УДК 519.21

ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Р. Р. Гилис

В настоящей заметке некоторые результаты работы [1] (или [2]) переносятся на многомерный случай.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t)=\alpha_1\Theta_1(t)+\ldots+\alpha_N\Theta_N(t)+\Delta(t), \qquad t\in\mathbf{T}, \tag{1}$$

где

$$\Delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\Psi(d\lambda)$$

— m-мерный стационарный в широком смысле процесс с нулевым средним и матрицей спектральных плотностей $f_0(\lambda)$; $\Theta_1(t), \ldots, \Theta_N(t)$ — линейно независимые известные функции-столбцы, представимые в виде

$$\Theta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f_0(\lambda)\varphi_\Theta^*(\lambda)\,d\lambda, \tag{2}$$

где вектор-строка $\varphi_\Theta\in L_{\mathbf{T}}^2(f_0)$ (см. [3] или [4]), $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — неизвестные числовые параметры (коэффициенты регрессии), которые требуется оценить, наблюдая реализацию процесса $\xi(t)$ на интервале $\mathbf{T}$ (звездочкой обозначаем комплексно-сопряженную матрицу).

Аналогично одномерному случаю [1] получаем, что вектор наилучших оценок коэффициентов регрессии $\alpha=\{\alpha_k\}_{k=\overline{1,N}}$ принимает вид

$$\alpha_0(\mathbf{T})=\sigma_0^2(\mathbf{T})\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,\Phi(d\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)=\{\varphi_k(\lambda)\}_{k=\overline{1,N}})$ — матрица размерности $N\times m$, $\varphi_k(\lambda)$, $k=1, \ldots, N$ — решения уравнений (2), $\Phi(d\lambda)$ — спектральная стохастическая мера $\xi(t)$, $\sigma_0^2(\mathbf{T})=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,f_0(\lambda)\,\varphi^*(\lambda)\,d\lambda\right]^{-1}$ — корреляционная матрица наилучших оценок, которая не вырождена благодаря условию (2) (см. [3] § 7).

Пусть $f(\lambda)$ другая матрица спектральных плотностей, обладающая свойством

$$f_0(\lambda)\prec f(\lambda), \tag{3}$$

где знак „$\prec$“ означает, что существует такое число $c>0$, что матрица $f(\lambda)-cf_0(\lambda)$ неотрицательно определена при всех λ.

При этом имеет место очевидное вложение $L^2_{\mathbf{T}}(f) \subset L^2_{\mathbf{T}}(f_0)$. Наряду с представлением (2) имеет место также следующее (см. [1] § 1):

$$\Theta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) \hat{\varphi}^*_{\Theta}(\lambda)\, d\lambda, \quad t \in \mathbf{T}, \quad \hat{\varphi}_{\Theta} \in L^2_{\mathbf{T}}(f). \tag{4}$$

„Псевдонаилучшие оценки“ примут вид

$$\hat{\alpha}(\mathbf{T}) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) f(\lambda) \hat{\varphi}^*(\lambda)\, d\lambda\right]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda)\, \Phi(d\lambda)$$

и их корреляционная матрица равна

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{T}) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) f(\lambda) \hat{\varphi}^*(\lambda)\, d\lambda\right]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) f_0(\lambda) \hat{\varphi}^*(\lambda)\, d\lambda \times$$

$$\times \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) f(\lambda) \hat{\varphi}^*(\lambda)\, d\lambda\right]^{-1}.$$

Если $f(\lambda)$ удовлеторяет условию

$$f(\lambda) \asymp \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)^{-k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1+\lambda^2)^{-k_m} \end{pmatrix} \tag{5}$$

(„$\asymp$“ означает, что одновременно имеют место и „$\prec$“, и „$\succ$“) при некоторых целых $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$, то для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы компоненты $\Theta_j(t), j=1, \ldots, m$, имели почти всюду на интервале наблюдения $\mathbf{T}$ k_j интегрируемых в квадрате производных, что кратко запишем в виде $\Theta(t) \in H_{\mathbf{T}}(\bar{k})$. При знаке „$\prec$“, этого достаточно [3].

Заметим, что, рассматривая $f(\lambda)$ типа (5), мы, по существу, охватываем довольно широкий класс спектральных плотностей, включающий рациональные спектральные плотности. В самом деле, всякая невырожденная матрица рациональных спектральных плотностей имеет вид $f(\lambda) = H(i\lambda)\, \tilde{f}(\lambda) H^*(i\lambda)$, где $\tilde{f}(\lambda)$ вида (5), а $H(i\lambda)$ — квадратная матрица, элементы которой являются многочленами с действительными коэффициентами; определитель $H(i\lambda)$ равен отличной от нуля константе (леммы 1.1, 2.1, 3.1 [3]). Но f — оценки для $\xi(t)$ сводятся в некотором смысле к $\tilde{f}$ — оценкам для $\tilde{\xi}(t) = H\left(\frac{d}{dt}\right) \xi(t)$ (в принципиально важном случае $\mathbf{T} = (-\infty, T]$ они просто совпадают).

Итак, предположим, что

$$f_0(\lambda) \prec \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)^{-k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1+\lambda^2)^{-k_m} \end{pmatrix} \tag{6}$$

и $\Theta_1(t), \ldots, \Theta_N(t) \in H_{\mathbf{T}}(\bar{k})$.

Далее ограничимся „псевдоспектральными плотностями“ вида

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(R^*(i\lambda) R(i\lambda)\right)^{-1}, \tag{7}$$

где

$$R(z)=A_0+A_1 z+\ldots+A_n z^n, \tag{8}$$

A_k – квадратные матрицы, $\det R(z)$ – устойчивый полином.

Выясним, когда $f(\lambda)$ такого типа удовлетворяет условию (5).

Пусть r_{kj} – порядок $R_{kj}-(i\lambda)$ – kj-го элемента матрицы $R(i\lambda)$. Обозначим $r_j=\max\limits_k r_{kj}$. Следовательно, можно написать

$$R_{kj}(i\lambda)=a_{kj}(i\lambda)^{r_j}+\ldots \tag{9}$$

Вычисляя $\det R(i\lambda)$ с учетом (9), легко убеждаемся, что

$$\det R(i\lambda)=\det A\cdot(i\lambda)^{r_1+\ldots+r_m}+\ldots,$$

где

$$A=\{a_{kj}\}_{k=\overline{1,\,m}}^{j=\overline{1,\,m}}.$$

Из выражений (8) и (9) видно, что j-й столбец матрицы A является j-м столбцом матрицы A_{r_j}, т.е. первой матрицы (считая слева в (8)), j-й столбец которой ненулевой.

Пусть $\det A\neq 0$, тогда

$$(R^*(i\lambda)R(i\lambda))^{-1}\asymp\begin{pmatrix}(1+\lambda^2)^{-r_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (1+\lambda^2)^{-r_m}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Действительно, обозначая

$$\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}(1-i\lambda)^{-r_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (1-i\lambda)^{-r_m}\end{pmatrix}R^*(i\lambda)R(i\lambda)\begin{pmatrix}(1+i\lambda)^{-r_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (1+i\lambda)^{-r_m}\end{pmatrix},$$

имеем, что

$$D=\lim_{\lambda\to\infty}\Lambda(\lambda)$$

не вырождена ($\det D=(\det A)^2\neq 0$). Учитывая также непрерывность $\Lambda(\lambda)$, имеем

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty}\det\Lambda(\lambda)=\beta>0,\qquad \operatorname{sp}\Lambda(\lambda)<\bar{c}<\infty,$$

где „sp“ означает след матрицы.

Таким образом, у положительно определенной самосопряженной матрицы $\Lambda(\lambda)$ сумма собственных значений при всех λ не больше $c<\infty$, а произведение – не меньше $\beta>0$. Отсюда следует, что минимальное собственное значение матрицы $\Lambda(\lambda)$ не меньше $\beta_1=\min\left(\frac{\beta}{c},\ \beta c\right)$, а максимальное – не больше $\beta_2=\max\left(\frac{\beta}{c},\ \beta c\right)$. Имеем, что $\Lambda(\lambda)-\beta_1 I$ и $\beta_2 I-\Lambda(\lambda)$ неотрицательно определены, т.е. имеет место (10) (I – единичная матрица).

Скажем, что $\bar{r}\leqslant\bar{m}$, если $r_i\leqslant m_i$, $i=1,\ldots,m$. Пусть теперь $\bar{r}\leqslant\bar{m}$. Тогда выполнено $f(\lambda)\succ f_0(\lambda)$ и, значит, определены R-оценки. Укажем явное решение уравнения (4) и формулы для R-оценок.

Лемма 1. *Решение уравнения*

$$\Theta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\left(R^*(i\lambda)R(i\lambda)\right)^{-1}\hat{\varphi}^*(\lambda)\,d\lambda,\quad \hat{\varphi}\in L^2_{\mathrm{T}}(f), \tag{11}$$

при $\mathrm{T}=(-\infty, T]$ *имеет вид*

$$\varphi^*_{\Theta}(\lambda)=R^*(i\lambda)\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-i\lambda t}R\left(\frac{d}{dt}\right)\Theta(t)\,dt.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 [1].

R-оценки можно записать в виде

$$\hat{\alpha}(\mathrm{T})=2\pi\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{\Theta}^*_{\mathrm{T}}(\lambda)\hat{\Theta}_{\mathrm{T}}(\lambda)\,d\lambda\right]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{\Theta}^*_{\mathrm{T}}(\lambda)R(i\lambda)\Phi(d\lambda),$$

где

$$\hat{\Theta}_{\mathrm{T}}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{T} e^{-i\lambda t}\hat{\Theta}(t)\,dt,\quad \hat{\Theta}(t)=R\left(\frac{d}{dt}\right)\begin{pmatrix}\Theta_1(t)\\ \vdots\\ \Theta_N(t)\end{pmatrix}.$$

При условии, когда $\hat{f}(\lambda)=R^*(i\lambda)f_0(\lambda)R(i\lambda)$ интегрируема, R-оценки вычисляются по формуле

$$\hat{\alpha}(T)=\hat{D}(T)\int\limits_{-\infty}^{T}\hat{\Theta}^*(t)\hat{\xi}(t)\,dt,$$

где

$$\hat{D}(T)=\left(\int\limits_{-\infty}^{T}\hat{\Theta}^*(t)\hat{\Theta}(t)\,dt\right)^{-1}.$$

Оценки $\hat{\alpha}(T)$ можно рассматривать как случайный процесс относительно параметра T. Аналогично одномерному случаю [1] проверяется, что этот процесс удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\hat{\alpha}(T)}{dT}=-\hat{D}(T)\hat{\Theta}^*(T)\hat{\Theta}(T)\hat{\alpha}(T)+\hat{D}(T)\hat{\Theta}^*(T)\hat{\xi}(T).$$

Лемма 2. *Решение уравнения* (11) *при* $\mathrm{T}=[0, T]$ *имеет вид*

$$\varphi^*_{\Theta}(\lambda)=R^*(i\lambda)\int\limits_{0}^{T} e^{-i\lambda t}R\left(\frac{d}{dt}\right)\Theta(t)\,dt+\sum_{s=0}^{n-1}\chi_s(i\lambda)\Theta^{(s)}(0)^{*}, \tag{12}$$

где $\chi_s(z)={}_sR^*(z)\,R_s(z)+(-1)^s R^*_s(z)\,{}_sR(z)$ — *матричный полином порядка не выше* $(r_1-1, \ldots, r_m-1)$, ${}_sR(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_sz^s$, $R_s(z)=A_{s+1}+A_{s+2}z+\ldots+A_nz^{n-s-1}$.

Для доказательства утверждения достаточно повторить с почти очевидными матричными изменениями рассуждения из доказательства леммы 3 [1].

---

*) Заметим, что в матрице $\chi_s(z)$ при $s\geqslant r_j$, j-й столбец нулевой, так что в (12) стоит только $\Theta_j^{(l_j)}(0)$, $l_j=0, \ldots, r_j-1$, $j=1, \ldots, m$.

R — оценки в случае конечного интервала $[0, T]$:

$$\hat{\alpha}(T)=\hat{D}(T)\int_0^T \hat{\Theta}^*(t)\hat{\xi}(t)\,dt+\hat{D}\hat{\alpha},$$

где

$$\hat{D}=\Big(\sum_{s,\,u=0}^{n-1}\Theta^{*(s)}(0)\,\Theta^{(u)}(0)\Big)^{-1},\quad \hat{\alpha}=\hat{D}^{-1}\sum_{s=0}^{n-1}\Theta^{*(s)}(0)\,\chi_s\Big(\frac{d}{dt}\Big)\,\xi(t)\Big|_{t=0}.$$

Имеет место аналог теоремы 1 [1].

Лемма 3. *Для состоятельности R-оценок достаточно, чтобы*

$$\int_0^\infty\Big(|\Theta_l^{(k_l)}(t)|^2+|\Theta_l(t)|^2\Big)\,dt=\infty$$

для некоторого элемента столбца $\Theta(t)$. В частности, для оценок наименьших квадратов это условие превращается в

$$\int_0^\infty|\Theta_l(t)|^2\,dt=\infty$$

для некоторого $\Theta_l(t)$.

Если состоятельны R_1-оценки, то состоятельны также любые R_2-оценки, где $R_2(z)$ — матричный полином, порядок которого не меньше порядка матричного полинома $R_1(z)$. В частности, если оценки наименьших квадратов состоятельны, то этим свойством обладают все возможные R-оценки.

При доказательстве используется известный факт: если функция и ее n-я производная интегрируемы в квадрате на $[0, \infty)$, то и любая промежуточная ее производная интегрируема в квадрате на $[0, \infty)$.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. С. Холево, вниманием и советами которого я постоянно пользовался.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
11.II.1972

Литература

1. А. С. Холево, Кандидатская диссертация, М., 1969.
2. А. С. Холево, Об оценках коэффициентов регрессии, Теория вероят. и ее примен., **XIV**, 1 (1969), 78–101.
3. В. Ф. Писаренко, Кандидатская диссертация, Вильнюс, 1963.
4. Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, М., 1963.

APIE REGRESIJOS KOEFICIENTŲ ĮVERTINIMUS DAUGIAMAČIU ATVEJU

R. Gylys

(*Reziumė*)

Darbe apibendrinti daugiamačiams atsitiktiniams procesams (1) su stacionariąja liekana $\Delta(t)$ kai kurie A. Cholevo ([1], [2]) rezultatai, liečiantys regresijos koeficientų tiesinių be poslinkio įvertinimų klasę (apimančią mažiausiųjų kvadratų įvertinimus).

ON ESTIMATES OF REGRESSION COEFFICIENTS IN MULTIVARIATE CASE

R. Gylys

(*Summary*)

Some results of A. Kholevo [1], [2] concerning a class of linear unbiased estimates (including the least squares ones) of regression coefficients are generalized for multivariate stochastic process (1) with stationary residual $\Delta(t)$.