1972

УДК 511.3

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ В ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. II

Й. Кубилюс

Во II части работы рассмотрим вещественные аддитивные арифметические функции, значения которых принадлежат арифметической прогрессии. Легко показать, что каждая такая функция имеет вид $\lambda f(m)$, где λ – некоторое постоянное число, а $f(m)$ – целозначная аддитивная функция. Следовательно, при изучении распределения значений функций этого класса можно ограничиться рассмотрением целозначных функций.

Через n обозначим большое натуральное число. Пусть $N(m\leqslant n,\ f(m)<x)$ означает число натуральных $m\leqslant n$, для которых $f(m)<x$. Цель данной работы – получить асимптотическое разложение функции распределения $\frac{1}{n}N(m\leqslant n,$ $f(m)<x)$ для некоторого класса целозначных аддитивных функций. Некоторые частные результаты такого типа были получены автором [1, 2], Г. Делянжем [3], Б. В. Левиным и А. С. Файнлейбом [4].

Пусть $f(m)$ – целозначная аддитивная функция. Предположим существование таких констант c, c_1, c_2, c_3 и целого числа $s\geqslant 2$, что ряды по простым числам

$$\sum_{a_p<c}\frac{a_p\ln p}{p}\leqslant c_1,\quad \sum_{a_p\geqslant c}\frac{\max(a_p^s,\ \ln p)}{p}\leqslant c_2,$$

$$\sum_{p}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f^s(p^\alpha)|}{p^\alpha}\leqslant c_3, \tag{B}$$

где $a_p=|f(p)-1|$.

Для формулировки результатов нам понадобятся некоторые обозначения. Определим периодические функции $E_k(u)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ с периодом 1 с помощью тригонометрических рядов

$$E_k(u)=(-1)^{k(k-1)/2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi iru}}{(2\pi ir)^k}, \tag{1}$$

где $'$ означает, что при суммировании значение $r=0$ исключается. При $k>1$ ряд сходится абсолютно и равномерно для всех u. Следовательно, $E_k(u)$ является непрерывной и ограниченной функцией. В случае $k=1$ ряд для $E_1(u)$ сходится в смысле

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=-n}^{n}{}'\frac{e^{2\pi iru}}{2\pi ir}$$

для всех u. При $u=0$ этот предел равен 0, однако мы будем считать, что $E_1(0)=E_1(-0)=-1/2$. При $k>1$

$$E_k'(u)=(-1)^{k-1}E_{k-1}(u).$$

Если $k>2$, это равенство имеет место для всех u, а при $k=2$ лишь для нецелых u. Положим еще

$$E_0(u)=-1.$$

Обозначим через $P_k(it)$ $(k=0, 1, \ldots)$ полином при x^k в разложении

$$\exp\left\{\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}+\frac{t^2}{2}\right\}\frac{h(itx)}{\Gamma(e^{itx})}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(it)x^k,$$

где

$$h(z)=\prod_p \psi_p(z),$$

$$\psi_p(z)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{e^z}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{zf(p^\alpha)}}{p^\alpha},$$

а Γ — гамма-функция Эйлера. В дальнейшем докажем, что такое разложение имеет место, причем

$$P_0(it)=1,$$

степень полинома $P_k(it)$ равна $3k$, а коэффициенты свободных членов полиномов $P_k(it)$ при $k\geqslant 1$ равны 0.

Положим еще

$$V_k(x)=\sum_{j=0}^{k}P_j(-\Phi)\nu^{-j}, \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

где $P_j(-\Phi)$ получается из $P_j(-z)$ путем замены всех степеней z^l $(l=0, 1, \ldots)$ на $\Phi^{(l)}(x)$. Здесь

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,$$

$$\nu=\sqrt{\ln\ln n}.$$

В дальнейшем c_4, c_5, ... означают константы, зависящие лишь от c, c_1, c_2, c_3, s; B — множитель, ограниченный по модулю константой такого же рода.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если вещественная аддитивная арифметическая функция $f(m)$ принимает лишь целочисленные значения и удовлетворяет условиям (B), то*

$$\frac{1}{n}N\left(m\leqslant n,\ f(m)<\nu^2+\nu x\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{(k-1)(k-2)/2}\nu^{-k}E_k(\nu^2+\nu x)\frac{d^k}{dx^k}V_{s-1-k}(x)+B\nu^{-s}\ln\nu.$$

Доказательство. 1. Нам будут нужны равенства

$$e^{iu}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(iu)^k}{k!}+\frac{\Theta|u|^r}{r!},\tag{2}$$

$$e^{z}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{z^k}{k!}+\frac{\Theta|z|^k}{k!}e^{|z|},\tag{3}$$

справедливые для всех целых $r\geqslant 1$, вещественных u и комплексных z. Здесь и в дальнейшем Θ означает комплексное число, не всегда одно и то же, ограниченное по модулю 1.

Характеристическая функция закона

$$\frac{1}{n}N\left(m\leqslant n,\ f(m)<\nu^2+\nu x\right)$$

равна

$$\varphi_n(t)=e^{-it\nu}S_n(t/\nu),$$

где

$$S_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf(m)}.$$

Так как $f(m)$ приобретает лишь целочисленные значения, то при целом j

$$\varphi_n(2\pi j\nu+t)=e^{-i(2\pi j\nu+t)\nu}S_n(t/\nu)=e^{-2\pi ij\nu^2}\varphi_n(t).\tag{4}$$

Согласно (2)

$$\varphi_n(t)=(1+B|t|\nu)\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left(1+B|t|\nu^{-1}|f(m)|\right)=$$

$$=(1+B|t|\nu)\left(1+\frac{B|t|}{n\nu}\sum_{m=1}^{n}|f(m)|\right).$$

Оценим последнюю сумму. Из условий (B) следует:

$$\sum_{m=1}^{n}|f(m)|=\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{p^\alpha\|m}f(p^\alpha)\right|\leqslant\sum_{p^\alpha\leqslant n}|f(p^\alpha)|\frac{n}{p^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{p}\frac{|f(p)-1|}{p}+n\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}+n\sum_{p}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}=Bn\nu^2.$$

Поэтому

$$\varphi_n(t)=(1+B|t|\nu)^2.\tag{5}$$

Подсчитаем сумму $S_n(t)$ с помощью леммы 1 первой части работы [6], полагая $g(m)=e^{itf(m)}$, $\varkappa=e^{it}$. Замечая, что в силу (2) и условий (B)

$$\sum_{p}|e^{itf(p)}-e^{it}|\frac{\ln p}{p}\leqslant|t|\sum_{a_p<c}\frac{a_p\ln p}{p}+2\sum_{a_p\geqslant c}\frac{\ln p}{p}\leqslant c_1|t|+2c_2,$$

из указанной леммы получаем, что при $|t| \leqslant \pi$

$$S_n(t) = \frac{(\ln n)^{e^{it}-1}}{\Gamma(e^{it})} h(it) + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}},$$

причем произведение для $h(it)$ сходится абсолютно и $h(it) = B$. Отсюда для характеристической функции $\varphi_n(t)$ при $|t| \leqslant \pi\nu$ получаем

$$\varphi_n(t) = \exp\{(e^{it/\nu} - 1)\nu^2 - it\nu\} \frac{h(it/\nu)}{\Gamma(e^{it/\nu})} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}. \tag{6}$$

С помощью неравенств (2), (3) отсюда заключаем, что для тех же t

$$\varphi_n(t) = B\exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6\nu} + \frac{\Theta t^4}{24\nu^2}\right) + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}} =$$

$$= B\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{\Theta t^2}{12\nu^2}\right)\right\} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}} =$$

$$= B\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)\right\} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}} = Be^{-t^2/12} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}. \tag{7}$$

2. Введем обозначения

$$A_p = \max(a_p, a_p^s), \quad C_p = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1 + |f^s(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

Очевидно, в силу (B)

$$\sum_p \frac{A_p}{p} \leqslant c_4, \quad \sum_p C_p \leqslant c_5.$$

Заметим, что при достаточно малом c_6 и $|t| \leqslant c_6$ функция $\psi_p(it) \neq 0$. Положим

$$\eta = \max(10, 10c_4, 10c_5, c_6^{-1}).$$

Имеем, что при $|t| \leqslant c_6$

$$\ln\psi_p(it) = (e^{it} - 1)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right] + \left[\ln\left(1 + \frac{e^{it}-1}{p}\right) - \frac{e^{it}-1}{p}\right] +$$

$$+ \ln\left\{1 + \left(1 + \frac{e^{it}-1}{p}\right)^{-1}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)e^{it}\left(e^{it(f(p)-1)} - 1\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{p^2}(e^{it} - 1) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)-1}}{p^\alpha}\right]\right\}.$$

Согласно (2)

$$\ln\psi_p(it) = (e^{it} - 1)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right] + \left[\ln\left(1 + \frac{e^{it}-1}{p}\right) - \frac{e^{it}-1}{p}\right] +$$

$$+ \ln\left\{1 + \left(1 + \frac{e^{it}-1}{p}\right)^{-1}\left[\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)e^{it}\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(it)^k}{k!}\left(f(p) - 1\right)^k +\right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{\Theta|t|^s}{s!}|f(p) - 1|^s\right) + \frac{1}{p^2}(e^{it} - 1) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\sum_{k=1}^{s-1}\frac{(it)^k}{k!}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{f^k(p^\alpha)}{p^\alpha} +\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\Theta|t|^s}{s!}\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|^s}{p^\alpha}\right)\right]\right\}.$$

Заметим, что для всех $k=1, 2, \ldots, s$

$$a_p^k \leqslant \max(a_p, a_p^s) = A_p.$$

Введем функцию

$$\tilde{h}(z) = \prod_p \tilde{\psi}_p(z),$$

где

$$\ln \tilde{\psi}_p(z) = -(e^z-1)\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]-\left[\ln\left(1-\frac{e^z-1}{p}\right)+\frac{e^z-1}{p}\right]-$$
$$-\ln\left\{1-\left(1-\frac{e^z-1}{p}\right)^{-1}\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)e^z A_p(e^z-1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{p^2}(e^z-1)+\left(1-\frac{1}{p}\right)C_p(e^z-1)\right]\right\}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$0\leqslant -\ln(1-x)\leqslant 2x, \quad 0\leqslant -x-\ln(1-x)\leqslant 2x^2,$$

справедливыми при $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$, и неравенством

$$|e^z-1|\leqslant 2|z|,$$

справедливым при $|z|\leqslant \frac{1}{2}$, получаем, что при $|z|\leqslant \eta^{-1}$

$$|\ln\tilde{\psi}_p(z)|\leqslant \frac{4|z|}{p^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2|z|)^k}{kp^k}-\ln\left[1-\left(1-\frac{2|z|}{p}\right)^{-1}\left(\frac{4A_p|z|}{p}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2|z|}{p^2}+2C_p|z|\right)\right]\leqslant\frac{28}{45p^2}-\ln\left(1-\frac{40A_p}{9p\eta}-\frac{2}{9p^2}-\frac{20C_p}{9\eta}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{16}{15p^2}+\frac{80A_p}{9p\eta}+\frac{40C_p}{9\eta}.$$

Поэтому при $|z|\leqslant\eta^{-1}$

$$|\ln\tilde{h}(z)|\leqslant c_7.$$

Представим функцию $\ln\tilde{h}(z)$ в виде

$$\ln\tilde{h}(z)=\sum_{k=1}^{s-1}\tilde{\beta}_k z^k+\tilde{R}z^s.$$

Оценим коэффициенты $\tilde{\beta}_k$ и $\tilde{R}$. По теореме Коши

$$\tilde{\beta}_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\eta^{-1}}\frac{\ln\tilde{h}(w)}{w^{k+1}}\,dw,$$

откуда, так как коэффициенты $\tilde{\beta}_k>0$,

$$\tilde{\beta}_k\leqslant c_7\eta^k \qquad (k=1, \ldots, s-1).$$

Из соотношения

$$\tilde{R}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\eta^{-1}}\frac{\ln\tilde{h}(w)}{w^s(w-z)}\,dw$$

получаем

$$|\tilde{R}| \leqslant 2c_7\eta^s$$

при $|z| \leqslant (2\eta)^{-1}$.

Из сказанного заключаем, что

$$\ln h(it) = \sum_{k=1}^{s-1} \beta_k (it)^k + Rt^s,$$

где

$$|\beta_k| \leqslant \tilde{\beta}_k \leqslant c_7\eta^k \qquad (k=1, \ldots, s-1),$$

$$|R| \leqslant |\tilde{R}| \leqslant 2c_7\eta^s$$

при $|t| \leqslant (2\eta)^{-1}$.

Из теоремы Коши и хорошо известных свойств гамма-функции выводим, что

$$\ln \Gamma(e^{it}) = \sum_{k=1}^{s-1} \gamma_k (it)^k + R_1 t^s,$$

где

$$|\gamma_k| \leqslant c_8\eta^k \qquad (k=1, \ldots, s-1),$$

$$|R_1| \leqslant 2c_8\eta^s$$

при $|t| \leqslant (2\eta)^{-1}$. Следовательно,

$$\ln \frac{h(it)}{\Gamma(e^{it})} \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k (it)^k + R_2 t^s, \tag{8}$$

где

$$|\delta_k| \leqslant c_9\eta^k \qquad (k=1, \ldots, s-1),$$

$$|R_2| \leqslant 2c_9\eta^s \tag{9}$$

при $|t| \leqslant (2\eta)^{-1}$.

При $|t| \leqslant (2\eta)^{-1}$ рассмотрим функцию

$$\Phi_n(it) = \left(e^{it/\nu} - 1 - \frac{it}{\nu}\right)\nu^2 + \frac{t^2}{2} + \ln \frac{h(it/\nu)}{\Gamma(e^{it/\nu})}.$$

Согласно (8)

$$\Phi_n(it) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^{k+2}}{(k+2)!\,\nu^k} + \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \left(\frac{it}{\nu}\right)^k + R_2 \left(\frac{t}{\nu}\right)^s.$$

Пусть y — вещественное переменное, $|y| \leqslant 1$,

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^{k+2}}{(k+2)!} \left(\frac{y}{\nu}\right)^k + \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \left(\frac{ity}{\nu}\right)^k + R_2 \left(\frac{ty}{\nu}\right)^s.$$

Согласно оценкам (9), ряд для $U(y)$ мажорируется рядом

$$(1+t^2) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_{10}|ty|}{\nu}\right)^k, \tag{10}$$

где c_{10} — достаточно большая константа. Отсюда, в частности, при $|t| \leqslant (2c_{10})^{-1}\nu$

$$|U(y)| \leqslant 2c_{10}\nu^{-1}|t|(1+t^2).$$

Возведем ряд для $U(y)$ и мажорирующий ряд (10) в целую положительную степень r. Степень мажорирующего ряда равна

$$\left(\frac{c_{10}|ty|}{\nu}\right)^r (1+t^2)^r \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_r=0}^{\infty} \left(\frac{c_{10}|ty|}{\nu}\right)^{k_1+\ldots+k_r}.$$

Так как число решений уравнения $k_1+\ldots+k_r=k$ не превосходит r^k, то ряд для $U^r(y)$ мажорируется рядом

$$\left(\frac{c_{10}|ty|}{\nu}\right)^r (1+t^2)^r \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_{10}r|ty|}{\nu}\right)^k. \tag{11}$$

Разложим $e^{U(y)}$ по степеням y

$$e^{U(y)} = \sum_{k=0}^{s-1} P_k(it)\left(\frac{y}{\nu}\right)^k + V(y),$$

где $V(y)=O(|y|^s)$ при $x \to 0$. С другой стороны, согласно (3)

$$e^{U(y)} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{U^k(y)}{k!} + B|U^s(y)|e^{|U(y)|}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{U^k(y)}{k!} = \sum_{k=0}^{s-1} P_k(it)\left(\frac{y}{\nu}\right)^k + V_1(y),$$

где в $V_1(y)$ входят степени y, начиная с y^s. Согласно (11) при $|t| \leqslant (2c_{10}s)^{-1}\nu$

$$|V_1(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{c_{10}|ty|}{\nu}\right)^k (1+t^2)^k \sum_{r=s-k}^{\infty} \left(\frac{c_{10}k|ty|}{\nu}\right)^r = B(|t|/\nu)^s(1+t^2)^{s-1}.$$

Таким образом, при $|t| \leqslant (2c_{10}s)^{-1}\nu$

$$e^{\Phi_n(it)} = Q_{s-1}(it) + B\nu^{-s}|t|^s(1+t^2)^{s-1}\exp\{c_{10}\nu^{-1}|t|(1+t^2)\},$$

где

$$Q_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \nu^{-j}P_j(z).$$

Значит, при $|t| \leqslant c_{11}\nu$, где c_{11} — достаточно мало,

$$\varphi_n(t) = e^{-t^2/2}Q_{s-1}(it) + B\nu^{-s}|t|^s(1+t^2)^{s-1}e^{-t^2/4} + \frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}. \tag{12}$$

3. Положим для сокращения

$$W_k(x)=(-1)^{(k-1)(k-2)/2}E_k(\nu^2+\nu x)V_{s-1-k}^{(k)}(x) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ s-1),$$

$$\Psi(x)=\sum_{k=0}^{s-1} W_k(x)\nu^{-k},$$

$$\mu_k(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dW_k(x),$$

$$\chi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\Psi(x).$$

Подсчитаем преобразование Фурье $\chi(t)$. Ввиду очевидного равенства

$$\chi(t)=\sum_{k=0}^{s-1}\mu_k(t)\nu^{-k} \tag{13}$$

достаточно подсчитать $\mu_k(t)$. Из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\Phi^{(k)}(x)=(-it)^k e^{-t^2/2} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots)$$

следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(2\pi r\nu+t)}\,dV_k^{(j)}(x)=(-2\pi ir\nu-it)^j e^{-(2\pi r\nu+t)^2/2}Q_k(2\pi ir\nu+it)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots;\ j=0,\ 1,\ \ldots). \tag{14}$$

Отсюда

$$\mu_0(t)=e^{-t^2/2}Q_{s-1}(it). \tag{15}$$

Интегрированием по частям получаем

$$\mu_k(t)=(-1)^{k(k+1)/2}it\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}E_k(\nu^2+\nu x)V_{s-1-k}^{(k)}(x)\,dx$$

$$(k=1,\ \ldots,\ s-1).$$

Заменим $E_k(\nu^2+\nu x)$ рядом (1). В силу известных свойств рядов Фурье можно интегрировать почленно. Согласно (14)

$$\mu_k(t)=(-1)^k it\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2\pi ir\nu^2}}{(2\pi ir)^k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(2\pi r\nu+t)}V_{s-1-k}^{(k)}(x)\,dx=$$

$$=-t\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(2\pi r\nu+t)^{k-1}}{(2\pi r)^k}e^{2\pi ir\nu^2-(2\pi r\nu+t)^2/2}Q_{s-1-k}(2\pi ir\nu+it) \tag{16}$$

$$(k=1,\ \ldots,\ s-1).$$

Так как коэффициент свободного члена полинома $P_k(it)$ $(k=1,\ \ldots)$ равен 0, а степень такого полинома равна $3k$, то

$$P_k(it)=B(|t|+|t|^{3k}) \quad (k=1,\ \ldots,\ s-1);$$

в частности, при $r\neq 0$, $|t|\leqslant\pi\nu$

$$P_k(2\pi ir\nu+it)=B\,|\,2\pi r\nu+t\,|^{3k} \qquad (k=0,\ \ldots,\ s-1).$$

Отсюда при $|t|\leqslant 1$

$$Q_k(it)=1+B\,|\,t\,| \qquad (k=0,\ \ldots,\ s-1) \tag{17}$$

и при $r\neq 0$, $|t|\leqslant\pi\nu$

$$Q_k(2\pi ir\nu+it)=B\nu^{-k}\,|\,2\pi r\nu+t\,|^{3k} \qquad (k=0,\ \ldots,\ s-1). \tag{18}$$

Далее из (15) и (17) при $|t|\leqslant\pi\nu$

$$\mu_k(t)=B\,|\,t\,|\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|\,2\pi r\nu+t\,|^{3s-k-4}}{|\,2\pi r\,|^k}\,\nu^{-s+1+k}\,e^{-(2\pi r\nu+t)^2/2}=$$

$$=B\,|\,t\,|\,\nu^{2s-k-3}\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\,|\,r\,|^{3s-3k-4}\,e^{(2\pi\,|\,r\,|-1)^2\,\nu^2/2}=\frac{B\,|\,t\,|}{\ln n} \tag{19}$$

$(k=1,\ \ldots,\ s-1)$

и при $j\neq 0$, $|t|\leqslant\pi\nu$

$$\mu_k(2\pi j\nu+t)+\frac{(2\pi j\nu+t)\,t^{k-1}}{(-2\pi j)^k}\,e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\,Q_{s-1-k}(it)=$$

$$=B\,|\,2\pi j\nu+t\,|\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq -j}}^{\infty}{}'\frac{|\,r+j\,|^{k-1}\,\nu^{k-1}}{|\,r\,|^k}\,e^{-\left(2\pi\,(r+j)\,\nu+t\right)^2/2}\,\nu^{-(s-1-k)}\times$$

$$\times|\,r+j\,|^{3\,(s-1-k)}=B\,|\,2\pi j\nu+t\,|\,\nu^{-s+2k}\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq j}}^{\infty}{}'\frac{|\,r+j\,|^{3s-2k-4}}{|\,r\,|^k}\,e^{-(2\pi\,|\,r+j\,|-1)^2\,\nu^2/2}=$$

$$=\frac{B\,|\,2\pi j\nu+t\,|}{\ln n} \qquad (k=1,\ \ldots,\ s-1). \tag{20}$$

Из (13), (15), (17), (19) имеем, что при $|t|\leqslant\pi\nu$

$$\chi(t)=e^{-t^2/2}\,Q_{s-1}(it)+\frac{B\,|\,t\,|}{\ln n}\,, \tag{21}$$

в частности, при $|t|\leqslant 1$

$$\chi(t)=1+B\,|\,t\,|. \tag{22}$$

Наконец, из (13), (15), (20) при $j\neq 0$, $|t|\leqslant\pi\nu$ выводим

$$\chi(2\pi j\nu+t)=e^{-(2\pi j\nu+t)^2/2}\,Q_{s-1}(2\pi j\nu+t)-$$

$$-(2\pi j\nu+t)\,e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{t^{k-1}\,Q_{s-1-k}(it)}{(-2\pi j\nu)^k}+\frac{B\,|\,2\pi j\nu+t\,|}{\ln n}=$$

$$=-(2\pi j\nu+t)\,e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\sum_{k=1}^{s-1}\frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\nu)^k}\sum_{l=0}^{s-1-k}\frac{P_l(it)}{\nu^l}+$$

$$+B\,\frac{|\,2\pi j\nu+t\,|^{3\,(s-1)}}{\nu^{s-1}}\,e^{-(2\pi j\nu+t)^2/2}+\frac{B\,|\,2\pi j\nu+t\,|}{\ln n}=$$

$$= -(2\pi j\nu+t)\,e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{P_l(it)}{\nu^l}\sum_{k=1}^{s-1-l}\frac{t^{k-1}}{(-2\pi j\nu)^k}+\frac{B\,|2\pi j\nu+t|}{\ln n}=$$

$$=e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\sum_{l=0}^{s-2}\frac{P_l(it)}{\nu^l}\left(1-\left(\frac{t}{-2\pi j\nu}\right)^{s-1-l}\right)+\frac{B\,|2\pi j\nu+t|}{\ln n}=$$

$$=e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\,Q_{s-2}(it)+\frac{Be^{-t^2/2}}{\nu^{s-1}|j|}\left(t^2+|t|^{s-1}+|t|^{3s-5}\right)+\frac{B\,|2\pi j\nu+t|}{\ln n}. \qquad (23)$$

4. Положим теперь $L=[\nu^{s-1}/2]$ и оценим интеграл

$$I=\int_{-(2L+1)\pi\nu}^{(2L+1)\pi\nu}|\varphi_n(t)-\chi(t)|\,\frac{dt}{|t|}.$$

Разобьем его на части

$$I=\sum_{j=-L}^{L}I_j,$$

где

$$I_j=\int_{(2j-1)\pi\nu}^{(2j+1)\pi\nu}|\varphi_n(t)-\chi(t)|\,\frac{dt}{|t|}=$$

$$=\int_{-\pi\nu}^{\pi\nu}|\varphi_n(2\pi j\nu+t)-\chi(2\pi j\nu+t)|\,\frac{dt}{|2\pi j\nu+t|}.$$

Согласно (4)

$$I_j=\int_{-\pi\nu}^{\pi\nu}|\varphi_n(t)\,e^{-2\pi ij\nu^2}-\chi(2\pi j\nu+t)|\,\frac{dt}{|2\pi j\nu+t|}.$$

Каждый интеграл I_j разобьем на два интеграла

$$I_j=I_j'+I_j'',$$

где I_j' означает часть интеграла I_j по области $|t|\leqslant c_{11}\nu$, а I_j'' — по области $c_{11}\nu<$ $<|t|\leqslant\pi\nu$.

Оценим отдельно интеграл I_0'. Для этого, полагая $\varepsilon=(\ln n)^{-1}$, опять разобьем его на две части:

$$I_0'=I_0'''+I_0^{IV},$$

соответственно по областям интегрирования $|t|\leqslant\varepsilon$, $\varepsilon<|t|\leqslant c_{11}\nu$.

Используя оценки (5) и (22), имеем

$$I_0'''=\int_{|t|\leqslant\varepsilon}B\nu\,dt=\frac{B\nu}{\ln n}.$$

Из (12) и (21)

$$I_0^{IV}=\int_{\varepsilon<|t|\leqslant c_{11}\nu}\left(B(|t|/\nu)^s(1+t^2)^{s-1}e^{-t^2/4}+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}\right)\frac{dt}{|t|}=B\nu^{-s}.$$

Далее в силу (7), (21) и оценки

$$Q_{s-1}(it)=B\nu^{2s-2}, \qquad (24)$$

справедливой при $|t|\leqslant\pi\nu$, получаем

$$I_0''=\int\limits_{c_{11}\nu<|t|\leqslant\pi\nu}\left|Be^{-t^2/12}+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}-e^{-t^2/2}Q_{s-1}(it)+\frac{B|t|}{\ln n}\right|\frac{dt}{|t|}=B\nu^{-s}.$$

Таким образом,

$$I_0=B\nu^{-s}.$$

Переходим к оценке I_j' при $j\neq0$. Согласно (12) и (23)

$$I_j'=\int\limits_{|t|\leqslant c_{11}\nu}\left|e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}\nu^{1-s}P_{s-1}(it)+B(|t|/\nu)^s(1+t^2)^{s-1}e^{-t^2/4}+\right.$$

$$+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}+\frac{B}{\nu^{s-1}|j|}(t^2+|t|^{s-1}+|t|^{3s-5})e^{-t^2/2}+$$

$$\left.+\frac{B|2\pi j\nu+t|}{\ln n}\right|\frac{dt}{|2\pi j\nu+t|}=\frac{B}{\nu^s|j|}.$$

Аналогично, согласно (7), (23) и (24) при $j\neq0$

$$I_j''=\int\limits_{c_{11}\nu<|t|\leqslant\pi\nu}\left|Be^{-t^2/12}+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}-e^{-2\pi ij\nu^2-t^2/2}Q_{s-2}(it)+\right.$$

$$\left.+\frac{B}{\nu^{s-1}|j|}(t^2+|t|^{s-1}+|t|^{3s-5})e^{-t^2/2}+\frac{B|2\pi j\nu+t|}{\ln n}\right|\frac{dt}{|2\pi j\nu+t|}=\frac{B}{\nu^s|j|}.$$

Собрав все оценки для I_j, получаем

$$I=\frac{B\ln\nu}{\nu^s}.$$

Остается применить известную лемму Эссеена, что и заканчивает доказательство теоремы.

Вильнюсский государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
2.IX.1971

Литература

1. Й. Кубилюс, Асимптотическое разложение законов распределения некоторых арифметических функций, Liet. matem. rink., **II**, (1962), 61–73.
2. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
3. H. Delange, Sur le nomber des diviseurs premiers de n, Acta arithm., 7 (1962), 191–215.
4. Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, Успехи матем. н., 22 (1967), 3 (135), 119–197.
5. Й. Кубилюс, Метод производящих рядов Дирихле в теории распределения аддитивных арифметических функций, I, Liet. matem. rink., **XI** (1971), 125–134.

GENERUOJANČIŲ DIRICHLĖ EILUČIŲ METODAS ADITYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ PASISKIRSTYMO TEORIJOJE. II

J. Kubilius

(*Reziumė*)

Jei $g(m)$ yra adityvinė aritmetinė funkcija, įgyjanti tik sveikas reikšmes ir tenkinanti sąlygas (B), kuriose $a_p=|f(p)-1|$; c_1, c_2, c_3 – konstantos, $s\geqslant2$ – sveikas skaičius, tai skaičius natūrinių $m\leqslant n$, kuriems

$$f(m)<\ln\ln n+x\sqrt{\ln\ln n},$$

lygus

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du + n \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\varphi_k(n, x)}{(\ln \ln n)^{k/2}} + \frac{Bn \ln \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{s/2}} .$$

Čia $\varphi_k(n, x)$ yra aprėžtos funkcijos, daugiklis B yra aprėžtas konstantos, priklausančios tik nuo c_1, c_2, c_3 ir s.

THE METHOD OF DIRICHLET GENERATING SERIES IN THE THEORY OF DISTRIBUTION OF ADDITIVE ARITHMETIC FUNCTIONS. II

J. Kubilius

(*Summary*)

Let $g(m)$ be an integer-valued additive arithmetic function satisfying the conditions (B) with $a_p = |f(p)-1|$ and constants c_1, c_2, c_3 and integer $s \geqslant 2$. Then the number of positive integers $m \leqslant n$, satisfying the inequality

$$f(m) < \ln \ln n + x \sqrt{\ln \ln n},$$

is equal to

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du + n \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\varphi_k(n, x)}{(\ln \ln n)^{k/2}} + \frac{Bn \ln \ln \ln n}{(\ln \ln n)^{s/2}}$$

where $\varphi_k(n, x)$ are bounded functions.

The multiplier B is bounded by a constant depending only on c_1, c_2, c_3 and s.