют пределы (8.10), тогда, обозначив $a(j)$ через $\dfrac{q_1(j)}{q_0(j)}$ и $b(j)$ через $\dfrac{p_1(j)}{p_0(j)}$ и приняв, что

$$\frac{\lambda_1(j)+\dfrac{\lambda_0(j)}{a(j)}}{\mu_1(j+1)+\dfrac{\mu_0(j+1)}{a(j+1)}}=\frac{q_1(j+1)}{q_1(j)}, \qquad \frac{\lambda_0(j)+\lambda_1(j)\,a(j)}{\mu_0(j+1)+\mu_1(j+1)\,a(j+1)}=\frac{q_0(j+1)}{q_0(j)},$$

в силу (8.8) получим

$$\left\{\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{q_1(j)}{q_0(j)}=\dfrac{\alpha_0(j)\cdot p_0(j)+\Big(1-\alpha_1(j)\Big)\cdot p_1(j)}{\Big(1-\alpha_0(j)\Big)\,p_0(j)+\alpha_1(j)\cdot p_1(j)} \qquad (j\geqslant 0), \\
\dfrac{p_1(j)}{p_0(j)}=\dfrac{\mu_1(j+1)\cdot q_1(j+1)+\lambda_1(j-1)\,q_1(j-1)}{\mu_0(j+1)\cdot q_0(j+1)+\lambda_0(j-1)\,q_0(j-1)} \\
\mu_1(j+1)\,q_1(j+1)+\mu_0(j+1)\,q_0(j+1)=\lambda_1(j)\,q_1(j)+\lambda_0(j)\cdot q_0(j). \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right. \tag{8.11}$$

Допустим, что

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c(j)\cdot p_1(j)=\mu_1(j+1)\,q_1(j+1)+\lambda_1(j-1)\,q_1(j-1), \\ c(j)\cdot p_0(j)=\mu_0(j+1)\,q_0(j+1)+\lambda_0(j-1)\,q_0(j-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad (j\geqslant 0) \tag{8.12}$$

где $0<c(j)<+\infty$ для каждого конечного $j\geqslant 0$. Из (8.11) в силу (8.12) получаем

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1(j)=\Big(1-\alpha_1(j)\Big)\;c(j)p_1(j)+\alpha_0(j)c(j)p_0(j), \\ q_0(j)=\Big(1-\alpha_0(j)\Big)\;c(j)p_0(j)+\alpha_1(j)c(j)p_1(j). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{8.13}$$

Выбрав $\{p_i(j)\cdot c(j): i=0{,}1;\ j\geqslant 0\}$ так, чтоб имело место

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c(j)\;\Big(p_1(j)+p_0(j)\Big)=q_1(j)+q_0(j), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

заканчиваем доказательство леммы.

Систему (8.8) запишем следующим образом:

$$\begin{cases} a_m(j)=f_j\,\Big(b_m(j)\Big), \\ b_m(j)=\varphi_j\,\Big(a_{m-1}(j-1),\ a_{m-1}(j),\ a_{m+1}(j+1)\Big). \end{cases} \quad (j\geqslant 0).$$

Построим области изменения аргументов $\{x_m(j)\}_{m,j=0}^{\infty}$:

$$D_0(j)=\{\bar a_0(k)\geqslant x_0(k)\geqslant \underline{a}(k):\ k=j-1,\ j,\ j+1\},$$

где $\bar a_0(j)\geqslant a(j)\geqslant \underline{a}_0(j)\geqslant 0$ любые и фиксированы;

$$D_m(j)=\{\bar a_m(k)\geqslant x_m(k)\geqslant \underline{a}_0(k):\ k=j-1,\ j,\ j+1\},$$

где

$$\bar a_m(j)=\min\Big[\bar a_{m-1}(j),\ \sup_{(x_{m-1}(j-1),\,x_{m-1}(j),\,x_{m-1}(j+1))\in D_{m-1}(j)} \times$$

$$\times f_j\Big(\varphi_j(x_{m-1}(j-1),\ x_{m-1}(j),\ x_{m-1}(j+1))\Big)\Big],$$

$$\underline{a}_m(j)=\max\Big[a_{m-1}(j),\ \inf_{(x_{m-1}(j-1),\,x_{m-1}(j),\,x_{m+1}(j+1))\in D_{m-1}(j)} \times$$

$$\times f_j\Big(\varphi_j(x_{m-1}(j-1),\ x_{m-1}(j),\ x_{m-1}(j+1))\Big)\Big]^{*)}.$$

Имеет место

$$\bar a_m(j)\geqslant a(j)\geqslant \underline{a}_m(j).$$

*) Конечно, $D_m(0)=\{\bar a_m(0)\geqslant x_m(0)\geqslant \underline{a}_m(0),\ \bar a_m(1)\geqslant x_m(1)\geqslant \underline{a}_m(1)\}$.

Обозначим

$$\tilde{\rho}\left(D_m(j)\right)=\max_{k=j-1,\,j,\,j+1}\{\bar{a}_m(k)-\underline{a}_m(k)\},$$

$$\hat{\rho}\left(f_j\left(\varphi_j\left(D_m(j)\right)\right)\right)=\bar{a}_{m+1}(j)-\underline{a}_{m+1}(j).$$

Лемма 8.3. *Если выполняется условие*

$$\hat{\rho}\left(f_j\left(\varphi_j\left(D_0(j)\right)\right)\right)\leqslant c_0\tilde{\rho}\left(D_0(j)\right)\qquad(j\geqslant 0),\tag{8.14}$$

где $c_0<1$, *тогда существуют пределы* (8.10), *какие бы ни были исходные приближения* $\{a_0(j):a_0(j)\geqslant 0,\,j\geqslant 0\}$.

Доказательство очевидно, ввиду монотонности функций $f_j\left(\varphi_j(\ldots)\right)$ по каждому ее аргументу прификсированных остальных аргументах.

Имея в виду, что

$$f_j\left(b_n(j)\right)=\frac{\alpha_0(j)+\left(1-\alpha_1(j)\right)\cdot b_n(j)}{\left(1-\alpha_0(j)\right)+\alpha_1(j)\cdot b_n(j)},$$

для любого $D_0(j)$ справедливо

$$\hat{\rho}\left(f_j\left(\varphi_j\left(D_0(j)\right)\right)\right)<\bar{d}_j-\underline{d}_j,$$

где

$$\bar{d}_j=\max\left\{\frac{\alpha_0(j)}{1-\alpha_0(j)},\ \frac{1-\alpha_1(j)}{\alpha_1(j)}\right\},\quad \underline{d}_j=\min\left\{\frac{\alpha_0(j)}{1-\alpha_0(j)},\ \frac{1-\alpha_1(j)}{\alpha_1(j)}\right\}.$$

Итак, справедливость (8.14) остается проверять в тех случаях, когда $\bar{d}_j\geqslant\bar{a}_0(j)\geqslant a(j)\geqslant\underline{a}_0(j)\geqslant\underline{d}_j$.

Проверка условия (8.14) в конкретных случаях не представляет большого труда*).

Например, можно доказать, что (8.14) всегда имеет место при условии:

$$0<c_1\leqslant\alpha_1(j)\leqslant c_2<1,\quad 0<c_1\leqslant\alpha_0(j)\leqslant c_2<1.$$

Доказательство этого предложения из-за его громоздкости опускаем.

С помощью этого итерационного метода можно легко и быстро получить оценки снизу и сверху величин $\{a(j):j\geqslant 0\}$.

Лемма 8.4. *Пусть* $\{\tilde{u}_a: a\in\hat{E}\}$ *положительное решение стохастической системы уравнений марковской цепи* $(\bar{x}'_n,\,n\geqslant 0)$, *тогда при выполнении условия свойства* I *справедливо*

$$\frac{\tilde{u}(i,j)}{q_i(j)}=\mathrm{const}\qquad(i=\overline{1,\,s},\quad j\geqslant 0).\tag{8.15}$$

---

*) Если условие (8.14) не выполняется, тогда можно систему (8.8) преобразовать так, чтоб итерационная последовательность $\{a_n(j),\ b_n(j):j\geqslant 0\}_{n=0}^{\infty}$ сходилась при каждом $j\geqslant 0$.

Доказательство. Заменив в системе (8.3) $q_k(j)$ на $u_{(k,\,j)}$ и исключив $\{p_k(j)\}$, получаем стохастическую систему уравнений марковской цепи $(\bar{x}'_n,\ n\geqslant 0)$.

Итак, лемма доказана.

Лемма 8.5. *Если $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ возвратна, $(\hat{x}_n^{(j)},\ n\geqslant 0)$ — кусок I типа, в фазовом пространстве $\mathfrak{U}_j^j$ $(j\geqslant 0)$ и $K_j(r,\ i)=K\big((r,\ j),\ (i,\ j)\big)$ $(i,\ r=\overline{1,\ s})$ — функция Грина цепи $(\hat{x}_n^{(j)},\ n\geqslant 0)$. Тогда*

$$\frac{p(i,\,j)}{p(k,\,l)}=\frac{\sum\limits_{r=1}^{s}K_j(r,\ i)\cdot\tilde{u}(r,\,j)}{\sum\limits_{r=1}^{s}K_l(r,\ k)\cdot\tilde{u}(r,\,l)}\qquad (i,\ r=\overline{1,\ s};\quad j,\ l\geqslant 0),\tag{8.16}$$

где $\{p_a : a\in\hat{E}\}$ положительное решение стохастической системы уравнений цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$.

Доказательство. Марковские цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и $(\bar{x}'_n,\ n\geqslant 0)$ возвратны. Справедливо тождество:

$$\sum_{n=\tau_0}^{\tau_N}\chi_{(i,\,j)}(x_n^{(\hat{E})})=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=\tau_n}^{\tau_{n+1}}\chi_{(i,\,j)}(x_l^{(\hat{E})})\Big)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\Big[\sum_{r=1}^{s}\Big(\chi_{(r,\,j)}(x_{\tau_n}^{(\hat{E})})\cdot\sum_{l=\tau_n}^{\tau_{n+1}}\chi_{(i,\,j)}(x_l^{(\hat{E})})\Big)\Big].$$

Имеет место

$$\mathbf{M}_{(r,\,j)}\Big(\sum_{l=\tau_n}^{\tau_{n+1}}\chi_{(i,\,j)}(x_l^{(\hat{E})})\Big)=\mathbf{M}_{(r,\,j)}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{(i,\,j)}(\hat{x}_n^{(j)})\Big)=K_j(r,\ i)$$

для всех $n\geqslant 0$. В силу закона больших чисел получаем

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N-1}\Big[\sum\limits_{r=1}^{s}\Big(\chi_{(r,\,j)}(x_{\tau_n}^{(\hat{E})})\cdot\sum\limits_{l=\tau_n}^{\tau_{n+1}}\chi_{(i,\,j)}(x_l^{(\hat{E})})\Big)\Big]}{\sum\limits_{n=0}^{N-1}\Big[\sum\limits_{r=1}^{s}\Big(\chi_{(r,\,j)}(x_{\tau_n}^{(\hat{E})})\cdot\mathbf{M}_{(r,\,j)}\Big(\sum\limits_{l=\tau_n}^{\tau_{n+1}}\chi_{(i,\,j)}(x_l^{(\hat{E})})\Big)\Big)\Big]}=1\right\}=1.$$

Тогда следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{p(i,\,j)}{p(k,\,l)}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=0}^{N}\chi_{(i,\,j)}(x_n^{(\hat{E})})}{\sum\limits_{n=0}^{N}\chi_{(k,\,l)}(x_n^{(\hat{E})})}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=\tau_0}^{\tau_N}\chi_{(i,\,j)}(x_n^{(\hat{E})})}{\sum\limits_{n=\tau_0}^{\tau_N}\chi_{(k,\,l)}(x_n^{(\hat{E})})}=\right.$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{s} \chi_{(r,j)}(\bar{x}'_n)\cdot K_j(r,i)}{\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=1}^{s} \chi_{(r,l)}(\bar{x}'_n)\cdot K_l(r,k)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{r=1}^{s} K_j(r,i)\cdot \dfrac{\sum_{n=0}^{N-1}\chi_{(r,j)}(\bar{x}'_n)}{\sum_{n=0}^{N-1}\chi_{(i,j)}(\bar{x}'_n)}}{\sum_{r=1}^{s} K_l(r,k)\cdot \dfrac{\sum_{n=0}^{N-1}\chi_{(r,l)}(\bar{x}'_n)}{\sum_{n=0}^{N-1}\chi_{(i,j)}(\bar{x}'_n)}} = \left.\frac{\sum_{r=1}^{s} K_j(r,i)\cdot \bar{u}_{(r,j)}}{\sum_{r=1}^{s} K_l(r,k)\cdot \bar{u}_{(r,l)}}\right\} = 1.$$

Лемма доказана.

Из (8.16) и (8.15) получаем

$$\frac{p_{(i,j)}}{p_{(k,l)}} = \frac{\sum_{r=1}^{s} K_j(r,i)\cdot q_r(j)}{\sum_{r=1}^{s} K_l(r,k)\cdot q_r(l)}. \tag{8.17}$$

Пользуясь (8.17) и итерационным методом, можно приближенно вычислить значения инвариантной меры (стационарного распределения) марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\hat{E}$.

§ 9. Замена фазового пространства

Если для полунепрерывной марковской цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ справедливо:

$$\frac{\sum_{k=1}^{s} p_{(i,j)(k,j+1)}}{\sum_{k=1}^{s} p_{(i,j)(k,j-1)}} = c_j \qquad (j\geqslant 1), \tag{9.1}$$

тогда можно построить вспомогательную марковскую цепь $(x''_n, n\geqslant 0)$ для $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$, не вычисляя величины $\{\eta(i,j)\colon i=\overline{1,s};\ j\geqslant 0\}$.

Оказывается, иногда можно преобразовать непрерывную марковскую цепь таким образом, чтобы имело место условие (9.1).

Сначала опишем способ, как можно данной непрерывной марковской цепи построить эквивалентную полунепрерывную цепь в другом пространстве.

Пусть имеется непрерывная марковская цепь $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$, описываемая стохастической системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_1(j+1)p_i(j+1)+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}(j)p_k(j)+\lambda_i(j-1)=p_i(j) \quad (i=\overline{1,\ s},\ j\geqslant 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{9.2}$$

где

$$\mu_k(j)+\lambda_k(j)+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(j)=1,\quad j\geqslant 0,\quad \mu_i(0)\equiv 0,\quad i=\overline{1,\ s}.$$

Построим фазовое пространство $\tilde{E}=\left\{(i,\ j),\ \left(i,\ j+\frac{1}{2}\right):i=\overline{1,\ s};\ j\geqslant 0\right\}$ и марковскую цепь $(\tilde{z}_n,\ n\geqslant 0)$ в $\tilde{E}$ с условными вероятностями перехода через один шаг:

$$P\{\tilde{z}_{n+1}=b\,|\,\tilde{z}_n=a\}=\tilde{p}_{ab}=$$

$$=\begin{cases} \tilde{\alpha}_{ik}(j), & \text{если}\quad a=(i,\ j);\quad b=(k,\ j);\quad j\geqslant 0;\quad i,\ k=\overline{1,\ s};\quad i\neq k, \\ \tilde{\lambda}_i(j), & \text{если}\quad a=(i,\ j);\quad b=\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right);\quad j\geqslant 0;\quad i=\overline{1,\ s}; \\ \tilde{\mu}_i(j), & \text{если}\quad a=(i,\ j);\quad b=\left(i,\ j-\frac{1}{2}\right);\quad j\geqslant 0;\quad i=\overline{1,\ s}; \\ \tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right), & \text{если}\quad a=\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right),\quad b=(i,\ j+1);\quad j\geqslant 0;\quad i=\overline{1,\ s}; \\ \mu_i\left(j+\frac{1}{2}\right), & \text{если}\quad a=\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right);\quad b=(i,\ j);\quad j\geqslant 0;\quad i=\overline{1,\ s}; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\sum_{i=1}^{s}\tilde{\alpha}_{ki}(j)+\tilde{\lambda}_k(j)+\tilde{\mu}_k(j)=1,\quad \mu_k(0)\equiv 0,$$

$$\tilde{\lambda}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)+\tilde{\mu}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (j\geqslant 0,\ k=\overline{1,\ s}). \tag{9.3}$$

Определим последовательность марковских моментов $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\tau_0(\omega)=\inf\{n:\tilde{z}_n\in\hat{E}\}$$

и

$$\tau_{k+1}(\omega)=\inf\left\{n:n>\tau_k(\omega),\ \tilde{z}_n\in\{(i,\ j+1),\ (k,\ j),\ (i,\ j-1):\ k=\overline{1,\ s}\}\right\},$$

если

$$\tilde{z}_{\tau_k}=(i,\ j) \qquad (i=\overline{1,\ s};\ j\geqslant 0).$$

Положим

$$\tilde{z}_{\tau_n}=\tilde{z}'_n.$$

Случайная функция $(\tilde{z}'_n,\ n\geqslant 0)$ является непрерывной однородной марковской цепью в $\hat{E}$ с условными вероятностями перехода через один шаг:

$$\mathbf{P}\{\tilde{z}'_{n+1}=b\mid \tilde{z}'_n=a\}=\tilde{p}'_{ab}=$$

$$=\begin{cases}\tilde{\alpha}_{(i,k)}(j), & \text{если } a=(i,j),\ b=(k,j),\ j\geqslant 0,\ i\neq k;\\ \left(\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot\tilde{\mu}_i(j)+\tilde{\mu}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot\tilde{\lambda}_i(j)\right), & \text{если } a=b=(i,j),\ a,\ b\in\hat{E};\\ \tilde{\lambda}_i(j)\cdot\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right), & \text{если } a=(i,j),\ b=(i,j+1),\ j\geqslant 0,\ i=\overline{1,s};\\ \tilde{\mu}_i(j)\cdot\tilde{\mu}_i\left(j-\frac{1}{2}\right), & \text{если } a=(i,j),\ b=(i,j-1),\ j\geqslant 1,\ i=\overline{1,s};\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Потребуем, чтоб марковские цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и $(\tilde{z}'_n,\ n\geqslant 0)$ отличались друг от друга лишь преобразованием, описанным в лемме 2.1, то есть условные вероятности удовлетворяли бы

$$\frac{p_{ab}}{\tilde{p}'_{ab}}=c_a \qquad (a\neq b), \tag{9.4}$$

где $0<c_1\leqslant c_a\leqslant c_2<+\infty,\ a\in\hat{E}$.

Свободно выбираем вероятности $\left\{\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right),\ \tilde{\mu}_i\left(j+\frac{1}{2}\right): i=\overline{1,s};\ j\geqslant 0\right\}$ с соблюдением условия (9.3).

Остальные вероятности $\{\tilde{\lambda}_i(j),\ \tilde{\mu}_i(j),\ \tilde{\alpha}_{ik}(j): i,\ k=(\overline{1,s};\ j\geqslant 0\}$ можно вычислить с помощью системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_i(j)\cdot\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\lambda_i(j)}=c_{(i,j)} & \left((i,j)\in\hat{E}\right),\\ \dfrac{\tilde{\mu}_i(j)\cdot\tilde{\mu}_i\left(j-\frac{1}{2}\right)}{\mu_i(j)}=c_{(i,j)} & \left((i,j)\in\hat{E}\right),\\ \dfrac{\tilde{\alpha}_{ik}(j)}{\alpha_{ik}(j)}=c_{(i,j)} & (i\neq k),\\ \sum\limits_{k=1}^{s}\tilde{\alpha}_{ik}(j)+\tilde{\lambda}_i(j)+\tilde{\mu}_i(j)=1,\end{cases} \tag{9.5}$$

полученной из условия (9.4).

Отсюда имеем

$$c_{(i,j)}=\frac{1}{\dfrac{\lambda_i(j)}{\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{\mu_i(j)}{\tilde{\mu}_i\left(j-\frac{1}{2}\right)}+\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s}\alpha_{ik}},$$

и т.д.

В $(\tilde{z}_n,\ n\geqslant 0)$ можно вложить марковскую цепь $(\tilde{z}''_n,\ n\geqslant 0)$ определенную в фазовом пространстве $\tilde{\tilde{E}}\in\tilde{E}$, которая будет эквивалентна цепям $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ и $(\tilde{z}_n,\ n\geqslant 0)$ и, кроме того, будет определена в другом фазовом пространстве.

Процесс вычисления условных вероятностей для цепи $(\tilde{z}_n,\ n\geqslant 0)$ назовем вставлением дополнительных состояний, что, естественно, согласуется с аналогичным определением в § 6.

Построим кусок I типа цепи $(x_n^{(\hat{E})}, n\geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$ $(n_2>n_1>1)$. С помощью вышеописанного способа можно вставить дополнительные состояния $\tilde{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}=\left\{\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right):i=\overline{1,\ s};\ n_1\leqslant j\leqslant n_2\right\}$ в $\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2}$.

Заметим, что при вставлении дополнительных состояний $\tilde{\mathfrak{U}}_{n_1}^{n_2}$ базовые гармонические функции $\{f_b(a):a\in\mathfrak{U}_{n_1}^{n_2};\ b\in\Gamma'_{n_1}\cup\Gamma''_{n_2}\}$ не меняются, и кроме того,

$$f_b\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right)=\tilde{\lambda}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot f_b(i,\ j+1)+\tilde{\mu}_i\left(j+\frac{1}{2}\right)f_b(i,\ j) \tag{9.6}$$

для всех $b\in\Gamma'_{n_1}\cup\Gamma''_{n_2}$, $n_1\leqslant j<n_2$ и $i=\overline{1,\ s}$.

Пусть $I=\{d_i\}_0^\infty\in\left\{\frac{j}{2}:j=0,1,2,\ldots\right\}$, $\tilde{\tilde{E}}=\{(k,d_n):k=\overline{1,\ s};\ n=0,\ 1,\ \ldots\}$ и $(\tilde{z}''_n,\ n\geqslant 0)$ вложенная марковская цепь $\left(\text{в цепь } (\tilde{z}_n,\ n\geqslant 0)\right)$ в фазовом пространстве $\tilde{\tilde{E}}$. Условные вероятности вспомогательной марковской цепи $(x''_n,\ n\geqslant 0)$ тогда имеют вид:

$$\lambda_n=\sum_{k=1}^{s}G_{d_{n+1}}(k,\ d_n)\cdot\varkappa^{(\infty)}(k,\ d_n),\quad \gamma_n\equiv 0,\quad \mu_n=1-\lambda_n;$$

последовательности $\{G_{d_n}(k,\ d_n):n=0,\ 1,\ \ldots\}$ и $\{\varkappa^{(\infty)}(k,\ d_n):k=\overline{1,\ s};\ n=0,1,2,\ldots\}$ определены в § 1.

Условие (9.1) для марковской цепи $(\tilde{z}''_n,\ n\geqslant 0)$ имеет место, когда выполняется

$$G_{d_{n+1}}(k,\ d_n)\equiv G_{d_{n+1}}(d_n)\qquad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{9.7}$$

Лемма 9.1. *Пусть* $d_{n_0}=j+\frac{1}{2}$ $(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *при некотором фиксированном* n_0. *Тогда и только тогда можно подобрать* $\tilde{\lambda}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)$ $\left(\text{и } \tilde{\mu}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)=1-\tilde{\lambda}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)$, *чтоб имело место* (9.7) $\left(\text{при } n_0=j+\frac{1}{2}=n\right)$, *если существует такое* β, *удовлетворяющее*

$$\underline{f}_{d_{n+1}}(k,\ j)=\min\{G_{d_{n+1}}(k,\ j),\ G_{d_{n+1}}(k,\ j+1)\}<\beta<$$
$$<\max\{G_{d_{n+1}}(k,\ j),\ G_{d_{n+1}}(k,\ j+1)\}=\bar{f}_{d_{n+1}}(k,\ j)$$

для всех $k=\overline{1,\ s}$ *и, кроме того,*

$$\tilde{\lambda}_k\left(j+\frac{1}{2}\right)=\frac{|G_{d_{n+1}}(k,\ j+1)-\beta|}{\bar{f}_{d_{n+1}}(k,\ j)-\underline{f}_{d_{n+1}}(k,\ j)}. \tag{9.8}$$

Доказательство непосредственно следует из равенства (9.6).

В некоторых случаях с помощью метода „замены фазового пространства" можно получить достаточные условия эргодичности.

Особенно полезен этот метод, когда мы заранее знаем, что для цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$ (т. е. d_n – целые числа) имеет место условие (9.7), но не знаем величин $\{G_{d_{n+1}}(k,\ d_n):k=\overline{1,\ s}\}$ и, кроме того, $d_{n+1}-d_n>2$, $d_n-d_{n-1}>2$ довольно велики. Тогда, вставляя согласно лемме (9.1), дополнительные состояния $\left\{\left(k,\ j_1+\frac{1}{2}\right),\ \left(k,\ j_2+\frac{1}{2}\right): d_{n-1}\leqslant j_1 < d_n \leqslant j_2 < d_{n+2}\right\}$, сможем построить вспомогательную цепь $(x_n'',\ n\geqslant 0)$ для $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$, не вычисляя $\{G_{d_{n+1}}(k,\ d_{n+1})\}$ и тем самым упростим алгоритм установления эргодичности цепи $(x_n^{(\hat{E})},\ n\geqslant 0)$.

В заключение заметим, что наиболее эффективные достаточные критерии эргодичности можно получить, комбинируя уже полученные методы строения вспомогательной марковской цепи (см. определения 7.1).

Возможные обобщения и конкретные применения построенных критериев автор намерен рассмотреть в других статьях.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность научному руководителю проф. Б. И. Григелионису за постоянное внимание к работе.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
15.XII.1971

Литература

1. Чжун Кай-Лай, Однородные цепи Маркова, М., „Мир", 1964.
2. Ф. Спицер, Принцип случайного блуждания, М., „Мир", 1969.
3. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, М., „Наука", 1966.
4. Е. Б. Дынкин, Граничная теория марковских процессов (дискретный случай) Успехи матем. наук., **XXIV**, вып. 2 (146) (1969), 3–43.
5. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., Физматгиз., 1963.
6. С. Карлин, Основы теории случайных процессов, М., „Мир", 1971.
7. В. А. Малышев, Случайные блуждания, уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости, автоморфизмы Галуа (препринт), Изд. МГУ, 1970.
8. L. L. Doob, Discrete potential theory and boundaries, Journal of mathematics and mechanics, 8 (3) (1955), 433–458.

HOMOGENINIŲ MARKOVO GRANDINIŲ, DEFINUOTŲ SPECIALIOJE FAZINĖJE ERDVĖJE, ERGODIŠKUMO KRITERIJAI. III

Z. Navickas

(*Reziumė*)

Darbe siūlomi nauji homogeninių Markovo grandinių, definuotų specialioje fazinėje erdvėje, būsenų teigiamumo kriterijai, išreikšti sąlyginių perėjimo per vieną žingsnį tikimybių terminais.

Šioje darbo dalyje įrodoma, kad su kiekviena pusiau tolydine Markovo grandine galima susieti jai ekvivalenčią pagalbinę tolydinę Markovo grandinę fazinėje erdvėje $E_1=\{0, 1, 2, \ldots\}$; 8 ir 9 paragrafuose nurodomi būdai, kaip sukonstruoti pastarąją grandinę.

THE CRITERIA FOR THE ERGODICITY OF THE HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS WITH SPECIAL PHASE SPACE. III

Z. Navickas

(*Summary*)

The paper presents some new criteria in terms of one-step transition probabilities (see (1.18)) for the ergodicity of homogeneous Markov chains with a special phase space.

The posobility to connect each semicontinuous Marcov chain with the auxiliary continuous Markov chain having the phase space $E_1=\{0, 1, 2,\ldots\}$ is proved in the present part of the paper. The methods to construct the auxiliary chain are given in § § 8, 9.