УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Бикялис

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ и характеристической функцией $f(t)$. Предположим, что $M\xi_1=0$ и $D\xi_1=\sigma^2<\infty$. При этом $\sigma>0$.

Если случайная величина ξ_1 имеет конечный момент r-го порядка, обозначим его через $\alpha_r=M\xi_1^r$; $\varkappa_r$ – r-й семиинвариант случайной величины ξ_1. Очевидно, что

$$\varkappa_r=\alpha_r-\sum_{j=1}^{r-3}\frac{(r-1)!}{(r-j-1)!\,j!}\,\alpha_{r-j-1}\varkappa_{j+1}. \tag{1}$$

Через α_r также обозначим главное значение момента r-го порядка случайной величины ξ_1:

$$\alpha_r=\lim_{z\to\infty}\int_{-z}^{z}x^r\,dF(x).$$

Пусть $\Phi_\sigma(x)$ – функция распределения нормального закона с параметрами $(0, \sigma^2)$. „Псевдомоментом" r-го порядка случайной величины ξ_1 называем следующий интеграл:

$$\nu_r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r\,d[F(x)-\Phi_\sigma(x)].$$

Приведенная ниже лемма показывает связь между семиинвариантами $\varkappa_j$, $j=3, 4, \ldots, r$, и „псевдомоментами" ν_j, $j=3, 4, \ldots, r$.

Лемма 1. *Если ξ_1 имеет конечные моменты r-го порядка, то семиинварианты $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ равны нулю тогда и только тогда, когда $\nu_1=\nu_2=$ $=\ldots=\nu_r=0$.*

Действительно, $\varkappa_j=\nu_j$, $j=1, 2, 3, 4$, и при $r=5, 6, \ldots$

$$\varkappa_r=\nu_r-\sum_{j=1}^{r-3}\frac{(r-1)!}{(r-j-1)!\,j!}\,\nu_{r-j-1}\varkappa_{j+1}-\sum_{j=2}^{r-3}\frac{(r-1)!}{(r-j-1)!\,j!}\,a_{r-j-1}\varkappa_{j+1}. \tag{2}$$

Здесь $a_{r-j-1}=0$, когда $r-j-1$ – нечетное число, и $a_{r-j-1}=(r-j-2)!!\,\sigma^{r-j-1}$, когда $r-j-1$ – четное число. Из соотношения (2) вытекает утверждение леммы 1.

Следуя И. А. Ибрагимову [1], зададимся числовой последовательностью $\mu_1=0$, $\mu_2=\sigma^2$, μ_3, ..., μ_s, где μ_3, μ_4, ..., μ_s — произвольные числа (назовем их „моментами"), и по ней с помощью равенства (1) построим „семиинварианты" $\bar{\varkappa}_1$, $\bar{\varkappa}_2$, ..., $\bar{\varkappa}_s$. Далее

$$P_r(it)=\frac{\bar{\varkappa}_{r+2}(it)^{r+2}}{\sigma^{r+2}(r+2)!}+\sum_{l=1}^{r-1}\sum{}^{*}\times$$

$$\times\frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)\bar{\varkappa}_{r-j_l+2}\bar{\varkappa}_{j_l-j_{l-1}+2}\ldots\bar{\varkappa}_{j_2-j_1+2}\bar{\varkappa}_{j_1+2}(it)^{r+2(l+1)}}{rj_lj_{l-1}\ldots j_1(r-j_l+2)!(j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!(j_1+2)!\sigma^{r+2(l+1)}},\qquad(3)$$

где $\sum{}^{*}$ обозначает $\sum\limits_{j_l=l}^{r-1}\ \sum\limits_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1}\ldots\sum\limits_{j_2=2}^{j_3-1}\ \sum\limits_{j_1=1}^{j_2-1}$, и

$$Q_r(x)=\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{x^2}{2}}\,P_r(-\Phi)(x).$$

$P_r(-\Phi)(x)$ получаем с помощью (3). Здесь вместо $(-it)^{r+2(l+1)}$ подставляем производную $r+2(l+1)$-го порядка функции $\Phi(x)=\Phi_1(x)$.

Рассмотрим асимптотическое разложение для функции распределения $F_n(x)$ нормированной суммы

$$S_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, т.е. рассмотрим разность

$$R_n(x)=F_n(x)-\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j Q_j(x)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}-\Phi(x).\qquad(4)$$

Если $M|\xi_1|^s<\infty$, $s\geqslant 3$ (в этом случае принимаем, что $\bar{\varkappa}_r=\varkappa_r$, $r=3,4,\ldots,s$), то достаточные условия для оценки остаточного члена $R_n(x)$ были получены Г. Крамером (см. [2], стр. 125), Ю. В. Прохоровым в [3] и Г. Бергстремом в [4]. Для разнораспределенных слагаемых эту задачу глубоко исследовали В. В. Петров и В. Статулявичус. В 1967 г. И. А. Ибрагимов [1] получил необходимые условия (см. условия 1—3 в теореме 1 и условия 1—2 в теореме 4) для оценки $R_n(x)$, но они были достаточными лишь для распределений $F(x)$, удовлетворяющих условию Крамера

$$(C)\qquad \varlimsup_{|t|\to\infty}|f(t)|<1.$$

Здесь мы получили необходимые и достаточные условия для оценки $R_n(x)$. В случае $s=3$ эта задача решена в [5].

Обозначим: C_1, C_2, ... — положительные „константы", не зависящие от n $\big($они могут зависеть от характеристик распределения $F(x)\big)$; $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$, ..., — положительные достаточно медленно возрастающие функции, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_i(n)=\infty$, $i=1, 2, \ldots$; H — класс характеристических функций $h(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $h(t)$ — вещественная функция; $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$; $h(t)=0$ при $|t| \geqslant 1$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\, q(x)\, dx \leqslant C_1 < \infty$,

где $q(x)$ — ограниченная плотность, соответствующая $h(t)$;

$$\Delta_m(\varepsilon, n) = \sup_x \left| \int\limits_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \lambda_1(n)\sqrt{n^m}} \frac{e^{-itx} f^n(t)}{t} h\left(\frac{t}{\lambda_1(n)\sqrt{n^m}}\right) dt \right|. \tag{5}$$

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ равномерно по x*

$$R_n(x) = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right), \qquad s = 3, 4, \ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *абсолютные моменты распределения $F(x)$ до порядка $s-1$ включительно конечны и $\alpha_j = \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, s-1$;*

2) $\int\limits_{|x|>z} |x|^{s-1} dF(x) = o(z^{-1}), \qquad z \to \infty;$

3) $\lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_{-z}^{z} x^s dF(x) = \mu_s;$

4) *существует характеристическая функция $h(t) \in H$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство*

$$\Delta_{s-3}(\varepsilon, n) = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)$$

при $n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть s — четное число, тогда условия 1—3 можно заменить условием*

5) *существует абсолютный момент s-го порядка и $\alpha_j = \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$.*

Теорема 3. *Пусть, как и прежде, s — четное число. Тогда для того, чтобы при $n \to \infty$*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 4 и 5 и условие

6) *„псевдомоменты" $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ равны нулю.*

Теорема 4. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ равномерно по x*

$$R_n(x) = O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right), \qquad s = 3, 4, \ldots, \ 0 < \delta < 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *случайная величина ξ_1 имеет конечные моменты s-го порядка и $\alpha_j = \mu_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$;*

2) $\int\limits_{|x|>z} |x|^s dF(x) = O(z^{-\delta}), \qquad z \to \infty;$

3) *существует характеристическая функция* $h(t)\in H$ *такая, что при любом* $\varepsilon>0$ *имеет место равенство*

$$\Delta_{s+\delta-3}(\varepsilon,\ n)=O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right), \qquad n\to\infty.$$

Здесь $\Big($см. (5)$\Big)$ *принимаем, что* $\lambda_1(n)=1$.

Теорема 5. *Для того чтобы при* $n\to\infty$ *равномерно по* x

$$R_n(x)=O\left(n^{-\frac{s-1}{2}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия 1—3 (*с* $\delta=1$) *теоремы* 2 *и условие*

$$1)\quad \int_{-z}^{z} x^s\,dF(x)=O(1), \qquad z\to\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Достаточность условий 1—4. Используем следующую лемму К.-Г. Эссеена (см. [2], стр. 24).

Лемма 2. *Пусть* A, T, ε_0 — *постоянные,* $F_1(x)$ — *неубывающая функция,* $G(x)$ — *функция ограниченной вариации,* $f_1(t)$ и $g(t)$ — *их характеристические функции. Если*

1) $F_1(-\infty)=G(-\infty)$, $F_1(+\infty)=G(+\infty)$;

2) $G'(x)$ *существует при всех* x *и* $|G'(x)|\leqslant A$;

$$3)\quad \varepsilon_0=\sup_x\left|\int_{|t|\leqslant T}\frac{e^{-itx}\left(f_1(t)-g(t)\right)}{t}\,h\left(\frac{t}{T}\right)dt\right|, \tag{6}$$

где $h(t)\in H$, *то каждому числу* $k>1$ *соответствует число* $C(k)$, *зависящее только от* k, *такое, что*

$$\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\leqslant\sup_x|F_1(x)-G(x)|\leqslant k\,\frac{\varepsilon_0}{2\pi}+C(k)\,\frac{A}{T}; \tag{7}$$

при этом $C(2)\leqslant\frac{24}{\pi}$.

Заметим, что в формулировке К.-Г. Эссеена интеграл ε_0 имеет другой вид и в (7) нет оценки снизу. Эти незначительные очевидные изменения показывают необходимость и достаточность условия 4 в теореме 1 и условия 3 в теореме 4.

Пусть далее $T=\lambda_1(n)\sqrt{n^{s-2}}$; $R_n(x)=F_1(x)-G(x)$;

где $F_1(x)=F_n(x)$ и

$$G(x)=\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j Q_j(x)\,\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\Phi(x)}{\sqrt{2\pi}};$$

ε — достаточно малое положительное число;

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x).$$

Известно (см. [1]), что при выполнении условий 1—3 для всех $|t| \leqslant \varepsilon \sqrt{n}$ имеет место неравенство

$$\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g(t) \right| \leqslant \frac{C_1 |t|^s}{\lambda_2(n)\sqrt{n^{s-2}}} e^{-c_1 t^2}. \tag{8}$$

Теперь применяем неравенство (7) и после очевидных вычислений получаем

$$\sup_x |R_n(x)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Необходимость условий 1—3 доказал И. А. Ибрагимов в [1]. Из (7) и (8) вытекает

$$\sup_x \left| \int\limits_{\varepsilon\sqrt{n}\leqslant|t|\leqslant T} e^{itx} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{t} h\left(\frac{t}{T}\right) dt \right| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right) +$$

$$+ \int\limits_{|t|\leqslant\varepsilon\sqrt{n}} \left| \frac{f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g(t)}{t} \right| dt = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Доказательства теорем 4 и 5 аналогичные.

Теоремы 2 и 3 являются очевидными следствиями из теоремы 1 и леммы 1.

В случае $s=3$ из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по x*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\mu_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\int\limits_{|x|>z} x^2\, dF(x) = o(z), \qquad z\to\infty;$

2) $\lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_{-z}^{z} x^3\, dF(x) = \mu_3;$

3) *существует характеристическая функция $h(t)\in H$ такая, что при любом $\varepsilon>0$ имеет место равенство*

$$\sup_x \left| \int\limits_{\varepsilon<|t|\leqslant\lambda_1(n)} \frac{e^{itx} f^n(t)}{t} h\left(\frac{t}{\lambda_1(n)}\right) dt \right| = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Замечание. Условие 3 можно заменить следующим условием:

4) случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ не являются решетчатыми.

Достаточность условия 4 — широко известный факт (см., например, [2] или [5]).

Необходимость. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют общее решетчатое распределение $F(x)$, т.е. с положительной вероятностью принимают значения только из арифметичесской прогресии $\{a+kh\}$, где $h>0$ максимальный шаг распределения $F(x)$.

Из (9) вытекает справедливость условий 1 и 2 (см. [1]). Следовательно,

$$F_n(x)=\Phi(x)+\frac{\mu_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{h}{\sigma}S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Отсюда и из (9) вытекает, что

$$\frac{h}{\sigma}S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi n}}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В частности,

$$\frac{h}{\sigma}S\left(-\frac{an}{h}\right)=o(1)$$

при $n\to\infty$, т.е. $h=0$.

Далее по предположению существует $t_0\neq 0$, для которой $|f(t_0)|=1$. Так как $t_0=\frac{2\pi}{h}$, то должно быть $t_0=+\infty$ или $-\infty$. Необходимость условия 4 доказана.

2. Пусть далее $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – решетчатые случайные величины принимают значения из арифметической прогрессии $\{a+kh\}$ с разностью h. Асимптотическое разложение для $F_n(x)$ требует больших вычислений и специальных неравенств для оценки остаточного члена (см. [6]). Здесь мы изменим формулировку и доказательство теоремы об асимптотическом разложении для $F_n(x)$. Известная теорема К.-Г. Эссеена вытекает как следствие из следующей теоремы.

Теорема 7. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по x*

$$F_n(x)=\sum_{\nu<x}\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\varphi(y_{n\nu})\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{6\sigma^3}(y_{n\nu}^3-3y_{n\nu})\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение трех условий:

1) *выполнение условия* 1 *теоремы* 6;

2) *выполнение условия* 2 *теоремы* 6;

3) *шаг h распределения случайной величины ξ_1 максимален. Здесь*

$$y_{n\nu}=\frac{\nu h+an}{\sigma\sqrt{n}}\quad \text{и}\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

Доказательство теоремы 7. Достаточность. Пусть

$$\bar{g}(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{ity_{n\nu}}a_n(y_{n\nu})\frac{h}{\sigma\sqrt{n}},$$

где

$$a_n(y_{n\nu})=\varphi(y_{n\nu})\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\mu_3}{\sigma^3}(y_{n\nu}^3-3y_{n\nu})\right\}.$$

С помощью формулы суммирования Эйлера—Маклорена (см. [7], стр. 143) получаем

$$\tilde{g}(t)=\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\frac{hx-an}{\sigma\sqrt{n}}} a_n\left(\frac{hx+an}{\sigma\sqrt{n}}\right)dx-$$

$$-\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} S(x)\left(e^{it\left(\frac{hx+an}{\sigma\sqrt{n}}\right)} a_n\left(\frac{hx+an}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)' dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} a_n(x)\,dx - it\,\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right) e^{itx} a_n(x)\,dx-$$

$$-\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right) e^{itx} a_n'(x)\,dx. \tag{10}$$

Поскольку

$$S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\nu}\sin\left(2\pi\nu\,\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right),$$

то

$$I(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\nu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\sin\left(2\pi\nu\,\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right) a_n(x)\,dx=$$

$$=-i\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx+2\pi i\lambda\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}} a_n(x)\,dx=$$

$$=-i\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{2\pi\lambda}\,e^{-2\pi i\lambda\frac{an}{h}}\,g\left(t+2\pi\lambda\,\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right).$$

Здесь $\lambda=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ и

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} a_n(x)\,dx.$$

Так как

$$a_n'(x)=-x a_n(x)+\frac{3\mu_3(x^2-1)}{6\sigma^3\sqrt{n}}\,\varphi(x), \tag{11}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right) e^{itx} a_n'(x)\,dx = iI'(t)+\frac{3\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}\left(-Y''(t)-Y(t)\right). \tag{12}$$

Здесь

$$Y(t)=-i\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{2\pi\lambda}\,e^{-\frac{1}{2}\left(t+2\pi\lambda\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2-2\pi i\lambda\,\frac{an}{h}}.$$

Вычислим производные $I'(t)$ и $Y''(t)$:

$$I'(t) = -i \sum_{\lambda \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \lambda \frac{an}{h}}}{2\pi\lambda} g'\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) =$$

$$= i \sum_{\lambda \neq 0} \left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) \frac{e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h}}}{2\pi\lambda} g\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) +$$

$$+ (-i) \sum_{\lambda \neq 0} \frac{i\mu_3 3\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2}{2\pi\lambda \cdot 6\sigma^3\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2 - 2\pi i\lambda \frac{an}{h}} \tag{13}$$

и

$$-Y''(t) - Y(t) = Y(t) + i \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{2\pi\lambda} e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h} - \frac{1}{2}\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2} \times$$

$$\times \left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2 - Y(t). \tag{14}$$

Из (10—14) вытекает

$$\bar{g}(t) = g(t) - \frac{ith}{\sigma\sqrt{n}} I(t) - \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \left[-iI'(t) + \frac{3\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}}\left(-Y''(t) - Y(t)\right)\right] =$$

$$= g(t) - \frac{ith}{\sigma\sqrt{n}} I(t) - \frac{ih}{\sigma\sqrt{n}} \left\{ -tI(t) + i \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\sigma\sqrt{n}}{h} g\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) \times \right.$$

$$\times e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h}} + (-i) \sum_{\lambda \neq 0} \frac{3i\mu_3\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2}{12\pi\lambda\sigma^3\sqrt{n}} e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h} - \frac{1}{2}\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2} +$$

$$\left. + \frac{(-i)h}{\sigma\sqrt{n}} \frac{3\mu_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2}{2\pi\lambda} e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h} - \frac{1}{2}\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right)^2} \right\} =$$

$$= g(t) + \sum_{\lambda \neq 0} g\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h}} =$$

$$= \sum_{\lambda = -\infty}^{\infty} g\left(t + 2\pi\lambda \frac{\sigma\sqrt{n}}{h}\right) e^{-2\pi i\lambda \frac{an}{h}}. \tag{15}$$

Пусть $y \leqslant x$ и $|x| \leqslant n^4$, $|y| \leqslant n^4$. Очевидно, что

$$Y(x, y) = F_n(x) - F_n(y) - \sum_{y \leqslant \nu < x} a_n\left(\frac{h\nu - an}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{h}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} \frac{\left(f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \bar{g}(t)\right)\left(e^{-ity} - e^{-itx}\right)}{2i \sin \frac{th}{2\sigma\sqrt{n}}} dt.$$

Из определения функции $\bar{g}(t)$ немедленно вытекает, что

$$|Y(x, y)| = \frac{1}{2} \left| \int\limits_{|t| \leq \frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} \frac{f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g(t)}{t} \right| dt + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Далее в силу теоремы 3 из [1] и условия 3 теоремы 7

$$\int\limits_{|t| \leq \frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} \left| \frac{f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - g(t)}{t} \right| dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Так как $F_n(-n^4)$ и $1 - F_n(n^4) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

$$\sum_{|\nu| > n^4} a_n\left(\frac{h\nu - an}{\sigma\sqrt{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

то достаточность условий 1–3 доказана.

Необходимость. С помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена (см. [7], стр. 142) получаем

$$\frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{\nu < x} a_n\left(\frac{h\nu + an}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{x} a_n\left(\frac{hy + an}{\sigma\sqrt{n}}\right) dy -$$

$$- \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} S(x) a_n\left(\frac{xh + an}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 B_2(x) a_n'\left(\frac{hx + an}{\sigma\sqrt{n}}\right) -$$

$$- \frac{1}{6}\left(\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{x} a_n''\left(\frac{hy + an}{\sigma\sqrt{n}}\right) B_2(y) dy.$$

Здесь $S(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$, $[x]$ – целая часть x;

$$B_2(x) = -2 \sum_{\lambda \neq 0} \frac{e^{2\pi i \lambda x}}{(2\pi i \lambda)^2}.$$

После замены переменных получаем

$$\frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{\nu < \frac{\sigma x\sqrt{n} - an}{h}} a_n\left(\frac{\sigma\sqrt{n}\nu + an}{h}\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} a_n(x)\, dx -$$

$$- \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} S\left(\frac{x\sigma\sqrt{n} - an}{h}\right) \varphi(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

и

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\mu_3(1 - x^2)}{6\sigma^3\sqrt{n}} \varphi(x) - \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n} - an}{h}\right) \varphi(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (16)$$

Отсюда и из теоремы 4 ([5]) вытекает необходимость условий 1–3.

Замечание. Теорема К.-Г.Эссеена (см. [2], теорема 3.3.2) вытекает из теоремы 7 и соотношения (16).

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
24.IX.1971

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических разложениях Чебышева – Крамера, Теор. вер. и ее прим., **XII**, вып, 3(1967), 506–519.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные случайные величины, М., „Наука“, 1965.
3. Ю. В. Прохоров, Некоторые уточнения теоремы Ляпунова, ИАН, сер. матем., **16** (1952), 281–292.
4. H. Bergström, On asymptotic expansions of probability functions, Skand. Aktuartiedskr., H., 1-2(1951), 1-34.
5. А. Бикялис, О точности аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин нормальным распределением, Liet. matem. rink., **XI**, № 2 (1971), 237–240.
6. В. В. Петров, Оценка близости функций ограниченной вариации по близости их преобразований Фурье–Стилтьеса, ДАН СССР, **192**, № 5 (1970), 993–994.
7. Г. Крамер, Математический метод статистики, М., ИЛ, 1948.

RIBINĖS TEOREMOS NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMOMS

A. Bikelis

Reziumė)

Darbe nagrinėjamas nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ normuotosios sumos

$$S_n = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

pasiskirstymo funkcijos $F_n(x)$ asimptotinis skleidinys. Gautos būtinos ir pakankamos sąlygos liekamojo nario įvertinimui asimptotiniuose skleidiniuose. Darbe apibendrinti žinomieji I. Ibragimovo rezultatai.

THE LIMIT THEOREMS FOR THE SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

A. Bikelis

Summary)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be a sequence of independent and identically distributed random variables.

The paper considers the asymptotic expansion of the distribution function $F_n(x)$ of the normed sum

$$S_n = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

The sufficient and necessary conditions for the estimation of the remainder term of the asymptotic expansion are obtained. Thus in the present paper some well-know results of I. Ibragimov are generalized.