УДК 519.21

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В R^k. III

А. Бикялис

1. Асимптотические разложения для распределений сумм 0-решетчатых k-мерных случайных векторов

Через $\mu_r(\mathbf{t})$ обозначим „моменты" r-го порядка:

$$\mu_r(\mathbf{t}) = \sum_{l_1+l_2+\ldots l_k=r} \frac{r!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!}\, \mu_{(r:l_1, l_2, \ldots, l_k)}\, t_1^{l_1} t_2^{l_2} \ldots t_k^{l_k},$$

$$r = 3,\ 4,\ \ldots,$$

где $\mu(_{r:l_1, l_2, \ldots, l_k})$ — вещественные числа, $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — целые неотрица тельные числа, $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. При этом пусть $\mu_1(\mathbf{t})=0$ и $\mu_2(\mathbf{t})=(\mathbf{t}V, \mathbf{t})$. Здесь $(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ — скалярное произведение в R^k. Пользуясь формулой

$$\bar{\varkappa}_r(\mathbf{t}) = \mu_r(\mathbf{t}) - \sum_{j=1}^{r-3} \frac{(r-1)!}{(r-j-1)!\, j!}\, \mu_{r-j-1}(\mathbf{t})\, \bar{\varkappa}_{j+1}(\mathbf{t}), \tag{1}$$

определяем семиинварианты $\bar{\varkappa}_1(\mathbf{t}), \bar{\varkappa}_2(\mathbf{t}), \ldots, \bar{\varkappa}_s(\mathbf{t})$. Пусть далее

$$P_r(i\mathbf{t}) = \frac{\varkappa_{r+2}(i\mathbf{t})}{(r+2)!} +$$

$$+\sum_{l=1}^{r-1} \sum{}^{*} \frac{(r-j_l)(j_l-j_{l-1})\ldots(j_2-j_1)\,\varkappa_{r-j_l+2}(i\mathbf{t})\,\varkappa_{j_l-j_{l-1}+2}(i\mathbf{t})\ldots\bar{\varkappa}_{j_2-j_1+2}(i\mathbf{t})\,\bar{\varkappa}_{j_1+2}(i\mathbf{t})}{r\, j_l\, j_{l-1}\ldots j_1\,(r-j_l+2)!\,(j_l-j_{l-1}+2)!\ldots(j_2-j_1+2)!\,(j_1+2)!}, \tag{2}$$

где Σ^* обозначает $\sum\limits_{j_l=l}^{r-1} \sum\limits_{j_{l-1}=l-1}^{j_l-1} \ldots \sum\limits_{j_2=2}^{j_3-1} \sum\limits_{j_1=1}^{j_2-1}$; $\mathfrak{N}$ — класс борелевских множеств в R^k; $\mathfrak{A}$ — класс выпуклых борелевских множеств в R^k;

$$\sum_{r=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(-\Phi)(A) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_A \int\limits_{R^k} e^{-i(\mathbf{t},\mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{t}V,\mathbf{t})}{2}} \times$$

$$\times \sum_{r=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(i\mathbf{t})\, d\mathbf{t}\, d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Рассмотрим точность аппроксимации распределения $P_n(A)=P\{\mathbf{S}_n \in A$ нормированной суммы $\mathbf{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ независимых одинаково распределенных k-мерных случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ интегралами Чебышева – Эрмита, т.е. исследуем необходимые и достаточные условия для оценки остаточного члена

$$R_n(A) = P_n(A) - \sum_{r=1}^{s-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r P_r(-\Phi)(A).$$

Примем, что ξ_1 имеет нулевой вектор математических ожиданий и положительно определенную матрицу V вторых моментов.

Об остаточном члене $R_n(A)$, когда $A \in \mathfrak{N}$ или $A \in \mathfrak{A}$, известен ряд работ [3, 4, 6–8, 10, 11, 14–16, 18, 21, 26, 52], в которых получены достаточные условия ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют конечные моменты s-го порядка, выполнено условие Крамера (c) или для некоторого n_0 распределение $P_{n_0}(A)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту) для оценки скорости убывания $R_n(A)$ при $n \to \infty$. В наилучших оценках показано, что $R_n(A) = 0\,(n^{-\frac{s-2}{2}})$ при $n \to \infty$.

Здесь получены необходимые и достаточные условия для оценки $R_n(A)$ при $A \in \mathfrak{N}$. В случае же $A \in \mathfrak{A}$ полученные необходимые условия не являются достаточными. Для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т.е. при $k=1$, впервые эту задачу решил И. А. Ибрагимов в [53]. Некоторые дополнения к его исследованиям опубликованы в работах [54, 55].

Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы при $n \to \infty$ имело место равенство*

$$\sup_{A \in \mathfrak{N}} |R_n(A)| = o\,(n^{-\frac{s-2}{2}}) \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) *справедливый одномерный аналог равенства* (4) *для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин*

$$(\xi_1, \mathbf{t},) \ (\xi_2, \mathbf{t}), \ldots, (\xi_n, \mathbf{t}) \tag{5}$$

при любом $\mathbf{t} \in \{\mathbf{t} : |\mathbf{t}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_k^2} = 1\}$;

2) *существует целое число n_0 такое, что распределение $P_{n_0}(A)$ содержит абсолютно непрерывную компоненту.*

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что достаточно существования справедливого одномерного аналога равенства (4) для некоторой конечной системы векторов $\mathbf{t}$ из R^k, длина которых равна единице.

Из теоремы 1 после очевидных вычислений вытекает теорема 2.

Теорема 2. *Если s — четное число, то для того чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение* (4), *необходимо и достаточно существование справедливого одномерного аналога равенства* (4) *для последовательностей координат случайных векторов* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Обозначим $\alpha_r(\mathbf{t}) = M[(\xi_1, \mathbf{t})^r]$, $r = 1, 2, \ldots, s$.

Замечание 2. Условие 1 теоремы 1 можно заменить следующими условиями:

1) абсолютные моменты распределения $P(A)$ случайного вектора ξ_1 до порядка $s-1$ включительно конечны и для всех $|\mathbf{t}| = 1$ $\alpha_3(\mathbf{t}) = \mu_3(\mathbf{t}), \ldots$ $\ldots, \alpha_{s-1}(\mathbf{t}) = \mu_{s-1}(\mathbf{t})$,

2)

$$\int\limits_{|(\mathbf{x},\mathbf{t})|>z} |(\mathbf{x},\mathbf{t})|^{s-1}\,dF(\mathbf{x})=o(z^{-1}),\qquad z\to\infty; \tag{6}$$

3)

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_{-z}^{z}\ldots\int\limits_{-z}^{z}(\mathbf{x},\mathbf{t})^s\,dF(\mathbf{x})=\mu_s(\mathbf{t}) \tag{7}$$

для всех $|\mathbf{t}|=1$.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия доказана в [53]. Из (4) вытекает, что

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1}\sup_{y\in R^1}\left|R_n\left(\{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\mathbf{t})<y\}\right)\right|=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right). \tag{8}$$

В интеграле

$$I=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{\{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\mathbf{t})<y\}}\int\limits_{R^k}e^{-i(\mathbf{u},\mathbf{x})-\frac{(\mathbf{u}V,\mathbf{u})}{2}}\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{x} \tag{9}$$

делаем замену переменных $\mathbf{v}=\mathbf{x}T$. В матрице T m-й столбец равен $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Индекс m выбираем так, чтобы $m\neq 0$. В других местах на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы матрицы T – нули. Якобиан равен $\frac{1}{t_m}$. Получаем

$$I=\frac{1}{(2\pi)^k t_m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{v_m<y}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R^k}e^{-i\left(\mathbf{u}(T^{-1})',\mathbf{v}\right)-\frac{(\mathbf{u}V,\mathbf{u})}{2}}\sum_{j=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(i\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{v}.$$

Ещё раз заменяем переменные интегрирования: $\mathbf{z}=\mathbf{u}\,(T^{-1})'$. Якобиан равен t_m. Очевидно, $(\mathbf{z}T'V,\mathbf{z}T')=M\left(\xi_{11}z_1+\ldots+(\xi,\mathbf{t})z_m+\ldots+\xi_{1k}z_k\right)^2$.
Далее

$$\mu_r(i\mathbf{z}T')=\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_k=r}\frac{i^r r!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!}\mu_{(r:l_1,l_2,\ldots,l_k)}(z_1+z_mt_1)^{l_1}\times$$

$$\times(z_2+z_mt_2)^{l_2}\ldots(z_k+z_mt_k)^{l_k}=i^r z_m^r\times$$

$$\times\sum_{l_1+l_2+\ldots+l_k=r}\frac{r!}{l_1!\,l_2!\ldots l_k!}t_1^{l_1}t_2^{l_2}\ldots t_k^{l_k}=$$

$$=\sum_{\substack{l_m\neq r\\ l_1+\ldots+l_k=r}}b_{l_1l_2\ldots l_k}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$P_r(i\mathbf{z}T')=P_{rt}(iz_m)+\sum_{l_1+\ldots+l_k=r+2}a_{l_1l_2\ldots l_k}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k}.$$

Здесь $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — целые неотрицательные числа. Нетрудно заметить, что среди чисел $l_1, l_2, \ldots, l_{j-1}, l_{j+1}, \ldots, l_k$ существует хотя бы одно число, не равное нулю. $P_{rt}(iz_m)$ определяем формулой (3), куда входят „моменты", умноженные на $(iz_m)^r$. Получаем

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{s-2}\int\limits_{v_m<y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i(z_m,\,v_m)-\frac{z^2M(\xi,\,t)^2}{2}}P_{rt}(iz_m)\,dz_m\,dv_m+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)}\sum_{r=1}^{s-2}\sum_{l_1+\ldots+l_k=r+2}\frac{a_{l_1l_2\ldots l_k}}{\sqrt{n}^{\,r}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{v_m<y}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R^k}e^{-i(\mathbf{z},\,\mathbf{v})-\frac{(\mathbf{z}T'VT,\mathbf{z})}{2}}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k}\,d\mathbf{z}\,d\mathbf{v}. \tag{10}$$

Пусть $\varphi(\mathbf{v})$ — плотность нормального закона, характеристическая функция которого равна $\exp\left\{-\frac{(\mathbf{z}T'VT,\ \mathbf{z})}{2}\right\}$. Имеем

$$(-1)^{r+2}\frac{\partial^{r+2}\varphi(\mathbf{v})}{\partial v_1^{l_1}\partial v_2^{l_2}\ldots\partial v_k^{l_k}}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{R^k}e^{-i(\mathbf{z},\,\mathbf{v})-\frac{(\mathbf{z}T'VT,\ \mathbf{z})}{2}}z_1^{l_1}z_2^{l_2}\ldots z_k^{l_k}\,d\mathbf{z}.$$

Поэтому, если среди чисел $l_1, \ldots, l_{m-1}, l_{m+1}, \ldots, l_k$ существует хотя бы одно число, не равное нулю, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^{r+2}\varphi(\mathbf{v})}{\partial v_1^{l_1}\partial v_2^{l_2}\ldots\partial v_k^{l_k}}\,dv_1\ldots dv_{m-1}dv_{m+1}\ldots dv_k=0.$$

Отсюда следует, что в равенстве (7) второй интеграл равен нулю. Следовательно, из теоремы 1 вытекает справедливость одномерного аналога теоремы 1 для последовательности (10) при любом $|\mathbf{t}|=1$.

Достаточность. Из

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1}\sup_{y\in R^1}\left|R_n\left(\{\mathbf{x}:(\mathbf{x},\ \mathbf{t})<y\}\right)\right|=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)$$

вытекают условия 1—3 замечания 2. В силу (6) и (7)

$$\int\limits_{|\mathbf{x}|>z}|x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_k^{l_k}|\,dF(\mathbf{x})=o(z^{-1}),\qquad z\to\infty,$$

где $l_1+l_2+\ldots+l_k=s-1$, и

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_{-z}^{z}\ldots\int\limits_{-z}^{z}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_k^{l_k}\,dF(\mathbf{x})=\mu_{(s\,:\,l_1,\,l_2,\,\ldots,\,l_k)}$$

для всех сумм $l_1+l_2+\ldots+l_k=s$.

Дальнейшие рассуждения ничем существенным не отличаются от доказательства теоремы 3 из [14], поэтому их подробно не излагаем.

Теорема 3. *Для того чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|R_n(A)|=O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right),\qquad 0<\delta\leqslant 1, \tag{*}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *для случайных величин* $(\xi_1, \mathbf{t})$, $(\xi_2, \mathbf{t})$, …, $(\xi_n, \mathbf{t})$ *при любом* $\mathbf{t}$ *из* $\{\mathbf{t} : |\mathbf{t}|=1\}$ *справедлив одномерный аналог равенства* (*);

2) *условие* 2 *теоремы* 1.

Замечание 3. Условие 1 в теореме 3 можно заменить следующими условиями:

1) конечные абсолютные моменты порядка s и для всех $|\mathbf{t}|=1$ $\mu_3(\mathbf{t})=\alpha_3(\mathbf{t}), \ldots; \mu_s(\mathbf{t})=\alpha_s(\mathbf{t})$;

2) при $0<\delta<1$

$$\int\limits_{|(\mathbf{x},\, \mathbf{t})|>z} |(\mathbf{x},\, \mathbf{t})|^s dF(\mathbf{x}) = O(z^{-\delta}), \qquad z\to\infty, \tag{11}$$

для всех $|\mathbf{t}|=1$.

В случае $\delta=1$ в (11) вместо δ подставляем единицу и принимаем еще одно условие:

3)

$$\int\limits_{-z}^{z} \cdots \int\limits_{-z}^{z} (\mathbf{x},\, \mathbf{t})^{s+1} dF(\mathbf{x}) = O(1), \qquad z\to\infty, \tag{12}$$

для всех $|\mathbf{t}|=1$.

Теорема 4. *Для того чтобы при* $n\to\infty$ *имело место соотношение*

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}} |P_n(A)-\Phi(A)| = O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right), \qquad 0<\delta\leqslant 1,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1)

$$\sup_{|\mathbf{t}|=1}\ \sup_{y\in R^1} \left| P_n\left(\{\mathbf{x} : (\mathbf{x},\, \mathbf{t})<y\}\right) - \Phi\left(\{\mathbf{x} : (\mathbf{x},\, \mathbf{t})<y\}\right)\right| = O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right);$$

2) *условие* 2 *теоремы* 1.

Утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3 и леммы 1 из [55].

Доказательство теоремы 3. Необходимость условий 1 и 2 следует из доказательства теоремы 1.

Достаточность. Вместо условия 1 теоремы 3 используем условия 1—3 замечания 3. Теперь из (11) и (12) получаем

$$\int\limits_{|\mathbf{x}|>z} |x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_k^{l_k}|\, dF(\mathbf{x}) = O(z^{-\delta}), \qquad z\to\infty,$$

при $l_1+l_2+\ldots+l_k=s$ и

$$\int\limits_{-z}^{z} \cdots \int\limits_{-z}^{z} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_k^{l_k}\, dF(\mathbf{x}) = O(1), \qquad z\to\infty,$$

при $l_1+l_2+\ldots+l_k=s+1$. Далее следовало бы повторить доказательство теоремы 3 из работы [14].

Теперь рассмотрим остаточный член $R_n(A)$, когда A принадлежит классу $\mathfrak{A}$ выпуклых борелевских множеств в R^k.

Теорема 5. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по $A\in\mathfrak{A}$*

$$R_n(A)=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right),$$

необходимо, а для распределений $F(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию Крамера

$$(c)\qquad \overline{\lim_{|\mathbf{t}|\to\infty}}\, |f(\mathbf{t})|<1,$$

и достаточно выполнение условия 1 *теоремы* 1. *Здесь $F(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{t})$ — соответственно функция распределения и характеристическая функция случайного вектора ξ_1.*

Теорема 6. *Для того чтобы при $n\to\infty$ равномерно по $A\in\mathfrak{A}$*

$$R_n(A)=O\left(n^{-\frac{s+\delta-2}{2}}\right), \qquad 0<\delta\leqslant 1,$$

необходимо, а для распределений $F(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (*c*), *и достаточно выполнение условия* 1 *теоремы* 3.

Докажем только теорему 5, так как теорема 6 доказывается аналогично.

Необходимость. При любом $|\mathbf{t}|=1$ и $y\in R^1$ множество $\{\mathbf{x} : (\mathbf{x}, \mathbf{t})<y\}$ выпуклое. Поэтому из $(8-10)$ вытекает, что условие 1 теоремы 1 необходимое.

Достаточность. Не ограничивая общности, можно считать, что V — единичная матрица порядка $k\times k$. Сперва докажем теорему 5 для распределения $P_{\mathbf{Z}_n}(A)$ суммы

$$\mathbf{Z}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\eta_j-M\eta_j)$$

независимых одинаково распределенных случайных векторов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$:

$$\eta_j=(\eta_{1j}, \eta_{2j}, \ldots, \eta_{kj})=\begin{cases}\xi_j, & \text{если } |\xi_j|\leqslant\sqrt{n},\\ 0, & \text{если } |\xi_j|>\sqrt{n}.\end{cases}$$

В силу леммы 10 из [49] для достаточно больших n матрица V вторых моментов случайного вектора η_1 положительно определенная.

Пусть $\overline{\varkappa}_r(\mathbf{t})$ — семиинвариант r-го порядка случайной величины $(\mathbf{t}, \eta_1-M\eta_1)$. Случайный вектор ξ_1 имеет конечные абсолютные моменты до порядка $s-1$ включительно (см. замечание 2). Кроме того,

$$I=|M(\xi_1, \mathbf{t})^r-M(\eta_1, \mathbf{t})^r|=o\left(n^{-\frac{s-r}{2}}\right) \tag{13}$$

при $|\mathbf{t}|=1$ и $r=1, 2, \ldots, s-1$. Действительно,

$$I=\left|\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{t})^r dF(\mathbf{x})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{n}^{-(s-r-1)}\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}|(\mathbf{x}, \mathbf{t})|^{s-1}dF(\mathbf{x})=o\left(n^{-\frac{s-r}{2}}\right).$$

Используя семиинварианты $\bar{\bar{\varkappa}}_r(\mathbf{t})$, $r=1, 2, \ldots, s-1$, строим (см. (1–3)) асимптотическое разложение для распределения $P_{Z_n}(A)$:

$$\Delta_n(A)=\sum_{r=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \bar{P}_r(-\Phi)(A).$$

Поскольку

$$\sup_{A\in\mathfrak{N}}|P_{S_n}(A)-P_{Z_n}(A-M\eta_1)|\leqslant nP\{|\xi_1|>\sqrt{n}\}=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right),$$

для всех $A\in\mathfrak{A}$

$$R_n(A)=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)+P_{Z_n}(A-M\eta_1)-\sum_{r=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \bar{P}_r(-\Phi)(A-M\eta_1)+$$

$$+\sum_{r=1}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r[\bar{P}_r(-\Phi)(A-M\eta_1)-P_n(-\Phi)(A)]=$$

$$=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right)+I_1(A)+I_2(A).$$

Оценка $I_1(A)$. В силу (1.1) из [49] следует, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|I_1(A)|\leqslant 2\sup_{B\in\mathfrak{N}}|I_1(B)*H(Bn^s)|+C(k)\sup_{\mathbf{y}\in R^k}\int_{(A)_{n^{-s}}}|d\Delta_n(\mathbf{y}+\mathbf{x})|.$$

Здесь $H(B)$ – функция распределения (см. [49]); $(A)_\varepsilon$ – ε – окрестность множества A; $*$ – знак композиции; $Bn^s=\{\mathbf{x}\,n^s:\mathbf{x}\in B\}$.

Пользуясь равенством (13) и леммами 8 и 9 из [11], после несложных вычислений получаем

$$C(k)\sup_{\mathbf{y}\in R^k}\int_{(A)_{n^{-s}}}|d\Delta_n(\mathbf{y}+\mathbf{x})|=o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Функция $I_1(\mathbf{x})*H(n^s\mathbf{x})$ абсолютно непрерывная. Ее „плотность“ обозначим через $p_n(\mathbf{x})$. Очевидно, $|p_n(\mathbf{x})|\leqslant C<\infty$ при $\mathbf{x}\in R^k$. Имеем

$$2\sup_{B\in\mathfrak{N}}|I_1(B)*H(n^sB)|=\int_{R^k}|p_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\leqslant$$

$$\leqslant C(k)\left(\int_{R^k}(1+|\mathbf{x}|^{2(s+k)})|p_n(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

По многомерному равенству Парсеваля получаем

$$\int_{R^k}|x_j|^m|p_n(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{|\mathbf{t}|\leqslant n^s}\left|\frac{\partial^m}{\partial t_j^m}\left[\left(e^{-i(\mathbf{t},\sqrt{n}M\eta_1)}f_{\eta_1}^n\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}}\right)-\bar{g}_n(\mathbf{t})\right)h\left(\frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n^s}}\right)\right]\right|^2 d\mathbf{t} \quad (14)$$

для $j=1,2,\ldots,k$ и $m=0,2(k+s)$. Здесь $h(\mathbf{t})$ — характеристическая функция $\left(h(\mathbf{t})\equiv 0\text{ при } |\mathbf{t}|>1\right)$ и

$$\bar{g}_n(\mathbf{t})=\sum_{j=0}^{s-2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j\bar{P}_j(i\mathbf{t})\,e^{-\frac{(\mathbf{t}\bar{V},\,\mathbf{t})}{2}}.$$

Многочлены $\bar{P}_j(i\mathbf{t})$ определяем равенством (2), где используем семиинварианты $\varkappa_r(\mathbf{t})$, $r=1,2,\ldots,s$.

Для оценки интеграла в правой части равенства (14) используем леммы 6,11,16,17 из [49] и соотношение (21) из [14]. Подробно все излагать не будем, только заметим, что из условий теоремы 5 (см. также замечание 2) вытекают следующие равенства:

$$M|(\mathbf{t},\ \eta_1)|^{s-1}=\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}|(\mathbf{x},\ \mathbf{t})|^{s-1}dF(\mathbf{x})=o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),\tag{15}$$

$$\lim_{\sqrt{n}\to\infty}M(\mathbf{t},\ \eta_1)^s=\lim_{\sqrt{n}\to\infty}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^s dF(\mathbf{x})=\mu_s(\mathbf{t})\tag{16}$$

для всех $|\mathbf{t}|=1$ и

$$\sum_{j=1}\int\limits_{|\mathbf{x}|>\sqrt{n}}|x_j|^{s+1}dF(\mathbf{x})=o(\sqrt{n}).\tag{17}$$

Так как $\{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|>\sqrt{n}\}\supset\{\mathbf{x}:|(\mathbf{x},\mathbf{t})|>\sqrt{n},\ |\mathbf{t}|=1\}$, то из условия 2 замечания 2 немедленно вытекает соотношение (15).

Пусть $D=\{\mathbf{x}:|x_j|\leqslant z,\ j=1,2,\ldots,k\}$, тогда

$$\lim_{z\to\infty}\int\limits_{|\mathbf{x}|\leqslant z}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^s dF(\mathbf{x})=\lim_{z\to\infty}\left[\int\limits_{D}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^s dF(\mathbf{x})+\int\limits_{\substack{\bar{D}\\|\mathbf{x}|\leqslant z}}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^s dF(\mathbf{x})\right].\tag{18}$$

Здесь

$$\left|\int\limits_{\substack{\bar{D}\\|\mathbf{x}|<z}}(\mathbf{x},\ \mathbf{t})^s dF(\mathbf{x})\right|\leqslant C(k)\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\substack{|x_j|>z\\|\mathbf{x}|\leqslant z}}|x_j|^s dF(\mathbf{x})\leqslant$$

$$\leqslant C(k)\sum_{j=1}^{k}z\int\limits_{|x_j|>z}|x_j|^{s-1}dF(\mathbf{x})=o(1).\tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает (16).

Обозначим

$$R_j(z)=\int\limits_{|x|>z}|x|^{s-1}dF_{\eta_{1j}}(x);$$

$F_{\eta_{1j}}(x)$ — функция распределения случайной величины η_{1j}. Имеем

$$\int\limits_{\sqrt[3]{n}\leq |x| \leq \sqrt{n}} |x|^{s+1} dF_{\eta_{1j}}(x) = -\int\limits_{\sqrt[3]{n}}^{\sqrt{n}} x_j dR_j(x) =$$

$$= -\sqrt{n}\, R_j(\sqrt{n}) + \sqrt[3]{n}\, R_j(\sqrt[3]{n}) + \int\limits_{\sqrt[3]{n}}^{\sqrt{n}} R_j(x)\, dx =$$

$$= o(1) + C(k) \int\limits_{\sqrt[3]{n}}^{\sqrt{n}} \frac{dx}{x} = o(\sqrt{n}). \tag{20}$$

Очевидно,

$$\int\limits_{|x|\leq \sqrt[3]{n}} |x|^{s+1} dF_{\eta_{1j}}(x) = o(\sqrt{n}). \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает равенство (17).

Для оценки $I_2(A)$ используем соотношения (15—18) и после очевидных вычислений (см. лемму 12 в [14]) получаем

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}} |I_2(A)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Теорема 3 доказана.

2. „Формулы обращения“ для распределений сумм m-решетчатых k-мерных случайных векторов

Определение и основные свойства m-решетчатых распределений $P(A) = P\{\xi\in A\}$ k-мерных случайных векторов изложены в первой части настоящей работы (см. определение 1 в [49], § 2). Не ограничит общности, но упростит вычисления, если в определении m-решетчатых распределений принять: $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ — нулевой вектор в R^k и

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & h_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, предположим, что m первых координат случайного вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_k)$ являются решетчатыми, т.е. m-мерный случайный вектор $\xi_m=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ имеет m-решетчатое распределение. С положительной вероятностью он принимает значения только из m-мерной решетки $\{(\nu_1 h_1, \nu_2 h_2, \dots, \nu_m h_m)\}$, где $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пусть $A = A_m \times A_{k-m}$ – декартово произведение множеств

$$A_m \text{ из } R^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\} \text{ и } A_{k-m} \text{ из } R^{k-m} = \{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k)\};$$

$$\mathbf{x}_m = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \mathbf{x}_{k-m} = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_k);$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_m, x_{k-m});$$

$$\bar{A}_m = \bigcup_{\mathbf{v}_m \in A_m} \left\{ \mathbf{x}_m : \mathbf{x}_m \in \left[\nu_1 + \frac{h_1}{2}; \nu_1 + \frac{h_1}{2}\right) \times \left[\nu_2 - \frac{h_2}{2}; \nu_2 + \frac{h_2}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \ldots \times \left[\nu_m - \frac{h_m}{2}; \nu_m + \frac{h_m}{2}\right) \right\}, \tag{22}$$

$\mathbf{v}_m = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ – вектор с целочисленными координатами.

Для распределения $P(A)$ справедливо равенство

$$P(A) = P\{\xi_m \in A_m, \xi_{k-m} \in A_{k-m}\} = P\{\xi_m \in \bar{A}_m, \xi_{k-m} \in A_{k-m}\} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 \ldots h_m} \int\limits_{|x_1| \leqslant \frac{h_1}{2}} \ldots \int\limits_{|x_m| \leqslant \frac{h_m}{2}} P\{\xi_m \in \bar{A}_m - (x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

$$\xi_{k-m} \in A_{k-m}\} \, d\mathbf{x}_m = P\{\xi + \eta \in \bar{A}_m \times A_{k-m}\}.$$

Здесь k-мерные случайные векторы η и ξ являются независимыми. Функция распределения η имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{m} q_j(x_j) \prod_{i=m+1}^{k} E_i(x_i),$$

где $q_j(x_j)$ – распределение, равномерное на интервале $-\frac{h_j}{2} \leqslant x_j \leqslant \frac{h_j}{2}$, $E_i(x_i)$ – распределение, вырожденное в 0. Характеристическую функцию распределения $Q(\mathbf{x})$ обозначим через $\bar{\bar{q}}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{j=1}^{k} \bar{\bar{q}}_j(t_j)$.

Пусть далее функция $G(A)$ ограниченной вариации, $G(R^k) \neq 0$ и

$$G(A) = \sum_{\mathbf{v}_m \in A_m} \int\limits_{A_{k-m}} dG(\mathbf{v}_m \mathbf{h}_m, \mathbf{x}_{k-m}).$$

Имеем

$$G(A) = \sum_{\mathbf{v}_m \in \bar{A}_m} \int\limits_{A_{k-m}} dG(\mathbf{v}_m \mathbf{h}_m, \mathbf{x}_{k-m}) = G * Q(\bar{A}_m \times A_{k-m}).$$

Здесь $\mathbf{v}_m \mathbf{h}_m = (\nu_1 h_1, \nu_2 h_2, \ldots, \nu_m h_m)$.

Следовательно,

$$\sup_A |P(A) - G(A)| = \sup_A |P\{\xi + \eta \in \bar{A}_m \times A_{k-m}\} - G * Q(\bar{A}_m \times A_{k-m})|. \tag{23}$$

Следует отметить, что вообще $G(R^k) \neq 1$, т.е. $P(R^k) - G(R^k) \neq 0$.

Лемма 1. *Для любого $T>0$ имеем*

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|P(A)-G(A)|\leqslant 3\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|\int_{R^k}\left[P\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)-G\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)\right]dH(\mathbf{y})\right|+$$

$$+2\sup_{A\in\mathfrak{A}}\int_{(\bar{A}_m\times A_{k-m})_{\frac{2a}{T}}}|dG*Q(\mathbf{x})|+4|1-G(R^k)|. \tag{24}$$

Здесь a зависит только от k.

В известных (см. [11, 19, 20, 24, 52]) формулах типа (24) вместо второго интеграла стоит интеграл

$$I(A)=\sup_{\mathbf{y}\in R^k}\int_{(A)_{\frac{2a}{T}}}|dG(\mathbf{x}+\mathbf{y})|.$$

Пусть, в частности, $G(\mathbf{x})$ – функция одного переменного $\mathbf{x}$ и имеет разрыв высоты $p>0$, тогда

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}I(A)\geqslant p.$$

Поэтому известные формулы типа (24) не дают нужной оценки $\sup\limits_{A\in\mathfrak{A}}I(A)=$ $=O\left(\frac{1}{T}\right)$, которая используется для построения асимптотического разложения для распределения $P\{\mathbf{S}_n\in A\}$, когда слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в сумме $\mathbf{S}_n$ имеют m-решетчатые распределения ($m\geqslant 1$).

Доказательство леммы 1. Из леммы 6 из [11] и равенства (23) вытекает

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}\left|P(A)-\frac{G(A)}{G(R^k)}\right|\leqslant 3\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|\int_{R^k}\left[P\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)-\frac{G\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)}{G(R^k)}\right]dQ*H(\mathbf{y})\right|+$$

$$+\frac{2}{|G(R^k)|}\sup_{A\in\mathfrak{A}}\int_{(\bar{A}_m\times A_{k-m})_{\frac{2a}{T}}}|dG*Q(\mathbf{x})|.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sup_{A\in\mathfrak{A}}|P(A)-G(A)|\leqslant\sup_{A\in\mathfrak{A}}\left|P(A)-\frac{G(A)}{G(R^k)}\right|+\frac{|1-G(R^k)|}{G(R^k)}$$

и

$$\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|\int_{R^k}\left[P\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)-\frac{G\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)}{G(R^k)}\right]dQ*H(\mathbf{y})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{B\in\mathfrak{N}}\left|\int_{R^k}\left[P\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)-G\left(B+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)\right]dH(\mathbf{y})\right|\frac{1}{|G(R^k)|}+\frac{|1-G(R^k)|}{|G(R^k)|}.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть теперь A — k-мерный „интервал". Следуя Б. вон Барой [11], введем операторы P_j, $j=1, 2, \dots, k$, проекций, т.е. $P_j t$ является проекцией точки $\mathbf{t} \in R^k$ на гиперплоскость $t_j=0$. При этом для каждой функции $v(\mathbf{t})$ предположим, что $P_j v(\mathbf{t}) = v(P_j \mathbf{t})$,

$$P_j \left(v(\mathbf{t})\, g(\mathbf{t})\right) = \left(P_j v(\mathbf{t})\right) \left(P_j g(\mathbf{t})\right).$$

Имеем

$$v(\mathbf{t}) = \sum_{(\Gamma,\Lambda)} \left[\prod_{\gamma\in\Gamma} \left(1 - u(t_j) P_j\right) \prod_{\lambda\in\Lambda} u(t_\lambda) P_\lambda \right] v(\mathbf{t}). \tag{25}$$

Здесь суммируем по всем разбиениям (Γ, Λ) совокупности индексов $(1, 2, \dots, k)$; $u(t_\gamma)$ — одномерная характеристическая функция.

Обозначим

$$I = [\mathbf{b};\ \mathbf{d}) = I_m \times I_{k-m} = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : b_1 \leqslant x_1 < d_1, \dots, b_k \leqslant x_k < d_k\},$$

где

$$I_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : b_1 \leqslant x_1 < d_1, \dots, b_m \leqslant x_m < d_m\}$$

и

$$I_{k-m} = \{(x_{m+1}, \dots, x_k) : b_{m+1} \leqslant x_{m+1} < d_{m+1}, \dots, b_k \leqslant x_k < d_k\};$$

множество $\bar{I}_m$ определяем равенством (22) и пусть

$$\bar{I}_m = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_m) : n_1 - \frac{1}{2} \leqslant x_1 < l_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_m - \frac{1}{2} \leqslant x_m < l_m + \frac{1}{2}\right\},$$

где $n_1, \dots, n_m, l_1, \dots, l_m$ — целые числа;

$$H_T(I) = \int_{R^k} \left(P\left(I + \frac{\mathbf{y}}{T}\right) - G\left(I + \frac{\mathbf{y}}{T}\right)\right) dH * Q(\mathbf{y}),$$

где

$$H(\mathbf{y}) = \prod_{j=1}^{k} H_1(y_j),$$

$H_1(y_j)$ — абсолютно непрерывная одномерная функция распределения, характеристическая функция $h_1(t_j)$ которой удовлетворяет условиям:

1) $h_1(t_j)$ — вещественная и $0 \leqslant h_1(t_j) \leqslant 1$,

2) $h_1(t_j) \equiv 0$ при $|t_j| \geqslant 1$,

3) имеет конечные производные достаточно высокого порядка. Пусть

$$h(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{k} h_1(t_j)$$

и

$$v(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t}),$$

тогда

$$H_T(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} v(\mathbf{t})\, \bar{\bar{q}}(\mathbf{t})\, h\left(\frac{\mathbf{t}}{T}\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{-it_j d_j} - e^{-it_j b_j}}{-it_j}\, d\mathbf{t}. \tag{26}$$

Далее

$$I_\varepsilon=\{\mathbf{t}:|t_j|\leqslant\varepsilon,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k\};\quad \bar I_\varepsilon=R_k-I_\varepsilon;$$

$$\mathbf{t}_\Gamma=\prod_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda\mathbf{t};\ \mathbf{t}_\Lambda=\prod_{\gamma\in\Gamma}P_\gamma\mathbf{t};\ I_\varepsilon(\Gamma)=\{\mathbf{t}_\Gamma:|t_\gamma|\leqslant\varepsilon,\ \gamma\in\Gamma\};$$

$$\Delta_\varepsilon=\sup_I\frac{1}{(2\pi)^k}\left|\int_{\bar I_\varepsilon}v(\mathbf{t})\bar{\bar q}(\mathbf{t})h\left(\frac{\mathbf{t}}{T}\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{-it_jd_j}-e^{-it_jb_j}}{-it_j}\,d\mathbf{t}\right|.$$

Лемма 2. *Пусть* $|\operatorname{grad} G*Q(\mathbf{x})|\leqslant L$, *тогда для каждого* $T>0$ *существуют „постоянные"* $C_1(k)$ и $C_2(k)$, *зависящие только от* k, *такие, что*

$$\sup_I|P(I)-G(I)|\leqslant\frac{5}{\varepsilon_0}|1-g(0)|+\frac{C_1(k)L}{T}+\Delta_\varepsilon+$$

$$+\frac{C_2(k)}{\varepsilon_0}\sum_{(\Lambda,\Gamma)}{}'\sup_I\left|\int_{I_\varepsilon(\Gamma)\cap I_T}\prod_{\gamma\in\Gamma}\left(\frac{e^{-it_\gamma d_\gamma}-e^{-it_\gamma b_\gamma}}{t_\gamma}q_\gamma(t_\gamma)h_1\left(-\frac{t_\gamma}{T}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{\gamma\in\Gamma}(1-e^{-\alpha t_\gamma^2}P_\gamma)v(\mathbf{t}_\Gamma)\,d\mathbf{t}_\Gamma\right|.\tag{27}$$

Здесь Σ' *обозначает, что* Γ *не пустое множество; в* $\sup\limits_I|\ldots|$ *„интервал"* $I=[\mathbf{b};\ \mathbf{d})$ *ограниченный;* $\varepsilon_0=\varepsilon^k$, *если* $\varepsilon<1$, *и* $\varepsilon_0=1$, *если* $\varepsilon\geqslant1$.

Неравенство типа (27) впервые доказали С. М. Садикова в [9, 12] и Б. вон Бара в [11].

Доказательство леммы 2. Из леммы 4 в [11] и соотношения (23) вытекает

$$\sup_I\left|P(I)-\frac{G(I)}{G(R^k)}\right|\leqslant\frac{C_1(k)L}{T|G(R^k)|}+$$

$$+3\sup_I\left|\int_{R^k}\left(P-\frac{G}{G(R^k)}\right)\left(I+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)dQ*H(\mathbf{y})\right|.$$

Отсюда получаем

$$\sup_I|P(I)-G(I)|\leqslant4|1-G(R^k)|+\frac{C_1(k)L}{T}+$$

$$+3\sup_I\left|\int_{R^k}(P-G)\left(I+\frac{\mathbf{y}}{T}\right)dQ*H(\mathbf{y})\right|.\tag{28}$$

Из (25) и (26) следует

$$H_T(I)=\frac{1}{(2\pi^k)}\int_{I_\varepsilon}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{-it_jd_j}-e^{-it_jb_j}}{-it_j}h\left(\frac{-\mathbf{t}}{T}\right)\bar{\bar q}(\mathbf{t})v(0)e^{-\alpha|\mathbf{t}|^2}d\mathbf{t}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^k}\sum_{(\Lambda,\Gamma)}{}'\int_{I_\varepsilon(\Lambda)}\prod_{\lambda\in\Lambda}\frac{e^{-it_\lambda d_\lambda}-e^{-it_\lambda b_\lambda}}{-it_\lambda}h_1\left(-\frac{t_\lambda}{T}\right)\bar{\bar q}_\lambda(t_\lambda)e^{-\alpha t_\lambda^2}d\mathbf{t}_\Lambda\times$$

$$\times \int\limits_{I_\varepsilon(\Gamma)} \left(\prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{e^{-it_\gamma d_\gamma}-e^{-it_\gamma b_\gamma}}{-it_\gamma} h_1\left(-\frac{t_\gamma}{T}\right) \bar{\bar{q}}_\gamma(t_\gamma)\right) \times$$
$$\times \prod_{\gamma\in\Gamma} (1-e^{-\alpha t_\gamma^2} P_\gamma)\, v(\mathbf{t}_\Gamma)\, d\mathbf{t}_\Gamma +$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{\bar I_\varepsilon} v(\mathbf{t})\bar{\bar{q}}(\mathbf{t})\, h\left(-\frac{\mathbf{t}}{T}\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{-it_j d_j}-e^{-it_j b_j}}{-it_j}\, d\mathbf{t}.$$

Отсюда и из (28) вытекает неравенство (27). Лемма 2 доказана.

3. „Формулы обращения“ для распределений сумм k-решетчатых k-мерных случайных векторов

Рассмотрим k-мерный невырожденный случайный вектор ξ с k-решетчатой функцией распределения $F(\mathbf{x})$, который принимает значения из k-мерной решетки $\{\mathbf{a}+\mathbf{v}H'\}$, где $\mathbf{v}$ — вектор с целочисленными координатами, H' — невырожденная транспонированная матрица H. Докажем две леммы. При $k=1$ лемма 3 доказана в [2], а лемма 4 в [56].

Лемма 3.

$$P\left\{ \xi-\mathbf{a}\in\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H' \right\}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{[-\pi;\,\pi]} f(\Theta H^{-1}) \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{-i\Theta_j N_j}-e^{-i\Theta_j M_j}}{2i\sin\frac{\Theta_j}{2}}\, e^{-i(\Theta H^{-1},\,\mathbf{a})}\, d\Theta.$$

Здесь

$$[-\pi;\ \pi]=\{(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots,\ \Theta_k):\ -\pi\leqslant\Theta_1\leqslant\pi,$$
$$-\pi\leqslant\Theta_2\leqslant\pi,\ \ldots,\ -\pi\leqslant\Theta_k\leqslant\pi\};$$
$$\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'=\left\{ \mathbf{x}H':\ N_1-\frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant M_1+\frac{1}{2},\right.$$
$$\left. N_2-\frac{1}{2}\leqslant x_2\leqslant M_2+\frac{1}{2},\ \ldots,\ N_k-\frac{1}{2}\leqslant x_k\leqslant M_k+\frac{1}{2} \right\};$$
$$\mathbf{N}=(N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_k),\quad \mathbf{M}=(M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_k).$$

Следствие. *В случае*

$$H=\begin{pmatrix} h_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & h_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & h_k \end{pmatrix},$$

где $h_j>0,\ j=1,2,\ \ldots,\ k,$ *получаем*

$$P\left\{ (\xi-\mathbf{a})\in\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H' \right\}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{I} f(\mathbf{t})\, e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a})} \prod_{j=1}^{k} h_j\, \frac{e^{-it_jh_j\left(N_j-\frac{1}{2}\right)}-e^{-it_jh_j\left(M_j+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{t_jh_j}{2}}\, d\mathbf{t}.$$

Здесь

$$I=\left\{\mathbf{t};\ -\frac{\pi}{h_1}\leqslant t_1\leqslant\frac{\pi}{h_1},\ \ldots,\ \frac{-\pi}{h_k}\leqslant t_k\leqslant\frac{\pi}{h_k}\right\}.$$

Доказательство леммы 3. Поскольку

$$\int_I e^{i\left(\mathbf{t},\ (\mathbf{v}-\boldsymbol{\mu})H'\right)}d\mathbf{t}=\begin{cases}\frac{(2\pi)^k}{|H|} & \text{при}\quad \mathbf{v}=\boldsymbol{\mu},\\ 0 & \text{при}\quad \mathbf{v}\neq\boldsymbol{\mu},\end{cases}$$

где $|H|$ — определитель матрицы H, $\boldsymbol{\mu}$ — вектор с целочисленными координатами, то из равенства

$$f(\mathbf{t})=\sum_{\mathbf{v}\in R^k}e^{i(\mathbf{t},\ \mathbf{a}+\mathbf{v}H')}P\{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{a}+\mathbf{v}H'\}$$

вытекает

$$P\{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{a}+\boldsymbol{\mu}H'\}=\frac{|H|}{(2\pi)^k}\int_I f(\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{t},\ \mathbf{a}+\boldsymbol{\mu}H')}d\mathbf{t}. \tag{30}$$

Очевидно

$$\sum_{\mathbf{v}=\mathbf{N}}^{\mathbf{M}}e^{-i(\mathbf{t},\ \mathbf{a}+\mathbf{v}H')}=e^{-i(\mathbf{t},\ \mathbf{a})}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{-i\Theta_j\left(N_j-\frac{1}{2}\right)}-e^{-i\Theta_j\left(M_j+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{\Theta_j}{2}}. \tag{31}$$

Здесь $\mathbf{t}H=\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots,\ \Theta_k)$. Из (30) и (31) следует утверждение леммы 3

Пусть далее матрица H имеет вид (29). При этом

$$g(\mathbf{t})=\sum_{\mathbf{v}}e^{i(\mathbf{t},\ \mathbf{a}+\mathbf{v}H')}G(\mathbf{a}+\mathbf{v}H')$$

и

$$\sum_{\mathbf{v}}|G(\mathbf{a}+\mathbf{v}H')|<\infty.$$

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\left|P\left\{\boldsymbol{\xi}-\mathbf{a}\in\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right\}-G\left(\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant|1-g(0)|+2^k\sum_{(\Gamma,\ \Lambda)}\int_{I(\Gamma)}\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{\left|e^{-it_\gamma\left(N_\gamma-\frac{1}{2}\right)}-e^{-it_\gamma\left(M_\gamma+\frac{1}{2}\right)}\right|}{|t_\gamma|}\right)\times$$

$$\times\prod_{\gamma\in\Gamma}\left(1-u(t_\gamma)P_\gamma\right)v(\mathbf{t}_\Gamma)|d\mathbf{t}_\Gamma.$$

Здесь $I(\Gamma)=\prod_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda I,$ $u(t_\gamma)$ *— одномерная характеристическая функция решетчатого распределения со скачками в точках* $a_\mu+lh_\mu$, $l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots;$ $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)$.

Имеем

$$G\left(\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right)=\sum_{\mathbf{v}-\mathbf{a}\in\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]}G(\mathbf{a}+\mathbf{v}H').$$

Доказательство леммы 4.

Пусть η k-мерный случайный вектор с характеристической функцией $\prod_{j=1}^{k} u(t_j)$. Имеем

$$P\left\{\xi-\mathbf{a}\in\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right\}-G\left(\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{I} v(\mathbf{t})\,e^{-i(\mathbf{t},\,\mathbf{a})}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{-it_j\left(N_j-\frac{1}{2}\right)}-e^{-it_j\left(M_j+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{t_j h_j}{2}}\,d\mathbf{t}=$$

$$=v(0)P\left\{\eta-\mathbf{a}\left[\mathbf{N}-\frac{1}{2};\ \mathbf{M}+\frac{1}{2}\right]H'\right\}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^k}\sum_{(\Gamma,\ \Lambda)}{}'\int\limits_{I(\Lambda)}\prod_{\lambda\in\Lambda}\frac{e^{-it_\lambda\left(N_\lambda+a_\lambda+\frac{1}{2}\right)}-e^{-it_\lambda\left(M_\lambda+a_\lambda+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{t_\lambda h_\lambda}{2}}\,u(t_\lambda)\,d\mathbf{t}_\Lambda\times$$

$$\times\int\limits_{I(\Gamma)}\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{e^{-it_\gamma\left(N_\gamma+a_\gamma-\frac{1}{2}\right)}-e^{-it_\gamma\left(M_\gamma+a_\gamma+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{t_\gamma h_\gamma}{2}}\,u(t_\gamma)\right)\times$$

$$\times\prod_{\gamma\in\Gamma}\left(1-u(t_\gamma)P_\gamma\right)\,v(\mathbf{t}_\Gamma)\,d\mathbf{t}_\Gamma.$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение леммы 4.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 24.IX.1971

Литература

52. R. N. Bhattacharya, Rates of weak convergence and asymptotic expansions for classical central limit theorems, Ann. of Math. Stat; **42**, No 1 (1971), 241–259.
53. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических разложениях Чебышева–Крамера, Теор. вер. и ее прим., XII, вып. 3 (1967), 506–519.
54. А. Бикялис, О точности аппроксимации распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин нормальным распределением, Liet. matem. rink., XI, № 2 (1971), 237–240.
55. А. Бикялис, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Liet. matem. rink., XII, № 4 (1972).
56. И. П. Цареградский, Приближения распределений сумм, Теор. вер. и ее прим., IV, 2 (1959) 6, 243–246.

APIE CENTRINĘ RIBINĘ TEOREMĄ ERDVĖJE R^k. III

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjamas nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių k-mačių atsitiktinių vektorių $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ normuotos sumos

$$\mathbf{S}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

pasiskirstymo $P_n(A)$ asimptotinis išdėstymas. Gautos būtinos ir pakankamos sąlygos liekamojo nario įvertinimui.

Be to, gautos Eseno ir Bergstremo tipo nelygybės k-mačiams m-gardeliniams pasiskirstymams.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM IN R^k. III

A. Bikelis

(*Summary*)

Let

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$$

be a normalized sum of independent and identically distributed k-dimensional vectors $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

The paper gives an asymtpotic expansion of the distribution function $P_n(A)$ of the sum S_n by integrals $P_r(-\Phi)(A)$ (cf.[3]). The necessary and sufficient conditions for the estimation of the remainder term in the asymptotic expansion are also obtained.

Some Esseen - Bergström type inequalities for k-dimensional m-lattice distributions are also obtained.