1972

УДК 519.24

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Р. Бенткус

Введение

Пусть $X(t)=\{X_a(t)\}_{a=\overline{1,r}}$ (где время t может быть как дискретным: $t=\ldots, -1, 0, 1, \ldots$, так и непрерывным: $-\infty<t<\infty$) – r-мерный стационарный в широком смысле случайный процесс со средним 0 и вещественными компонентами. В случае непрерывного времени t дополнительно предположим, что процесс $\{X(t), \ -\infty<t<\infty\}$ среднеквадратически непрерывный и измеримый. Через $m_{a_1\ldots a_n}(t_1, \ldots, t_n)$ и $c_{a_1\ldots a_n}(t_1, \ldots, t_n)$ обозначим соответственно момент и семиинвариант n-го порядка от процесса $X(t)$, а через $f_{a_1\ldots a_n}$ – спектральную плотность (с.п.) $(n-1)$-го порядка, определяемую равенством

$$c_{a_1\ldots a_n}(t_1, \ \ldots, \ t_{n-1}, \ 0)=$$
$$=\int \ldots \int f_{a_1\ldots a_n}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{n-1}) \exp\left\{ i \sum_1^{n-1} t_j \lambda_j \right\} d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}. \tag{0.1}$$

Здесь и далее опускаются пределы интегрирования. Все интегралы с опущенными пределами берутся от $-\pi$ до π в случае дискретного времени t и от $-\infty$ до ∞ в случае непрерывного времени t. В случае дискретного времени t, с целью получить более простые записи, все рассматриваемые функции, в том числе и с.п., будем считать периодичными с периодом 2π по каждому аргументу.

В предлагаемой работе изучается асимптотическое поведение при неограниченно возрастающем объеме T выборки $\{X(t), \ 0\leqslant t<T\}$ одной оценки для a priori неизвестной величины

$$\int \varphi(\lambda) f_{ab}(\lambda)\, d\lambda \tag{0.2}$$

(где φ – некоторая ограниченная функция), характеризующей спектральную функцию

$$F_{ab}(\lambda)=\int_0^{\lambda} f_{ab}(\lambda)\, d\lambda.$$

В качестве оценки для величины (0.2) применяется интеграл

$$\int \varphi(\lambda)\, I_{ab}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda, \tag{0.3}$$

где

$$I_{ab}^{(T)}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi T}\sum\limits_{s_1=0}^{T-1}e^{-is_1\lambda}X_a(s_1)\sum\limits_{s_2=0}^{T-1}e^{is_2\lambda}X_b(s_2) & \text{в случае дискретного } t,\\ \dfrac{1}{2\pi T}\int\limits_0^T e^{-is_1\lambda}X_a(s_1)\,ds_1\int\limits_0^T e^{is_2\lambda}X_b(s_2)\,ds_2 & \text{в случае непрерывного } t,\end{cases}$$

— периодограмма второго порядка. В работе [6] изучалось асимптотическое поведение при $T\to\infty$ первых двух моментов случайных величин

$$\xi_{ab}^{(T)}(\varphi)=\sqrt{T}\left[\int\varphi(\lambda)I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda-\mathbf{E}\int\varphi(\lambda)I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda\right]\tag{0.4}$$

и

$$\zeta_{ab}^{(T)}(\varphi)=\sqrt{T}\left[\int\varphi(\lambda)I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda-\int\varphi(\lambda)f_{ab}(\lambda)\,d\lambda\right].\tag{0.5}$$

В настоящей статье при помощи изучения асимптотики старших моментов случайного вектора

$$\xi_T^{(n)}=\left(\xi_{a_1b_1}^{(T)}(\varphi_1),\ \ldots,\ \xi_{a_nb_n}^{(T)}(\varphi_n)\right)\tag{0.6}$$

устанавливаются достаточные условия, при которых случайные векторы $\xi_T^{(n)}$ и

$$\zeta_T^{(n)}=\left(\zeta_{a_1b_1}^{(T)}(\varphi_1),\ \ldots,\ \zeta_{a_nb_n}^{(T)}(\varphi_n)\right)\tag{0.7}$$

сходятся по распределению к n-мерному гауссовскому вектору

$$\zeta^{(n)}=\left(\zeta_{a_1b_1}(\varphi_1),\ \ldots,\ \zeta_{a_nb_n}(\varphi_n)\right),\tag{0.8}$$

для которого

$$\mathbf{E}\,\zeta_{a_jb_j}(\varphi_j)\equiv 0,$$

$$\mathbf{E}\,\xi_{a_jb_j}(\varphi_j)\,\zeta_{a_kb_k}(\varphi_k)=$$

$$=2\pi\int\int\varphi_j(\alpha)\varphi_k(\beta)f_{a_jb_ja_kb_k}(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)\,d\alpha\,d\beta+$$

$$+2\pi\int\varphi_j(\alpha)\varphi_k(\alpha)f_{a_jb_k}(\alpha)f_{b_ja_k}(-\alpha)\,d\alpha+$$

$$+2\pi\int\varphi_j(\alpha)\varphi_k(-\alpha)f_{a_ja_k}(\alpha)f_{b_jb_k}(-\alpha)\,d\alpha$$

и

$$\mathbf{E}\,\zeta_{a_jb_j}(\varphi_j)\,\overline{\zeta_{a_kb_k}(\varphi_k)}=\mathbf{E}\,\zeta_{a_jb_j}(\varphi_j)\,\zeta_{b_ka_k}(\bar{\varphi}_k).$$

Здесь $(a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n)$, $1\leqslant a_j,\ b_j\leqslant r$ — фиксированный набор натуральных чисел, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — некоторые ограниченные комплекснозначные функции, заданные на интервале $[-\pi,\ \pi]$ в случае дискретного времени и на $(-\infty,\infty)$ в случае непрерывного времени, а n — произвольное натуральное число.

В дальнейшем запись $z_T\xrightarrow{\mathcal{D}}z$ будет означать, что случайный элемент z_T сходится по распределению к случайному элементу z. Буквой C обозначим константу, не всегда одну и ту же, но ограниченную при изменении параметров.

1. Формулировка результатов

Теорема 1.1. *Пусть случайный процесс $X(t)$ таков, что:*

1) $\mathbf{E}\,|X_k(0)|^{2n}<\infty$ *для всех* $k\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$;

2) *для любого набора* $(k_1, \ldots, k_q)$, $k_j\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $q=3, \ldots, 2n-2$, $2n$, *и любых* t_j *и* t

$$m_{k_1\ldots k_q}(t_1+t, \ldots, t_q+t)=m_{k_1\ldots k_q}(t_1, \ldots, t_q);$$

3) *для любого набора* $(k_1, \ldots, k_q)$, $k_j\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $q=2, \ldots, 2n-2, 2n$, *с.п.* $(q-1)$*-го порядка* $f_{k_1\ldots k_q}$ *существует и ограничена*;

4) *для любого набора* (k_1, k_2, k_3, k_4), $k_j\in\{a_1 b_1, \ldots, a_n, b_n\}$,

$$\lim_{h\to 0}\int\int |f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha, h-\alpha, \beta)-f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha, -\alpha, \beta)|\,d\alpha\, d\beta=0.$$

Пусть далее $|\varphi_j(\lambda)|\leqslant C<\infty$ *и* $\int|\varphi_j(\lambda)|\,d\lambda<\infty$, $j=\overline{1, n}$. *Тогда все моменты n-го порядка от вектора* $\xi_T^{(n)}$ *(некоторые его координаты под знак математического ожидания можно брать сопряженными) при* $T\to\infty$ *сходятся к соответствующим моментам от вектора* $\zeta^{(n)}$.

Заметим, что утверждение теоремы 1.1 в случае $n=1$ очевидно, а в случае $n=2$ доказано в работе [6] при менее ограничительных условиях. Поэтому здесь мы предположим, что $n\geqslant 3$.

Теорема 1.2. *Пусть случайный процесс $X(t)$ таков, что:*

1) $\mathbf{E}\,|X_k(0)|^p<\infty$ *для всех* $k\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ *и* $p=3, 4, \ldots$;

2) *для любого набора* $(k_1, \ldots, k_q)$, $k_j\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $q=3, 4, \ldots$, *и любых* t_j *и* t

$$m_{k_1\ldots k_q}(t_1+t, \ldots, t_q+t)=m_{k_1\ldots k_q}(t_1, \ldots, t_q);$$

3) *для любого набора* $(k_1, \ldots, k_q)$, $k_j\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$, $q=2, 3, \ldots$, *с.п.* $(q-1)$*-го порядка* $f_{k_1\ldots k_q}$ *существует и ограничена*;

4) *для любого набора* (k_1, k_2, k_3, k_4), $k_j\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$,

$$\lim_{h\to 0}\int\int f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha, h-\alpha, \beta)-f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha, -\alpha, \beta)|\,d\alpha\, d\beta=0.$$

Пусть далее $|\varphi_j(\lambda)|\leqslant C<\infty$ *и* $\int|\varphi_j(\lambda)|\,d\lambda<\infty$, $j=\overline{1, n}$. *Тогда*

$$\xi_T^{(n)}\xrightarrow{\mathcal{D}}\zeta^{(n)}\quad \textit{при}\quad T\to\infty.$$

Если, кроме того, и $\operatorname{Var}\varphi_j<\infty$, $j=\overline{1, n}$, *то и*

$$\zeta_T^{(n)}\xrightarrow{\mathcal{D}}\zeta^{(n)}\quad \textit{при}\quad T\to\infty.$$

В случае, когда случайный процесс $X(t)$ гауссовский, условия 1)–4) теоремы 1.2 превращаются в требование, чтобы для каждого $a\in\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ с.п. f_{aa} существовала и была ограниченной. Однако в гауссовском случае имеет место более сильный результат.

Теорема 1.3. *Пусть гауссовский процесс $X(t)$ таков, что для каждого $a \in \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ с.п. f_{aa} существует и $\int f_{aa}^2(\lambda)\,d\lambda < \infty$. Пусть далее $|\varphi_j(\lambda)| \leqslant C < \infty$ и $\int |\varphi_j(\lambda)|\,d\lambda < \infty$, $j=\overline{1, n}$. Тогда*

$$\zeta_T^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta^{(n)} \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Если, кроме того, и $\operatorname{Var} \varphi_j < \infty$, $j=\overline{1, n}$, *то и*

$$\zeta_T^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta^{(n)} \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Введем обозначения:

$$\xi_T(\lambda) = \left\{ \xi_{ab}^{(T)}(\lambda) \right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}} =$$

$$= \left\{ \sqrt{T} \left[\int_0^\lambda I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda - \mathbf{E} \int_0^\lambda I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda \right] \right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}}, \tag{1.1}$$

$$\zeta_T(\lambda) = \left\{ \zeta_{ab}^{(T)}(\lambda) \right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}} =$$

$$= \left\{ \sqrt{T} \left[\int_0^\lambda I_{ab}^{(T)}(\lambda)\,d\lambda - F_{ab}(\lambda) \right] \right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}}, \tag{1.2}$$

а через

$$\zeta(\lambda) = \left\{ \zeta_{ab}(\lambda) \right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}} \tag{1.3}$$

обозначим $r \times r$ матричнозначный гауссовский процесс с комплексными компонентами, для которого

$$\mathbf{E}\zeta(\lambda) \equiv 0,$$

$$\mathbf{E}\zeta_{a_1 b_1}(\lambda)\zeta_{a_2 b_2}(\mu) = 2\pi \int_0^\lambda \int_0^\mu f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\alpha, \ -\alpha, \ \beta)\,d\alpha\,d\beta +$$

$$+ 2\pi \int_0^{\min(\lambda, \mu)} f_{a_1 b_2}(\alpha) f_{b_1 a_1}(-\alpha)\,d\alpha$$

и

$$\mathbf{E}\zeta_{a_1 b_1}(\lambda)\overline{\zeta_{a_2 b_2}(\mu)} = \mathbf{E}\zeta_{a_1 b_1}(\lambda)\zeta_{b_2 a_2}(\mu).$$

В (1.1), (1.2) и (1.3) $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$ в случае дискретного времени t и $0 \leqslant \lambda < \infty$ в случае непрерывного времени t.

Из теоремы 1.2 непосредственно вытекает следствие 1.1.

Следствие 1.1. *Пусть для набора $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\} = \{1, \ldots, r\}$ имеют место условия 1)–4) теоремы 1.2. Тогда конечномерные распределения случайных процессов (1.1) и (1.2) при $T \to \infty$ сходятся по распределению к конечномерным распределениям процесса (1.3).*

В свою очередь, из теоремы 1.3 вытекает следствие 1.2.

Следствие 1.2. *Пусть гауссовский процесс $X(t)$ таков, что для всех a, $a=\overline{1, r}$, с.п. f_{aa} существует и $\int f_{aa}^2(\lambda)\,d\lambda < \infty$. Тогда конечномерные распределения случайных процессов (1.1) и (1.2) при $T \to \infty$ сходятся по распределению к конечномерным распределениям процесса (1.3).*

В случае $r=1$ следствие 1.2 доказано И. А. Ибрагимовым [1] (теорема 3.1 в случае дискретного времени t и теорема 9.3 в случае непрерывного времени t). На случай многомерных гауссовских последовательностей доказательство теоремы 3.1 работы [1] перенесено в работе [5] (теорема 4.1). Для того чтобы получить доказательство теоремы 1.3 в случае дискретного времени t, достаточно в доказательстве теоремы 4.1 ([5]) сделать очевидные изменения. Доказательство теоремы 1.3 в случае непрерывного времени t получается после аналогичной переработки доказательства теоремы 9.3 ([1]).

И. А. Ибрагимовым и Т. М. Товстик [2, 3] в случае, когда $X(t)$ одномерный линейный процесс, получены менее ограничительные условия, чем в следствии 1.1, при которых конечномерные распределения случайных процессов (1.1) и (1.2) при $T\to\infty$ сходятся по распределению к конечномерным распределениям процесса (1.3).

Д. Р. Бриллинджер [7] утверждение следствия 1.1 в случае дискретного времени t доказал при условии I.

I. Последовательность $\{X(t),\ t=\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ с вещественными компонентами и средним 0 стационарна в узком смысле, $\mathbf{E}\,|X_a(0)^p|<\infty$, $p=1, 2, \ldots, a=\overline{1, r}$, и для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$, $1\leqslant a_j\leqslant r$, $n=2, 3, \ldots$,

$$\sum_{t_1, \ldots, t_{n-1}} |t_j c_{a_1\ldots a_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)|<\infty, \qquad j=\overline{1, n-1}.$$

Из условия I вытекает, что для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$, $1\leqslant a_j\leqslant r$, $n=2, 3, \ldots$, с.п. $(n-1)$-го порядка

$$f_{a_1\ldots a_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\sum_{t_1, \ldots, t_{n-1}} c_{a_1\ldots a_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)\exp\left\{-i\sum_1^{n-1} t_j\lambda_j\right\}$$

существует, ограничена и равномерно непрерывна. Д. Р. Бриллингер [7] делает замечание о возможности переноса его результата и на случай непрерывного времени.

2. Доказательства

Лемма 2.1. *Ядро*

$$\Phi_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n N}\,\frac{\sin\frac{Nx_1}{2}}{\sin\frac{x_1}{2}}\cdots\frac{\sin\frac{Nx_n}{2}}{\sin\frac{x_n}{2}}\,\frac{\sin\frac{N(x_1+\ldots+x_n)}{2}}{\sin\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}}, \tag{2.1}$$

здесь $N=1, 2, \ldots$, а n — произвольное натуральное число, обладает следующими свойствами:

$$1)\ \sup_N \int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)|\,dx_1\ldots dx_n<\infty; \tag{2.2}$$

$$2)\ \int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n=1;$$

3) *для каждого* $\varepsilon>0$ *при* $N\geqslant 2$

$$\int\limits_{\{|x|\leqslant\pi\}\backslash\{|x|\leqslant\varepsilon\}}\cdots\int|\Phi_N^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)|\,dx_1\ldots dx_n=O\left(\frac{\ln^n N}{N\cdot\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$

где

$$\{|x|\leqslant\alpha\}=\{(x_1,\ \ldots,\ x_n):|x_j|\leqslant\alpha,\quad j=\overline{1,\ n}\}.$$

Лемма 2.2. *Ядро*

$$\Psi_T^{(n)}(x_1,\ \ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n T}\,\frac{\sin\frac{Tx_1}{2}}{\frac{x_1}{2}}\cdots\frac{\sin\frac{Tx_n}{2}}{\frac{x_n}{2}}\,\frac{\sin\frac{T(x_1+\ldots+x_n)}{2}}{\frac{x_1+\ldots+x_n}{2}},$$

здесь $T\in(0,\ \infty)$, *а* n *— произвольное натуральное число, обладает следующими свойствами*:

1) $\sup\limits_T\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_T^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)|\,dx_1\ldots dx_n<\infty;$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_T^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,dx_1\ldots dx_n=1;$

3) *для каждого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{R^n/\{|x|\leqslant\varepsilon\}}\cdots\int|\Psi_T^{(n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)|\,dx_1\ldots dx_n=0,$$

где

$$\{|x|\leqslant\varepsilon\}=\{(x_1,\ \ldots,\ x_n):|x_j|\leqslant\varepsilon,\quad j=\overline{1,\ n}\}.$$

Доказательства лемм 2.1 и 2.2 вполне аналогичны доказательствам случая $n=3$, приведенным в работе [6]. Здесь покажем только, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin x_1}{x_1}\cdots\frac{\sin x_n}{x_n}\,\frac{\sin(x_1+\ldots+x_n)}{x_1+\ldots+x_n}\right|dx_1\ldots dx_n<\infty, \tag{2.3}$$

поскольку (2.3) существенно используется в доказательствах лемм 2.1 и 2.2.

Зафиксируем $0<\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Обозначив

$$H=\left|\frac{\sin x_1}{x_1}\cdots\frac{\sin x_n}{x_n}\,\frac{\sin(x_1+\ldots+x_n)}{x_1+\ldots+x_n}\right|,$$

$$Q_k=\{|x_1|\leqslant\varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_k|\leqslant\varepsilon\rho,\ |x_{k+1}|>\varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_n|>\varepsilon\rho,$$
$$|x_1+\ldots+x_n|>\varepsilon\rho,\ \rho\geqslant 1\},$$

$$V_k=\{|x_1|\leqslant\varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_k|\leqslant\varepsilon\rho,\ |x_{k+1}|>\varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_n|>\varepsilon\rho,$$
$$|x_1+\ldots+x_n|\leqslant\varepsilon\rho,\quad \rho\geqslant 1\},$$

где $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, $k=\overline{0,\ n}$, имеем

$$\int\limits_{R^n}Hdx=\int\limits_{\{\rho<1\}}Hdx+\int\limits_{Q_0}Hdx+\binom{n}{1}\int\limits_{Q_1}Hdx+\ldots+\binom{n}{n}\int\limits_{Q_n}Hdx+$$
$$+\int\limits_{V_0}Hdx+\binom{n}{1}\int\limits_{V_1}Hdx+\ldots+\binom{n}{n}\int\limits_{V_n}Hdx. \tag{2.4}$$

Покажем, что каждое слагаемое в правой части равенства (2.4) конечное.

Так как $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$, то $Q_n = \varnothing$, поскольку если $(x_1, \ldots, x_n) \in Q_n$, то $\rho^2 \leqslant n\varepsilon^2\rho^2$. По той же причине и $V_n = \varnothing$. Поэтому

$$\int\limits_{Q_n} H dx = \int\limits_{V_n} H dx = 0.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{\{\rho<1\}} H dx < \infty$$

и

$$\int\limits_{Q_0} H dx < \int \ldots \int\limits_{Q_0} \frac{1}{(\varepsilon\rho)^{n+1}}\, dx_1 \ldots dx_n < \frac{2\pi^{n-1}}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} < \infty.$$

Покажем, что и

$$\int\limits_{Q_k} H dx < \infty, \qquad k = \overline{1,\ n-1}.$$

Если $(x_1, \ldots, x_n) \in Q_k$, то $\rho_k^2 > (n-k)\varepsilon^2\rho^2 \geqslant (n-k)\ \varepsilon^2$, где $\rho_k = \sqrt{x_{k+1}^2 + \ \ldots\ + x_n^2}$. Поэтому

$$Q_k \subset \Theta_k = \{|x_1| \leqslant \varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_k| \leqslant \varepsilon\rho,\ |x_{k+1}| > \varepsilon\rho_k,\ \ldots,\ |x_n| > \varepsilon\rho_k,$$

$$|x_1 + \ldots + x_n| > \varepsilon\rho_k,\ \rho_k \geqslant \sqrt{n-k}\ \varepsilon\}.$$

Далее имеем

$$\Theta_k \subset S_k = \{|x_1| \leqslant \varepsilon\rho,\ \ldots,\ |x_k| \leqslant \varepsilon\rho,\ \rho_k \geqslant \sqrt{n-k}\ \varepsilon\} \subset$$

$$\subset \{|x_1| \leqslant \delta\rho_k,\ \ldots,\ |x_k| \leqslant \delta\rho_k,\ \rho_k \geqslant \sqrt{n-k}\ \varepsilon\},$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{k\varepsilon^2}{1-k\varepsilon^2}} > 0.$$

На самом деле, если $(x_1, \ldots, x_n) \in S_k$, то

$$x_j^2 \leqslant \varepsilon^2 (x_1^2 + \ldots + x_k^2 + \rho_k^2), \qquad j = \overline{1,\ k},$$

и

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - k\right) (x_1^2 + \ldots + x_k^2) \leqslant k\rho_k^2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q_k} H dx \leqslant \int\limits_{\Theta_k} H dx \leqslant \int\limits_{S_k} \left| \frac{\sin x_1}{x_1} \ldots \frac{\sin x_k}{x_k} \right| \frac{1}{(\varepsilon\rho_k)^{n+1-k}}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int \ldots \int\limits_{\{\rho_k \geqslant \sqrt{n-k}\ \varepsilon\}} \frac{1}{(\varepsilon\rho_k)^{n+1-k}}\, dx_{k+1} \ldots dx_n \prod_{j=1}^{k} \int\limits_{-\delta\rho_k}^{\delta\rho_k} \left| \frac{\sin x_j}{x_j} \right| dx_j.$$

Но при $\delta\rho_k > 1$

$$\int\limits_{-\delta\rho_k}^{\delta\rho_k} \left| \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right| d\alpha = 2\left(\int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha + \int\limits_1^{\delta\rho_k} \frac{|\sin\alpha|}{\alpha}\, d\alpha \right) \leqslant 2(1 + \ln \delta\rho_k),$$

поэтому

$$\int\limits_{Q_k} H dx \leqslant \int\limits_{\{\sqrt{n-k}\,\varepsilon \leqslant \rho_k \leqslant \frac{1}{\delta}\}} \cdots \int \frac{2^k}{(\varepsilon\rho_k)^{n+1-k}}\, dx_{k+1} \ldots dx_n +$$

$$+ \int\limits_{\{\rho_k > \frac{1}{\delta}\}} \cdots \int \frac{2^k (1 + \ln\delta + \ln\rho_k)^k}{(\varepsilon\rho_k)^{n+1-k}}\, dx_{k+1} \ldots dx_n =$$

$$= \frac{2^k\, 2\pi^{n-k-1}}{\varepsilon^{n+1-k}} \left(\int\limits_{\sqrt{n-k}\,\varepsilon}^{\frac{1}{\delta}} \frac{d\rho_k}{\rho_k^2} + \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{(1+\ln\delta+\ln\rho_k)^k}{\rho_k^2}\, d\rho_k \right) < \infty .$$

И, наконец, покажем, что

$$\int\limits_{V_k} H dx < \infty, \qquad k = \overline{0,\, n-1}.$$

Для этого сделаем замену переменных:

$$y_1 = x_1 + \ldots + x_n,$$
$$y_2 = -x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = -x_{n-1}.$$

Обозначив $r = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$, получим

$$\frac{r}{\sqrt{n+1}} \leqslant \rho \leqslant \sqrt{n+1}\, r$$

и

$$V_k \leftrightarrow \{ |y_1| \leqslant \varepsilon\rho, \ \ldots, \ |y_{k+1}| \leqslant \varepsilon\rho, \ |y_{k+2}| > \varepsilon\rho, \ \ldots, \ |y_n| > \varepsilon\rho,$$

$$|y_1 + \ldots + y_n| > \varepsilon\rho, \ \rho \geqslant 1 \} \subset$$

$$\subset \Big\{ |y_1| \leqslant \varepsilon\sqrt{n+1}\, r, \ \ldots, \ |y_{k+1}| \leqslant \varepsilon\sqrt{n+1}\, r, \ |y_{k+2}| >$$

$$> \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+1}}\, r, \ \ldots, \ |y_n| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+1}}\, r, \ |y_1 + \ldots + y_n| >$$

$$> \frac{\varepsilon}{\sqrt{n+1}}\, r, \ r \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big\} = \tilde{Q}_{k+1}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) видно, что поскольку $\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, то $V_{n-1}=\varnothing$. Поэтому

$$\int\limits_{V_{n-1}} H dx=0.$$

Если $0\leqslant k\leqslant n-2$, то аналогично, как и для Q_{k+1}, получаем

$$\int\limits_{V_k} H dx\leqslant \int\limits_{\tilde{Q}_{k+1}}\cdots\int \left|\frac{\sin y_1}{y_1}\cdots\frac{\sin y_n}{y_n}\,\frac{\sin(y_1+\ldots+y_n)}{y_1+\ldots+y_n}\right| dy_1\ldots dy_n<\infty.$$

Таким образом, (2.3) доказано.

Доказательство теоремы 1.1. Для определенности покажем только, что

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\xi_{k_j l_j}^{(T)}(\psi_j)=\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\zeta_{k_j l_j}(\psi_j) \tag{2.6}$$

для любых $(k_j, l_j, \psi_j)\in\{(a_1, b_1, \varphi_1), \ldots, (a_n, b_n, \varphi_n)\}$. Доказательство в общем случае, т.е. когда некоторые $\xi_{k_j l_j}^{(T)}(\psi_j)$ заменены на $\overline{\xi_{k_j l_j}^{(T)}(\psi_j)}$, аналогично. Для доказательства равенства (2.6) достаточно показать, что

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\xi_{a_j b_j}^{(T)}(\varphi_j)=\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\zeta_{a_j b_j}(\varphi_j). \tag{2.7}$$

Пусть время t дискретное. Тогда

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\xi_{a_j b_j}^{(T)}(\varphi_j)=T^{\frac{n}{2}}\,\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_j(\lambda_j)\,[I_{a_j b_j}^{(T)}(\lambda_j)-\mathbf{E}\,I_{a_j b_j}^{(T)}(\lambda_j)]\,d\lambda_j=$$

$$=\frac{1}{(2\pi\sqrt{T})^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_1(\lambda_1)\ldots\varphi_n(\lambda_n)\times$$

$$\times\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\Big[\sum(-\lambda_j, a_j)\sum(\lambda_j, b_j)-$$

$$-\mathbf{E}\sum(-\lambda_j, a_j)\sum(\lambda_j, b_j)\Big]\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n,$$

где

$$\sum(\alpha, e)=\sum_{s=0}^{T-1}e^{i\alpha s}X_e(s).$$

Имеет место формула (см., напр., [4])

$$m_{a_1\ldots a_k}(t_1, \ldots, t_k)=\sum c_{\nu_1}(t_{\nu_1})\ldots c_{\nu_q}(t_{\nu_q}), \tag{2.8}$$

где суммирование в (2.8) ведется по всем неупорядоченным разбиениям $\{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$, $q=\overline{1, k}$, множества $\{1, \ldots, k\}$, а $c_{\nu_j}(t_{\nu_j})=c_{a_{j_1}\ldots a_{j_l}}(t_{j_1}, \ldots, t_{j_l})$, если $\nu_j=\{j_1, \ldots, j_l\}\subset\{1, \ldots, k\}$. Применяя формулу (2.8) и сокращая подобные члены, получим

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\Big[\sum(-\lambda_j, a_j)\sum(\lambda_j, b_j)-\mathbf{E}\sum(-\lambda_j, a_j)\sum(\lambda_j, b_j)\Big]=$$

$$=\mathbf{E}\Big\{\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\ldots$$

$$\ldots\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)+$$

$$+(-1)^1\Big\{\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\Big]\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\ldots$$

$$\ldots\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\ldots$$

$$\ldots\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)\Big]\Big\}+$$

$$+(-1)^2\Big\{\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\Big]\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\Big]\ldots$$

$$\ldots\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\ldots$$

$$\ldots\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)\Big]\Big\}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^n\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_1, a_1)\sum(\lambda_1, b_1)\Big]\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_2, a_2)\sum(\lambda_2, b_2)\Big]\ldots$$

$$\ldots\mathbf{E}\Big[\sum(-\lambda_n, a_n)\sum(\lambda_n, b_n)\Big]\Big\}=\sum\operatorname{cum}\{\nu_1\}\ldots\operatorname{cum}\{\nu_q\},\quad(2.9)$$

где суммирование в (2.9) ведется по всем неупорядоченным разбиениям $\{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$ множества

$$\{(-\lambda_1, a_1), (\lambda_1, b_1), (-\lambda_2, a_2), (\lambda_2, b_2), \ldots, (-\lambda_n, a_n), (\lambda_n, b_n)\},\quad(2.10)$$

но только по таким, в которых нет элементов типа $\nu_j=\{(-\lambda_k, a_k), (\lambda_k, b_k)\}$ и $\nu_j=\{(\alpha, l)\}$, где (α, l) элемент множества (2.10). В сумме (2.9)

$$\operatorname{cum}\{\nu_j\}=$$

$$=\sum_{s_1=0}^{T-1}\ldots\sum_{s_{k_j}=0}^{T-1}\exp\{i(\alpha_1^{(j)}s_1+\ldots+\alpha_{k_j}^{(j)}s_{k_j}\}\,c_{l_1^{(j)}\ldots l_{k_j}^{(j)}}(s_1, \ldots, s_{k_j}),\quad(2.11)$$

если $\nu_j=\{(\alpha_1^{(j)}, l_1^{(j)}), \ldots, (\alpha_{k_j}^{(j)}, l_{k_j}^{(j)})\}$. Действительно, зафиксируем одно разбиение $\{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$, в котором m элементов типа $\nu_j=\{(-\lambda_k, a_k), (\lambda_k, b_k)\}$. Тогда в сумме (2.9) всего будет

$$1+(-1)^1\binom{m}{1}+(-1)^2\binom{m}{2}+\ldots+(-1)^m\binom{m}{m}=(1-1)^m=0$$

фиксированных нами разбиений $\{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$.

Теперь разобьем сумму (2.9) на две следующим образом:

$$\sum \operatorname{cum}\{\nu_1\}\ldots\operatorname{cum}\{\nu_q\}=$$

$$=\sum{}' \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} [\operatorname{cum}\{(-\lambda_1^{(j)}, a_1^{(j)}), (\lambda_1^{(j)}, b_1^{(j)}), (-\lambda_2^{(j)}, a_2^{(j)}), (\lambda_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}+$$

$$+\operatorname{cum}\{(-\lambda_1^{(j)}, a_1^{(j)}), (-\lambda_2^{(j)}, a_2^{(j)})\}\operatorname{cum}\{(\lambda_1^{(j)}, b_1^{(j)}), (\lambda_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}+$$

$$+\operatorname{cum}\{(-\lambda_1^{(j)}, a_1^{(j)}), (\lambda_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}\operatorname{cum}\{(\lambda_1^{(j)}, b_1^{(j)}), (-\lambda_2^{(j)}, a_2^{(j)})\}]+$$

$$+\sum{}'' \operatorname{cum}\{\nu_1\}\ldots\operatorname{cum}\{\nu_q\}=$$

$$=\sum{}' \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \mathbf{E} \prod_{k=1}^{2} \Big[\sum (-\lambda_k^{(j)}, a_k^{(j)}) \sum (\lambda_k^{(j)}, b_k^{(j)})-$$

$$-\mathbf{E}\sum (-\lambda_k^{(j)}, a_k^{(j)}) \sum (\lambda_k^{(j)}, b_k^{(j)})\Big]+\sum{}'' \operatorname{cum}\{\nu_1\}\ldots\operatorname{cum}\{\nu_q\},$$

где сумма Σ' берется по всем неупорядоченным разбиениям множества

$$\{(-\lambda_1, a_1, \lambda_1, b_1), (-\lambda_2, a_2, \lambda_2, b_2), \ldots, (-\lambda_n, a_n, \lambda_n, b_n)\}$$

по два элемента, а сумма Σ'' – по всем остальным разбиениям суммы Σ. Конечно, сумма Σ' не пуста только, если n – четное число. Далее, учитывая (0.4), имеем

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n} \xi_{a_j b_j}^{(T)}(\varphi_j)=\sum{}' \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}\, \xi_{a_1^{(j)} b_1^{(j)}}^{(T)}(\varphi_1^{(j)})\, \xi_{a_2^{(j)} b_2^{(j)}}^{(T)}(\varphi_2^{(j)})+$$

$$+\sum{}'' \frac{1}{(2\pi\sqrt{T})^n} \int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\lambda_1)\ldots\varphi_n(\lambda_n)\operatorname{cum}\{\nu_1\}\ldots$$

$$\ldots\operatorname{cum}\{\nu_q\}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n=A'+A''.$$

С другой стороны, поскольку вектор $\zeta^{(n)}$ гауссовский и $\mathbf{E}\zeta^{(n)}=0$, то

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n} \zeta_{a_j b_j}(\varphi_j)=0, \qquad \text{если } n \text{ – нечетное число,}$$

и

$$\mathbf{E}\prod_{j=1}^{n} \zeta_{a_j b_j}(\varphi_j)=\sum{}' \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}\,\zeta_{a_1^{(j)} b_1^{(j)}}(\varphi_1^{(j)})\,\zeta_{a_2^{(j)} b_2^{(j)}}(\varphi_2^{(j)}),$$

если n – четное число. Поэтому, учитывая теорему 2.3 в работе [6], имеем

$$\lim_{T\to\infty} A' = \mathbf{E} \prod_{j=1}^{n} \zeta_{a_j b_j}(\varphi_j)$$

для любого $n \geqslant 3$. Для завершения доказательства равенства (2.7) в случае дискретного времени осталось показать, что $\lim\limits_{T\to\infty} A''=0$. Действительно, учитывая (2.11), условие 3) теоремы 1.1, (2.1) и применяя (0.1), формулу

$$\sum_{s=0}^{T-1} e^{is\lambda} = \frac{e^{iT\lambda}-1}{e^{i\lambda}-1} = \frac{\sin\frac{T\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{T-1}{2}\lambda} \tag{2.12}$$

и (2.2), имеем

$$|A''| = \Big| \sum{}'' \frac{1}{(2\pi\sqrt{T})^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\lambda_1)\dots\varphi_n(\lambda_n)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{q} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f_{l_1^{(j)}\dots l_{k_j}^{(j)}}(x_1^{(j)}, \dots, x_{k_j-1}^{(j)}) \times$$

$$\times \sum_{s_1^{(j)}=0}^{T-1} \dots \sum_{s_{k_j}^{(j)}=0}^{T-1} \exp\{ i(s_1^{(j)} - s_{k_j}^{(j)}) x_1^{(j)} + \dots + i(s_{k_j-1}^{(j)} - s_{k_j}^{(j)}) x_{k_j-1}^{(j)} \} \times$$

$$\times \exp\{ i(\lambda_1^{(j)} s_1^{(j)} + \dots + \lambda_{k_j}^{(j)} s_{k_j}^{(j)}) \}\, dx_1^{(j)} \dots dx_{k_j-1}^{(j)} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum{}'' \frac{C}{T^{\mu/2}} \prod_{j=1}^{\tilde q} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_T^{(n_j)}(z_1^{(j)}, \dots, z_{n_j}^{(j)})|\, dz_1^{(j)} \dots dz_{n_j}^{(j)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{T}},$$

где μ и $\tilde q$ – натуральные числа, зависящие от слагаемого суммы Σ'', но такие, что $\mu \geqslant 1$ и $1 \leqslant \tilde q \leqslant q$.

В случае непрерывного времени t доказательство равенства (2.7) аналогично. Вместо леммы 2.1 и формулы (2.12) пользуемся леммой 2.2 и формулой

$$\int_0^T e^{is\lambda} ds = \frac{e^{iT\lambda}-1}{i\lambda} = \frac{\sin\frac{T\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} e^{i\frac{T}{2}\lambda}.$$

Теорема доказана.

Лемма 2.3. *Пусть случайный процесс $X(t)$ таков, что с.п. $f_{a_j b_j}$, $j=\overline{1, n}$, существуют, их модули интегрируемы с квадратом, а функции φ_j, $j=\overline{1, n}$, такие, что* $\mathrm{Var}\,\varphi_j < \infty$ *и* $\int |\varphi_j(\lambda)|\, d\lambda < \infty$. *Тогда случайный вектор $\zeta_T^{(n)}$ при $T \to \infty$ сходится по распределению к некоторому случайному вектору η тогда и только тогда, когда случайный вектор $\xi_T^{(n)}$ сходится к тому же самому вектору η.*

Доказательство. В силу следствия 2.1 из работы [6] разность

$$\zeta_T^{(n)} - \xi_T^{(n)} = \left\{ \sqrt{T} \left[\mathbf{E} \int \varphi_j(\lambda) I_{a_j b_j}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi_j(\lambda) f_{a_j b_j}(\lambda)\, d\lambda \right] \right\}^{j=\overline{1,n}}$$

является n-мерным неслучайным вектором при $T \to \infty$, сходящемся к нулю. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Из теоремы 1.1 вытекает, что все моменты случайного вектора $\xi_T^{(n)}$ сходятся к соответствующим моментам вектора $\zeta^{(n)}$. Поэтому из каждой подпоследовательности последовательности $\{\xi_T^{(n)},\ T>0\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по распределению к некоторому случайному вектору с моментами вектора $\zeta^{(n)}$. Поскольку случайный вектор $\zeta^{(n)}$ определяется своими моментами однозначно, то отсюда следует, что $\xi_T^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \zeta^{(n)}$. Второе утверждение теоремы вытекает из леммы 2.3. Теорема доказана.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. А. Статулявичюсу за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
22.XI.1971

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероят. и ее примен., **VIII**, 4 (1963), 391–430.
2. И. А. Ибрагимов, Т. М. Товстик, Об оценке спектральных функций одного класса стационарных случайных последовательностей, Вестник ЛГУ, № 1 (1964), 42–57.
3. Т. М. Товстик, Об оценке спектральных функций одного класса стационарных случайных процессов, Вестник ЛГУ, № 13 (1966), 47–54.
4. В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, К технике вычисления семиинвариантов. Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 342–355.
5. Р. Бенткус, Об асимптотическом поведении оценки спектральной функции многомерной стационарной гауссовской последовательности, Liet. matem. rink., **XI**, 4 (1971), 475.
6. Р. Бенткус, Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса, Liet. matem. rink., **XII**, 1 (1972).
7. D. R. Brillinger, Asymptotic properties of spectral estimates of second order. Biometrika, **56**, 2 (1969), 375–390.

APIE SPEKTRINĖS FUNKCIJOS ĮVERTINIMO ASIMPTOTINĮ NORMALUMĄ

R. Bentkus

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama daugiamačio stacionaraus proceso spektrinę funkciją nusakančio parametro įvertinimo asimptotika, kai prabos tūris neaprėžtai didėja. Randamos sąlygos, kada šis vertinimas yra asimptotiškai normalinis.

ON THE ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE ESTIMATE OF THE SPECTRAL FUNCTION

R. Bentkus

(*Summary*)

Let $X(t)=\{X_a(t)\}_{a=\overline{1,r}}$, where time t may be discrete, $t=\ldots,-1, 0, 1, \ldots$, or continuous, $-\infty<t<\infty$, be a zero mean stationary random process with real-valued components. Given the sample $\{X(t), 0\leqslant t<T\}$, the integral $\int \varphi(\lambda) I_{ab}^{(T)} d\lambda$ is used as an estimate for $\int \varphi(\lambda) f_{ab}(\lambda)\, d\lambda$. There φ is some bounded function, f_{ab} – the cross-spectral density of the components $X_a(t)$ and $X_b(t)$, $I_{ab}^{(T)}$ – the second-order periodogram and the range of integration is $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ in the discrete time case and $-\infty<\lambda<\infty$ in the continuous case. The paper estimates the conditions under which the random vectors (0.6) and (0.7) (see also (0.4) and (0.5)) are asymptotic normal when $T\to\infty$.