УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ЛОКАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ

А. Кароблис

1. Результаты

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ с общей функцией распределения $F(x)$ и характеристической функцией $f(t)$. От величин ξ_j $(j=\overline{1, n})$ потребуем существования вторых моментов $D\xi_j=\sigma^2<\infty$ и для простоты будем считать $M\xi_j=0$.

Через $F_n(x)$ и $p_n(x)$ обозначим функцию распределения и плотность нормированной суммы

$$S_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j,$$

$\alpha_\nu=M\xi_j^\nu$ и $\varkappa_\nu$ – момент и семиинвариант ν-го порядка величины ξ_j.

В настоящей статье исследуются необходимые и достаточные условия оценки остаточного члена в локальных теоремах с асимптотическими разложениями

$$p_n(x)\sim\varphi(x)+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(-\varphi)(x)$$

при $\beta_s=M|\xi_j|^s<\infty$ и $n\to\infty$, где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, l^{-\frac{x^2}{2}}$, а $P_\nu(-\varphi)(x)$ определены так же, как и в [1, стр. 244].

Следует отметить, что И. А. Ибрагимов в [5] получил необходимые и достаточные условия для

$$\max_x\left|p_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right|=O\left(n^{-\frac{s-2+\delta}{2}}\right),\qquad s=2,\ 3,\ \ldots$$

$0<\delta\leqslant 1$, а также аналогичное соотношение для решетчатых величин.

Следуя И. А. Ибрагимову [6], зададимся числовой последовательностью $\bar\alpha_1=0$, $\bar\alpha_2=1$, $\bar\alpha_3, \ldots, \bar\alpha_s$, где $\bar\alpha_3, \bar\alpha_4, \ldots, \bar\alpha_s$ – произвольные числа, которые будем называть „моментами“. По этой последовательности с помощью равенства

$$\bar\varkappa_l=\bar\alpha_l-\sum_{\nu=1}^{l-3}\frac{(l-1)!}{(l-\nu-1)!\,\nu!}\,\bar\alpha_{l-\nu-1}\bar\varkappa_{\nu+1}\tag{1}$$

построим семиинварианты $\bar\varkappa_1, \bar\varkappa_2, \ldots, \bar\varkappa_s$.

Воспользовавшись формулой (10) из [2] для $P(-\varphi)(x)$, положим

$$\bar{P}_\nu(-\varphi)(x)=\varphi(x)\sum\frac{1}{r_1!\,r_2!\dots r_\nu!}\left(\frac{\bar{\varkappa}_3}{3!}\right)^{r_1}\left(\frac{\bar{\varkappa}_4}{4!}\right)^{r_2}\dots\left(\frac{\bar{\varkappa}_{\nu+2}}{(\nu+2)!}\right)^{r_\nu}\times$$
$$\times H_{3r_1+4r_2+\dots+(\nu+2)r_\nu}(x),$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям уравнения

$$r_1+2r_2+\dots+\nu r_\nu=\nu(x),$$

а

$$H_m(x)=m!\sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^l x^{m-2l}}{l!\,(m-2l)!\,2^l}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по x имело место соотношение*

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(-\varphi)(x)+O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) *существовало целое число $N\geq 1$ такое, что* $\max\limits_x p_N(x)<\infty$;

2) *абсолютные моменты распределения $F(x)$ до порядка s включительно были конечны, причем $\alpha_1=\bar{\alpha}_1$, $\alpha_2=\bar{\alpha}_2$, ..., $\alpha_s=\bar{\alpha}_s$;*

3) $\int\limits_{|x|>z} x^s\,dF(x)=O(z^{-1}),\qquad z\to\infty;$

4) $\int\limits_{-z}^{z} x^{s+1}\,dF(x)=O(1),\qquad z\to\infty.$

Теорема 2. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по x*

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(-\varphi)(x)+o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) *выполнялись условия* (1—2) *теоремы* 1;

2) $\int\limits_{|x|>z} x^s\,dF(x)=o(z^{-1});$

3) $\lim\limits_{z\to\infty}\int\limits_{-z}^{z} x^{s+1}\,dF(x)=\bar{\alpha}_{s+1}.$

Далее рссмотрим случай решетчатых распределений. Без потери общности предположим, что величины ξ_j принимают целочисленные значения. Положим

$$P_n(k)=P\left\{\sum_{j=1}^{n}\xi_j=k\right\},\qquad y=y_{nk}=\frac{k-m}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots,\ \text{где}\ m=\sum_{k=-\infty}^{\infty}kP\{\xi_j=k\}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$\sigma\sqrt{n}\,P_n(k)=\varphi(y)+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(-\varphi)(y)+O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) *общий наибольший делитель разностей различных значений, принимаемых с положительной вероятностью, был равен единице*;

2) *выполнялись условия* (2—4) *теоремы* 1.

Теорема 4. *Для того чтобы при $n\to\infty$*

$$\sigma\sqrt{n}\,P_n(k)=\varphi(y)+\sum_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(-\varphi)(y)+o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1) *теоремы* 3, (2) *теоремы* 1, *и* (2—3) *теоремы* 2.

2. Леммы

Следуя Ц.-Г. Эссеену [8], введем обозначения:

$$\lambda_\nu=\sup_{z>0} z\int_{|x|>z} x^{\nu-1}\,dF(x)$$

и

$$\rho_\nu=\sup_{z>0}\left(\left|\int_{|x|\leqslant z} x^{\nu}\,dF(x)\right|+z\int_{|x|>z} x^{\nu-1}\,dF(x)\right),\qquad \nu\geqslant 2. \tag{2}$$

Лемма 1. *При $\nu\geqslant 2$ всегда*

$$\rho_\nu\leqslant\frac{\nu+1}{\nu^{\frac{\nu}{\nu+1}}}\,\rho_{\nu+1}^{\frac{\nu}{\nu+1}}.$$

Доказательство. При нечетном ν справедливость леммы очевидна, так как

$$\rho_\nu\leqslant\beta_\nu,\quad\text{а}\quad \beta_\nu\leqslant\beta_{\nu+1}^{\frac{\nu}{\nu+1}}.$$

Для любого ε: $0<\varepsilon<1$ и четного ν имеем

$$\alpha_\nu=\int_{|x|<\varepsilon\alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}}} x^{\nu}\,dF(x)+\int_{|x|>\varepsilon\alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}}} x^{\nu}\,dF(x)\leqslant\varepsilon^{\nu}\alpha_\nu+\int_{|x|>\varepsilon\alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}}} x^{\nu}\,dF(x).$$

Следовательно,

$$\lambda_{\nu+1}\geqslant\varepsilon\alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}}\int_{|x|>\varepsilon\alpha_\nu^{\frac{1}{\nu}}} x^{\nu}\,dF(x)\geqslant\varepsilon(1-\varepsilon^{\nu})\,\alpha_\nu^{\frac{\nu+1}{\nu}}.$$

Функция $\varepsilon(1-\varepsilon^{\nu})$ имеет максимальное значение $\dfrac{\nu}{(\nu+1)^{\frac{\nu+1}{\nu}}}$, при $\varepsilon=\dfrac{1}{(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}}}$.

Тогда

$$\alpha_\nu \leqslant \frac{\nu+1}{\nu^{\frac{\nu}{\nu+1}}} \lambda_{\nu+1}^{\frac{\nu}{\nu+1}}.$$

Так как $\lambda_{\nu+1} \leqslant \rho_{\nu+1}$ и при четном ν $\alpha_\nu = \rho_\nu$, то $\rho_\nu \leqslant \frac{\nu+1}{\nu^{\frac{\nu}{\nu+1}}} \rho_{\nu+1}^{\frac{\nu}{\nu+1}}$.

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Всегда при* $\nu \geqslant 2$

$$\beta_\nu \leqslant \frac{\nu+1}{\nu^{\frac{\nu}{\nu+1}}} \rho_{\nu+1}^{\frac{\nu}{\nu+1}}. \tag{3}$$

Замечание 1. В дальнейшем мы будем пользоваться только следующими неравенствами:

$$\rho_\nu \leqslant 2\rho_s^{\frac{\nu}{s}} \quad \text{и} \quad \beta_\nu \leqslant 2\rho_s^{\frac{\nu}{s}}, \quad \text{при} \quad \nu < s, \tag{4}$$

существование которых следует из следующих соотношений:

$$\rho_\nu \leqslant \beta_\nu \leqslant \beta_{s-1}^{\frac{\nu}{s-1}} \leqslant 2\rho_s^{\frac{\nu}{s}}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если случайная величина* ξ_j $(j=\overline{1, n})$ *имеет нулевое математическое ожидание, то*

$$|\varkappa_s| \leqslant 4(s-1)!\, \rho_s.$$

Доказательство.

Поскольку $\varkappa_\nu \leqslant (\nu-1)!\, \beta_\nu$ (см. лемму 4 в [7]), то в силу соотношений $\alpha_\nu \leqslant \rho_\nu$, (1) и (4) получаем

$$|\varkappa_s| \leqslant \rho_s + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{(s-1)!}{(s-\nu-1)!} \rho_{s-\nu-1} \beta_{\nu+1} \leqslant \rho_s + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{(s-1)!}{(s-\nu-1)!} 4\rho_s^{\frac{s-\nu-1}{s}} \rho_s^{\frac{\nu+1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{4(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{1}{(s-\nu-1)!} \right) 4(s-1)!\, \rho_s \leqslant 4(s-1)!\, \rho_s,$$

так как выражение в скобках меньше единицы.

Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Семиинварианты можно оценить еще и так:

1) при четном ν

$$|\varkappa_\nu| \leqslant (\nu-1)!\, \rho_\nu; \tag{6}$$

2) при $\nu < s$

$$|\varkappa_\nu| \leqslant 2(\nu-1)!\, \rho_s^{\frac{\nu}{s}}. \tag{7}$$

Эти неравенства следуют из оценки $|\varkappa_\nu| \leqslant (\nu-1)!\, \beta_\nu$ и соотношений (4).

При доказательстве двух следующих лемм нужны неравенства:

$$\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant 2^{\frac{2}{s-2}} \left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}} \tag{8}$$

и

$$\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s+1}} \leqslant 2 \left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}, \tag{9}$$

доказательство которых вытекает из очевидного неравенства

$$\sigma \leqslant 2^{\frac{1}{s}} \rho_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть* ξ_j $(j=\overline{1, n})$ *имеет нулевое математическое ожидание и* $\rho_{s+1} < \infty$, *тогда при*

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{s-1}{s-2}, & \text{если } s \text{ — четное число } (s \neq 2), \text{ в интервале } |t| \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{8s}\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}, \\ 1, & \text{если } s=2 \text{ или } s \text{ — нечетное число } (s>2), \end{cases}$$

в интервале

$$|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

имеет место неравенство

$$\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} P_\nu(it)\right)\right| \leqslant C(s)\, \frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}} \left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\delta} e^{-\frac{t^2}{4}};$$

здесь $c(s)$ — *постоянная, зависящая только от* s.

Доказательство. Пусть s—четное число. Из того, что $\rho_{s+1} < \infty$, в силу следствия 1 следует, что $\beta_s < \infty$. Поэтому

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - \sum_{\nu=0}^{s}\frac{(itx)^\nu}{\nu!}\right) dF(x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!} + \int_{-\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|}} \left[\frac{(itx)^{s+1}}{(s+1)!} + \frac{\theta_1 (itx)^{s+2}}{(s+2)!}\right] dF(x) +$$

$$+ \int_{|x| > \frac{1}{|t|}} \left[\frac{\theta_2 (itx)^s}{s!} - \frac{(itx)^s}{s!}\right] dF(x),$$

где

$$|\theta_i| < 1, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Введем вспомогательную функцию

$$R_s(z) = \int_{|x|>z} x^s\, dF(x).$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{-\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|}} x^{s+2}\,dF(x) = -\int\limits_{0}^{\frac{1}{|t|}} x^{2}\,dR_s(x) = -|t|^{-2} R_s\left(\frac{1}{|t|}\right) +$$

$$+2\int\limits_{0}^{\frac{1}{|t|}} xR_s(x)\,dx \leqslant 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{|t|}} xR_s(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!} + \theta_3 |t|^{s+1} \frac{1}{(s+1)!}\left[\left|\int\limits_{-\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{|t|}} x^{s+1}\,dF(x)\right| +\right.$$

$$\left. + \frac{2|t|}{s+2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{|t|}} xR_s(x)\,dx + (s+1)|t|^{-1} R_s\left(\frac{1}{|t|}\right)\right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!} + \frac{\theta_4\, s+2\,|t|^{s+1}}{(s+1)!}\ \rho_{s+1}$$

и, следовательно,

$$f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu}{2}}} + \frac{\theta_4 |t|^{s+1}}{s!\,\sigma^{s+1} n^{\frac{s+1}{2}}}. \tag{11}$$

Далее обозначим

$$f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + U,$$

где

$$U = \sum_{\nu=2}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu}{2}}} + \frac{\theta_4 |t|^{s+1} \rho_{s+1}}{s!\,\sigma^{s+1} n^{\frac{s+1}{2}}}.$$

При $|t| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{8_s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$, имея в виду (8) и (10), получим, что $|U| < \frac{1}{8}$. Разложим в ряд логарифм характеристической функции

$$\ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \ln(1+U) = \sum_{1\leqslant j\leqslant \frac{s}{2}} (-1)^{j+1}\frac{U^j}{j} + \frac{2\theta_5 U^{\frac{s+2}{2}}}{s}. \tag{12}$$

В силу неравенства $\beta_s \leqslant 2\rho_{s+1}^{\frac{s}{s+1}}$ легко заметить, что ряд $\sum\limits_{\nu=2}^{s} \frac{(it)^\nu \alpha_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu}{2}}}$ мажорируется рядом

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{2^{\frac{1}{s}} \rho_{s+1}^{\frac{1}{s+1}} |t|}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\nu.$$

Те члены, в которых степень t меньше $s+1$, образуют семиинварианты до s-го порядка включительно, а члены, в которых степень t равна или больше $s+1$, приводим к виду остаточного члена

$$\ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=2}^{s}\frac{\varkappa_\nu}{\nu!}\left(\frac{(it)}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\nu+$$

$$+\sum{}'\frac{\theta_6}{(2!)^{l_1}(3!)^{l_2}\ldots(s!)^{l_{s-1}+l_s}j}\left(\frac{2^{\frac{1}{s}}\rho_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}|t|}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{2l_1+3l_2+\ldots+(s+1)l_s}=$$

$$=\sum_{\nu=2}^{s}\frac{\varkappa_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\nu+\sum{}'\frac{\theta_7}{2^j j}\left(\frac{2^{\frac{s+1}{s}}\rho_{s+1}|t|^{s+1}}{\sigma^{s+1}n^{\frac{s+1}{2}}}\right)\times$$

$$\left(\frac{2^{\frac{1}{s}}\rho_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}|t|}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{2l_1+3l_2+\ldots+(s+1)l_s-(s+1)}, \tag{13}$$

где суммирование Σ' производится по всем целым неотрицательным решениям уравнения

$$l_1+l_2+\ldots+l_s=j,\qquad 1\leqslant j\leqslant\frac{s+2}{2}$$

и

$$2l_1+3l_2+\ldots+(s+1)l_s\geqslant s+1.$$

Выражение $\dfrac{2^{\frac{1}{s}}\rho_{s+1}^{\frac{1}{s+1}}|t|}{\sigma\sqrt{n}}$ в силу (9) при $|t|\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{8s}\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$ меньше единицы. Так как число членов в разложении (12) по степеням t меньше $2s^{\frac{s+2}{2}}$, то окончательно получаем, что

$$\ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=2}^{s}\frac{\varkappa_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\nu+\frac{\theta_8 s^{\frac{s+2}{2}}|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s+1}{2}}}. \tag{14}$$

В случае, когда s—нечетное число, вывод последней формулы ничем не отличается от вывода в [1, стр. 219–220].

В силу формулы (14) при $|t|\leqslant\dfrac{\sqrt{n}}{8s}\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$ имеем

$$\ln f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=2}^{s}\frac{\varkappa_\nu(it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}+\frac{\theta_8 s^{\frac{s+2}{2}}|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}.$$

Введем многочлены $P_\nu(it)$ и $\overline{P}_\nu(it)$:

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{(it)^{\nu+2}\varkappa_{\nu+2}}{(\nu+2)!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu}{2}}}\right\}=1+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(it)+\sum_{\nu=s-1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu\overline{P}_\nu(it),$$

где $\overline{P}_\nu(it)$ – многочлены, в которых $\varkappa_{s+2}=\varkappa_{s+3}=\ldots=0$.

Тогда

$$f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\exp\left\{\sum_{\nu=0}^{s-2}\frac{\varkappa_{\nu+2}(it)^{\nu+2}}{(\nu+2)!\,\sigma^{\nu+2}n^{\frac{\nu}{2}}}+\frac{\theta_8 s^{\frac{s+2}{2}}|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\right\}=$$

$$=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(it)\right)+R_n(t). \tag{15}$$

Здесь

$$R_n(t)=\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{s}\frac{\varkappa_\nu(it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}\left(\exp\left\{\frac{s^{\frac{s+2}{2}}\theta_8|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\right\}-1\right)+$$

$$+e^{-\frac{t^2}{2}}\sum_{\nu=s-1}^{\infty}\bar{P}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}. \tag{16}$$

В силу (8–10) в интервале $|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|\sum_{\nu=3}^{s}\frac{\varkappa_\nu(it)^\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right|\leqslant\sum_{\nu=3}^{s}\frac{\beta_\nu|t|^\nu}{\nu\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant t^2\sum_{\nu=3}^{s}\frac{2^{\frac{2(\nu-2)}{s-2}}}{\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\left[\frac{\sqrt{n}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right]^{\nu-2}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{\nu-2}{s-2}}\leqslant$$

$$\leqslant 4t^2\sum_{\nu=3}^{s}\frac{1}{\nu(8s)^{\nu-2}}\leqslant\frac{t^2}{18} \tag{17}$$

и

$$\exp\left\{\frac{s^{\frac{s+2}{2}}\theta_8|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\right\}-1\leqslant\frac{s^{\frac{s+2}{2}}\theta_8|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{s^{\frac{s+2}{2}}\theta_8|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{2^{\frac{s-1}{2}}\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\right\}\leqslant C(s)\frac{|t|^{s+1}\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}n^{\frac{s-1}{2}}}\,l^{\frac{s^2}{20}}. \tag{18}$$

Осталось оценить

$$\sum_{\nu=s-1}^{\infty}\bar{P}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu},\quad\text{при}\quad|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}.$$

Согласно (19) из [7] и (8) получаем

$$\left|\sum_{\nu=s-1}^{\infty}\bar{P}_\nu(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right|\leqslant\sum_{\nu=s-1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}2^{3\nu}|t|^{\nu}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{\nu}{s-2}}\sum_{l=1}^{\nu}\frac{|t|^{2l}}{4^l l!}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=s-1}^{\infty}2^{3\nu}|t|^{\nu+2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{\nu}{s-2}}e^{\frac{t^2}{4}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{s(s-1)}|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{s-1}{s-2}} e^{\frac{t^2}{4}} \sum_{\nu=s-1}^{\infty}\left[\frac{8|t|}{\sqrt{n}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right]^{\nu-s+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{3s}|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{s-1}{s-2}} e^{\frac{t^2}{4}}.$$

Отсюда и (16—18) вытекает, что

$$R_n(t) \leqslant \frac{C(s)|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{s-1}{s-2}} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Случай, когда $s=2$ или s — нечетное число ($s>2$), доказывается аналогично, только при доказательстве последнего всюду вместо неравенства (8) используется

$$\left(\frac{\beta_s}{\sigma^s}\right)^{\frac{1}{s-2}} \leqslant \left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-1}}, \tag{19}$$

справедливость которого следует в силу равенства

$$\beta_{2\nu}=\rho_{2\nu}, \qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если случайные величины* ξ_j, $j=\overline{1,\ n}$ *имеют нулевые математические ожидания,* $\rho_{s+1}<\infty$, *и выполняется условие*

$$\int\limits_{|x|>z} x^s\, dF(x)=o(z^{-1}), \tag{20}$$

то при

$$\delta=\begin{cases} \dfrac{s-1}{s-2}, \text{ если } s \text{ — четное число } (s\neq 2), \text{ в интервале } |t|\leqslant \\ \qquad\qquad \leqslant \dfrac{(\sqrt{n})^{\frac{s}{s+1}}}{8s}\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}, \\ 1, \text{ если } s=2 \text{ или } s \text{ — нечетное число } (s>2), \text{ в интервале} \\ \qquad\qquad |t|\leqslant \dfrac{(\sqrt{n})^{\frac{s}{s+1}}}{8s}\left(\dfrac{\rho^{s+1}}{\sigma_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-1}} \end{cases}$$

справедливо неравенство

$$\left|f_n(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} P_\nu(it)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(s)\,\frac{\varepsilon(n)|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{\sigma_{s+1}}{\rho^{s+1}}\right)^{\delta} e^{-\frac{t^2}{4}},$$

где функция $\varepsilon(n)$ *зависит только от* n *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$.

Доказательство. Пусть s — четное число. Легко заметить, что

$$f(t)-e\left(1+\sum_{\nu=2}^{s}\frac{(it)^{\nu}}{\nu!}\alpha_{\nu}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-\sum_{\nu=0}^{s}\frac{(itx)^{\nu}}{\nu!}\right)dF(x)=$$

$$=\frac{(it)^{s+1}}{(s+1)!}\int_{|x|\leqslant\frac{1}{|t|}}x^{s+1}dF(x)+\theta_1 t^{s+2}\int_{|x|\leqslant\frac{1}{|t|}}x^{s+2}dF(x)+$$

$$+\theta_2 t^{s}\int_{|x|>\frac{1}{|t|}}x^{s}dF(x).$$

Согласно условию (20) первое слагаемое — $\frac{(it)^{s+1}}{(s+1)!}\alpha_{s+1}+o(|t|^{s+1})$, последнее — $o(|t|^{s+1})$, а второе слагаемое можно записать в виде

$$\theta_1 t^{s+2}\int_{0}^{\frac{1}{|t|}}x^{2}dR_s(x)=\theta_1 t^{s}R_s\left(\frac{1}{|t|}\right)+\theta_1 t^{s+2}\int_{0}^{\frac{1}{|t|}}xR(x)\,dx=0(|t|^{s+1}).$$

Следовательно,

$$f(t)=1+\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^{\nu}\alpha_{\nu}}{\nu!}+o(|t|^{s+1}). \tag{21}$$

В случае, когда s — нечетное число, из определения ρ_{s+1} следует конечность абсолютного момента $(s+1)$ порядка, а тем самым и разложение (21).

Далее обозначим

$$U=f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)-1=\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^{\nu}\alpha_{\nu}}{\nu!\,\sigma^{\nu}n^{\frac{\nu}{2}}}+o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right).$$

Следовательно,

$$\ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu=1}^{\frac{s+2}{2}}(-1)^{\nu+1}\frac{U^{\nu}}{\nu}+o\left(|U|^{\frac{s+2}{2}}\right)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\frac{s+2}{2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}\left(\sum_{l=2}^{s+1}\frac{(it)^{l}\alpha_{l}}{l!\,\sigma^{l}n^{\frac{l}{2}}}+o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right)\right)^{\nu}+o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right).$$

Отсюда при $|t|\leqslant\frac{(\sqrt{n})^{\frac{s}{s+1}}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$ легко заметить, что

$$\ln f_n(t)=\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^{\nu}\varkappa_{\nu}}{\nu!\,\sigma^{\nu}n^{\frac{\nu-2}{2}}}+o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\right).$$

В силу (17) и неравенства $|e^x-1|\leqslant|x|e^{|x|}$ имеем при $|t|\leqslant \leqslant \frac{(\sqrt{n})^{\frac{s}{s+1}}}{8s}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}$

$$\left|f_n(t)-\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}\right|=\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}\left|e^{o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\right)}-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{t^2}{2}}\exp\left\{\sum_{\nu=3}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}o\left(\frac{|t|^{s+1}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{o\left[\frac{t^2}{(8s)^{s-1}}\left(\frac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{s-1}{s-2}}\right]\right\}\leqslant o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)|t|^{s+1}e^{-\frac{t^2}{3}}. \tag{22}$$

Далее

$$\exp\left\{\sum_{\nu=2}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{l!}\left(\sum_{\nu=3}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right)^l+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=s}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\sum_{\nu=3}^{s+1}\frac{(it)^\nu \varkappa_\nu}{\nu!\,\sigma^\nu n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right)\right]=e^{-\frac{t^2}{2}}\left[1+\sum_{l=1}^{s-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l P_l(it)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=s}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l \bar{P}_l(it)\right], \tag{23}$$

где $\bar{P}_l(it)$ — многочлены, в которых $\varkappa_{s+2}=\varkappa_{s+3}=\ldots=0$.

Согласно (19) из [7] и (8) получаем

$$\left|\sum_{l=s}^{\infty}\bar{P}_l(it)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l\right|\leqslant\sum_{l=s}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l 2^{3l}|it|^l\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{l}{s-2}}\sum_{j=1}^{l}\frac{|it|^{2j}}{4^j j!}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{3s}|t|^{s+2}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{s}{s-2}}\frac{e^{\frac{t^2}{4}}}{n^{\frac{s}{2}}}\sum_{l=s}^{\infty}\left[\frac{8|t|}{\sqrt{n}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}\right]^{l-s}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{3s}\frac{\varepsilon(n)|t|^{s+1}e^{\frac{t^2}{4}}}{n^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{\rho_{s+1}}{\sigma^{s+1}}\right)^{\frac{s-1}{s-2}}.$$

Отсюда и из соотношений (22—23) следует справедливость леммы при четных s. Случай, когда $s=2$ или s — нечетное число ($s>2$), доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 5 (см. [8]). *Для* $|t|\leqslant\frac{1}{94}\frac{\sigma^3\sqrt{n}}{\rho_3}$ *имеет место неравенство*

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\leqslant e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия:*

1) *случайные величины* ξ_j $(j=\overline{1,\ n})$ *имеют* $\rho_{s+1}<\infty$, $(s\geqslant 2)$;

2) *существует* N *такое, что* $\max\limits_x p_N(x)<C<\infty$; *тогда при* $n\to\infty$ *равномерно по* x

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(-\varphi)(x)+O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right).$$

Доказательство. Пусть $n>2N$. Тогда

$$\rho_n(x)-\varphi(x)-\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(-\varphi)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}[f_n(t)-g(t)]\,dt,$$

где

$$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(it)\right).$$

Далее, полагая

$$T_{sn}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{n}}{8s}\cdot\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-2}}, & \text{если } s-\text{четное число},\\[2ex] \dfrac{\sqrt{n}}{8s}\left(\dfrac{\sigma^{s+1}}{\rho_{s+1}}\right)^{\frac{1}{s-1}}, & \text{если } s=2 \text{ или } s-\text{нечетное число},\end{cases}$$

имеем

$$\left|p_n(x)-\varphi(x)-\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_\nu(-\varphi)(x)\right|\leqslant\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}}|f_n(t)-g(t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_{T_{sn}<|t|\leqslant\frac{\sqrt{n}\,\sigma^3}{94\rho_3}}|f_n(t)|\,dt+\int\limits_{|t|>T_{sn}}|g(t)|\,dt+$$

$$+\int\limits_{|t|>\frac{\sqrt{n}\,\sigma^3}{94\rho_3}}|f_n(t)|\,dt=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Согласно лемме 3 $I_1=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$.

В силу леммы 5 $I_2=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$, при $n\to\infty$.

Очевидно, что $I_3=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$, при $n\to\infty$.

Осталось оценить I_4. Так как функция распределения $F_N(x)$ имеет плотность, то существует положительная постоянная c такая, что

$$\sup_{|t|>\frac{\sigma^3}{94\rho_3}}|f(t)|=e^{-c}.$$

По равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^{2N}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}p_N^2(x)\,dx.$$

Из двух последних соотношений вытекает, что

$$I_4 \leqslant 2\pi\sigma \sqrt{n}\, e^{-c(n-2N)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_N^2(x)\, dx = O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right)$$

при $n \to \infty$.

Из полученных оценок для интегралов $I_1 - I_4$ следует справедливость леммы 6.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* (1—2) *леммы* 6 *и условие* (20). *Тогда при* $n \to \infty$ *и равномерно по* x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} P_\nu(-\varphi)(x) + o\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right).$$

Доказательство существенно не отличается от доказательства леммы 6, только здесь вместо леммы 3 используется лемма 4.

Лемма 8. *Если одинаково распределенные решетчатые случайные величины* ξ_j $(j = \overline{1, n})$ *взаимно независимы с максимальным шагом распределения* h *и* $\rho_{s+1} < \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k) = \varphi(y) + \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} P_\nu(-\varphi)(y) + O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right).$$

Здесь

$$P_n(k) = P\left\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j = na + kh\right\}, \qquad k = 0 \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

а

$$y = y_{kn} = \frac{h(k-m)}{\sigma\sqrt{n}},$$

где

$$m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kP\{\xi_j = a + kh\}.$$

Доказательство. По определению

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ity} P_n(k)$$

и по формуле обращения

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{-\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}}^{\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} f_n(t)\, e^{-ity}\, dt.$$

Далее

$$\left| \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} P_n(k) - \varphi(y) - \sum_{\nu=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(-\varphi)(y) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \Bigg[\int\limits_{|t|\leqslant T_{sn}} |f_n(t) - g(t)|\, dt + \int\limits_{T_{sn}<|t|\leqslant \frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{n}} |g(t)|\, dt +$$

$$+ \int\limits_{T_{sn}<|t|<\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} |f_n(t)|\, dt \Bigg] = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (24)$$

Интегралы I_1 и I_2 оценены при доказательстве леммы 6.

Согласно утверждению, что шаг распределения максимальный только тогда, когда модуль характеристической функции величины ξ_j в промежутке $0<t<\frac{2\pi}{h}$ меньше единицы $\left(\text{при } t=\frac{2\pi}{h} \text{ равен единице}\right)$, для любого t из интервала $\left(T_{sn}, \frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}\right)$ можно найти такое $c>0$, что

$$\left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right| < e^{-c}.$$

Таким образом,

$$I_3 \leqslant e^{-nc} \int\limits_{T_{sn}<|t|<\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{n}} dt = O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right), \qquad n\to\infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы* 8 *и условие* (20). *Тогда при* $n\to\infty$ *и всех* k

$$P_n(k) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \left(\varphi(y) + \sum_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\nu P_\nu(-\varphi)(y) \right) + o\left(n^{-\frac{s}{2}}\right).$$

Доказательство этой леммы приводить не будем, так как оно повторяет доказательства предыдущих лемм.

3. Доказательства теорем

Доказательство достаточности теорем 1–4 следует из лемм 6–9.

Сначала докажем необходимость условий теоремы 3. Доказательство будем вести по индукции. В качестве базы для индукции можно выбрать необходимые условия теоремы 6.1 из [5] при $s=2$, которые можно рассматривать как необходимые условия справедливости соотношения

$$|\sigma\sqrt{n} P_n(k) - \varphi(y)| = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Очевидно, что условия теоремы 6.1. из [5] в этом случае эквивалентны условиям (1–2) теоремы 3.

Допустим теперь, что условия (1—2) теоремы 3 необходимы для того, чтобы

$$|\Delta_{n,s}(k)|=\left|\sqrt{n}P_n(k)-\varphi(y)-\sum_{\nu=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}P_{\nu}(-\varphi)(y)\right|=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

где $s\geqslant 2$, и выведем отсюда, что они необходимы и для выполнения равенства

$$|\Delta_{n,s+1}(k)|=O\left(n^{-\frac{s}{2}}\right). \tag{25}$$

Введем функцию $A(t)$, определив ее в интервале $[-\pi\sqrt{n},\ \pi\sqrt{n})$ равенством

$$A(t)=\begin{cases} t(1-t)\exp\left\{\dfrac{t^2}{2}-\sum\limits_{\nu=1}^{s-2}\dfrac{(it)^{\nu}\varkappa_{\nu}}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}, & \text{если}\quad t\in[0,\ 1],\\ 0, \quad \text{если} \quad t\notin[0,\ 1], \end{cases}$$

и пусть

$$A(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{ik\frac{t}{\sqrt{n}}}.$$

Отсюда

$$|a_k|=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\left|\int\limits_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}}e^{-ik\frac{t}{\sqrt{n}}}A(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\left|\int\limits_{0}^{1}t(1-t)\exp\left\{\frac{t^2}{2}-\sum_{\nu=1}^{s-2}\frac{(it)^{\nu}\varkappa_{\nu}}{\nu!\,n^{\frac{\nu-2}{2}}}\right\}e^{\frac{itk}{\sqrt{n}}}\,dt\right|\leqslant\frac{C\sqrt{n}}{n+k^2}. \tag{26}$$

Из (24) следует равенство

$$\Delta_{n,s+1}(k)=\int\limits_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}}[f_n(t)-g_{n,s+1}(t)]\,e^{-ity}\,dt-r(k), \tag{27}$$

где

$$r(k)=\int\limits_{|t|>\pi\sqrt{n}}e^{-ity}g_{s+1,n}(t)\,dt=O\left(n^{-\frac{s}{2}}\right).$$

По равенству Парсеваля, условию (25) и оценкам (26), (27) найдем

$$\left|\int\limits_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}}[f_n(t)-g_{n,s+1}(t)]\,\overline{A(t)}\,dt\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\Delta_{n,s+1}(k)+r(k)\right)\bar{a}_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_k\left(\Delta_{n,s+1}(k)+r(k)\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|\leqslant$$

$$\leqslant 2C\sqrt{n}\max_k\left(\Delta_{n,s+1}(k)+r(k)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k^2}\leqslant$$

$$\leqslant C\max_k\left(\Delta_{n,s+1}(k)+r(k)\right)=O\left(n^{-\frac{s}{2}}\right).$$

В соответствии с индукционным предположением

$$f_n(t)=\exp\left\{-\frac{t^2}{2}+\sum_{\nu=3}^{s}\frac{\bar{\varkappa}_\nu(it)^\nu}{n^{\frac{\nu-2}{2}}}+\frac{(it)^s}{n^{\frac{s-2}{2}}}\gamma_s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\},$$

где

$$\left|\gamma_s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|=O\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Дальнейшее доказательство почти ничем не отличается от изложенного в [6, стр. 514–517].

Доказательство условий необходимости теоремы 1 ничем существенным не отличается от доказательства теоремы 2.

Условия необходимости теорем 3 и 4 доказываются также методом И. А. Ибрагимова [6, стр. 517–519].

Вильнюсский государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
12.I.1972

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., Гостехиздат, 1949.
2. В. В. Петров, О некоторых полиномах, встречающихся в теории вероятностей, Вестник ЛГУ, 19 (1962), 150–153.
3. В. Статулявичус, Об асимптотическом разложении характеристической функции суммы независимых случайных величин, Liet. matem. rink., II, № 2 (1962), 225–232.
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные случайные величины, М., „Наука", 1965.
5. И. А. Ибрагимов, О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Т. в. и ее прим., 10, вып. 4 (1966), 632–655.
6. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических разложениях Чебышева–Крамера, Т. в. и ее прим. 12, вып. 3 (1967), 506–519.
7. А. Бикялис, Об остаточных членах в асимптотических разложениях для характеристических функций и их производных, Liet. matem. rink., VII, № 4 (1967), 571–582.
8. C. G. Esseen, On the remainder term in the central limit theorem, Arkiv for Math., B8, 2 (1969), 7–15.

APIE ASIMPTOTINIUS SKLEIDINIUS LOKALINĖSE TEOREMOSE

A. Karoblis

(*Reziumė*)

Įrodyta, kad I. Ibragimovo (žr. [6]) sąlygos yra būtinos ir pakankamos gauti liekamojo nario atitinkamos eilės įvertinimui skleidinių lokalinėse teoremose.

ON THE ASYMPTOTIC EXPANSIONS IN THE LOCAL THEOREMS

A. Karoblis

(*Summary*)

It has been proved that I. Ibragimov [6] conditions are sufficient and necessary in the estimations of the remainder term in the local theorems with asymptotic expansions.