XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 513.7

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

А. И. Егоров, Л. И. Егорова

В настоящей работе определяются 1) максимально подвижные в гомотетическом смысле четырехмерные римановы пространства ненулевой кривизны; 2) максимальный порядок групп движений в пространствах линейных элементов усеченной несимметрической афинной связности.

1. Существует четыре типа римановых пространств v_4, допускающих группы движений C_8. Одно из них, определенное метрикой

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + x^{1^2}\,dx^{2^2} + 2\,dx^3\,dx^2, \tag{1}$$

допускает группу гомотетических движений C_9. Среди остальных трех пространств нет ни одного пространства, допускающего гомотетические движения. Два из них негомотетичны по теореме Гу Чао – Хао, как допускающие транзитивную группу движений и знакоопределенные ($ds^2>0$), третье также негомотетическое как допускающее ненулевую скалярную кривизну. Рассмотрим подробнее риманово пространство, определенное метрикой (1). Это пространство допускает транзитибную группу движений C_8. Интегрируя уравнения Киллинга [1], находим следующие операторы группы:

1) $X_1=p_1$,
2) $X_2=p_2$,
3) $X_3=p_3$,
4) $X_4=x^2\,x^4\,p_3-\frac{x^{2^2}}{2}\,p_1-p_4$,
5) $X_5=x^4\,p_2-x^2\,p_1$,
6) $X_6=-x^3\,p_3+x^1\,p_1-x^4\,p_4+x^2\,p_2$,
7) $X_7=\left(\frac{x^4\,x^{2^2}}{2}+x^1\right)p_3-\frac{x^{2^3}}{6}\,p_1-x^2\,p_4$,
8) $X_8=-\frac{x^{4^3}}{3}\,p_3-x^3\,p_1+x^4\,p_2$.

Выясним теперь, допускает ли это пространство девятый оператор гомотетических движений. Для этого надо интегрировать обобщенные уравнения Киллинга [1]. Отыщем оператор гомотетии в виде

$$X_9=a_1(x^1)\,p_1+a_2(x^2)\,p_2+a_3(x^3)\,p_3+a_4(x^4)\,p_4.$$

Из обобщенных уравнений Киллинга находим, что

$$a_1(x^1)=3x^1;\; a_2(x^2)=x^2;\; a_3(x^3)=3x^3;\; a_4(x^4)=x^4.$$

Таким образом, девятый оператор гомотетии имеет вид:

$$X_9=3x^1\,p_1+x^2\,p_2+3x^3\,p_3+x^4\,p_4.$$

Итак, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Из всех римановых пространств v_4 существует одно и только одно пространство с полной группой гомотетических движений C_9, содержащей девять параметров.*

2. Пространством линейных элементов усеченной несимметрической связности, называется многообразие $X_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле геометрического объекта с компонентами $\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x})$, преобразующимися при переходе от одной системы координат к другой по закону

$$\Lambda^{i'}_{jk'}=\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\;\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\;\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}+\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\;\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\,.$$

Для того, чтобы вектор v^i инфинитезимального преобразования определял движение в указанных пространствах, необходимо и достаточно наличие условия

$$D\Lambda^i_{jk}=0, \tag{2}$$

где D — знак левого дифференцирования вдоль векторного поля v^i. Прежде всего, представим неизвестные $v^i_j=v^i_j$ в виде

$$v^i_j=\omega^a_j\,u^i_a, \qquad (a=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

где ω^a_j — составляют систему p — линейно-независимых ковариантных векторов, определяющих с точностью до множителя векторы $\mathbf{u}^i_a$. Мы предполагаем также, что $v^i=0$, $\omega^a_j\,x^j=0$ в рассматриваемой точке $(x, \dot{x})$. Уравнения

$$D\Omega^i_{jk}=0,\quad [\Omega^i_{jk}=\frac{1}{2}\,(\Lambda^i_{jk}-\Lambda^i_{kj})],$$

содержащиеся в условиях интегрируемости уравнения (2) в точке $(x, \dot{x})$ теперь запишутся в виде

$$\Omega^h_{jk}\sum_{a=1}^{p}\omega^a_h\,u^i_a=\Omega^i_{hk}\sum_{a=1}^{p}\omega^a_j\,u^h_a+\Omega^i_{jh}\sum_{a=1}^{p}\omega^a_k\,u^h_a, \tag{3}$$

причем порядок групп движений по предположению удовлетворяет неравенству $r>n^2+n-np$. Исследуя уравнения (3), получим, что для групп движений порядка $r>n^2-n+2$, тензору Ω^i_{jk} необходимо иметь следующий вид:

$$\Omega^i_{jk}=\delta^i_j\,A_k-\delta^i_k\,A_j+\dot{x}^i\,B_{jk}. \tag{4}$$

Из равенств (4) следует, что тензор $B_{jk}=0$. Легко показать, что тензор $A_{i\cdot j}$ симметрический и ранга $\perp$ для групп движений порядка $r>n^2-n+2$ [3], т.е.

$$A_{i\cdot j}=\varepsilon_i\,B_i\,B_j, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_i=\pm 1,\quad A_{i\cdot j}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,.$$

Ввиду того, что тензор A_i нулевой степени однородности относительно $\dot{x}^\alpha$, получим

$$A_{i\cdot j}\,\dot{x}^j=\varepsilon_i\,B_i\,B_j\,\dot{x}^j=0,$$

откуда

$$B_i \dot{x}^i = 0.$$

Дифференцируя последнее соотношение по $\dot{x}^j$ получим

$$B_{i \cdot j} \dot{x}^i = -B_j. \tag{6}$$

Из равенства (5) следует, что тензор B_i $-\frac{1}{2}$ степени однородности относительно $\dot{x}^\alpha$, т.е.

$$B_{i \cdot j} \dot{x}^j = -\frac{1}{2} B_i. \tag{7}$$

Из симметрии тензора $B_{i \cdot j}$ и (6), (7) заключаем, что

$$B_{i \cdot j} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что тензор Ω^i_{jk} зависит только от x^α. Известно, что несимметрическую связность можно представить в виде суммы сопутствующей связности и тензора кручения, т.е.

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \Omega^i_{jk}.$$

Учитывая, что тензор Ω^i_{jk} не зависит от $\dot{x}^\alpha$ и сопутствующая связность симметрична по нижним индексам, можно сделать следующий вывод.

Теорема 2. *Не существует пространств линейных элементов усеченной несимметрической аффинной связности, допускающих группы движений порядка $r > n^2 - n + 2$. С другой стороны, существует пространство со связностью*

$$\Lambda^\mu_{1\mu} = -\Lambda^\mu_{\mu 1} = -\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^1}\;; \quad (\mu \neq 1,\ 2;\ \textit{по } \mu \textit{ нет суммирования})$$

$$\Lambda^\mu_{2\mu} = -\Lambda^\mu_{\mu 2} = 1; \quad \Lambda^\mu_{12} = -\Lambda^\mu_{21} = \frac{\dot{x}^\mu}{\dot{x}^1},$$

допускающее группу движений порядка $n^2 - n + 2$. С операторами

$$p_\alpha,\ x^1 p_1,\ x^1 p_2,\ x^\alpha p_\beta, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n \\ \beta = 3,\ 4,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}.$$

Итак, мы убедились в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Максимальный порядок групп движений в пространствах линейных элементов усеченной несимметрической связности равен точно $n^2 - n + 2$.*

Пензенский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
13.II.1970

Литература

1. И. П. Егоров, Движения в пространствах аффинной связности, МГУ, 1955.
2. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов. Сборник аспирантских работ, Математика, механика, физика, Казань, 1968, 101–107.
3. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространств гиперплоскостных элементов, III Прибалтийская конференция, Паланга, 1968, 163.
4. А. П. Урбонас, Автоморфизмы пространства тензорных опорных элементов, III Прибалтийская конференция, Паланга, 1968, 161–162.

KAI KURIŲ ERDVIŲ, TURINČIŲ MAKSIMALIOS EILĖS JUDESIŲ GRUPES, KLAUSIMU

A. Jegorovas, L. Jegorova,

(*Reziumė*)

Įrodoma, kad tarp visų Rimano erdvių v_4 egzistuoja viena ir tiktai viena erdvė, su pilna homotetijos judesių grupe. Nustatyta tam tikrų erdvių judesių grupių maksimali eilė.

ON SOME SPACES ADMITTING MOTION GROUPS OF MAXIMUM ORDER

A. Yegorov, L. Yegorova

(*Summary*)

It is proved that there exists one and only one space with a full] group of homothetic motions G_9 among all Riemanian spaces V_4. The maximum order of motion groups in spaces of linear elements with cut off nonsymmetrical compendency is proved to be equal to n^2-n+2.