XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1972

УДК 519.21

# УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Т. А. Азларов

1. Пусть $\xi$ – неотрицательная случайная величина (сл. вел.), $\Phi(x)=$ $=P\{\xi \geqslant x\}$ и

$$h(x, y)=P\{\xi \geqslant x+y/\xi \geqslant x\}-\Phi(x), \quad x \geqslant 0, \ y \geqslant 0. \tag{1}$$

Известно, что в классе непрерывных распределений $\Phi(x)$ только для семейства $\mathscr{E}$ показательных выполняется соотношение $h(x, y)\equiv 0$. В статье [1] обсуждена устойчивость этого характеризационного свойства показательных распределений. Показано, что если $\Phi(x)$ непрерывна и

$$\sup_{\substack{x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0}} |h(x, y)| \leqslant \varepsilon, \qquad 0<\varepsilon<1, \tag{2}$$

то найдется такое распределение $E(x)=e^{-\nu x}$, что

$$\sup_{x \geqslant 0} |\Phi(x)-e^{-\nu x}| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Другое характеризационное свойство семейства $\mathscr{E}$ в классе непрерывных распределений с конечным математическим ожиданием приводится в статье [2]:

для всех $y \geqslant 0$

$$M(\xi-y/\xi \geqslant y)\equiv \mathrm{const}=M\xi. \tag{3}$$

Если $\xi$ – продолжительность жизни некоторого индивидуума, то свойство (3) означает, что средняя продолжительность оставшейся части жизни не зависит от достигнутого возраста. В работе [2] отмечается, что средняя продолжительность жизни английской малиновки (около 1,2 года), по данным статистики, обладает свойством (3) и это послужило поводом для доказательства показательности распределения продолжительности ее жизни.

В настоящей статье обобщается результат работы [1] в случае произвольных $\Phi(x)$, а также устанавливается устойчивость свойства (3). Аналогичные теоремы сформулированы и для характеризационных свойств геометрического распределения.

2. **Теорема 1.** *Если для произвольной неотрицательной сл. вел. $\xi$ выполняется условие* (2), *то*

$$\inf_{0<\nu<\infty} \sup_{x \geqslant 0} |\Phi(x)-e^{-\nu x}| < \sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon. \tag{4}$$

Доказательство. Равенство (1) легко переписать в следующем удобном виде:

$$\Phi(x+y)=\Phi(y)[\Phi(x)+h(x,\ y)]. \tag{5}$$

Отсюда заключаем, что если выполнено условие (2), то

$$P\{\xi=0\}=1-\Phi(+0)\leqslant\varepsilon,$$
$$P\{\xi=a\}=\Phi(a)-\Phi(a+0)\leqslant 2\varepsilon\Phi(a),\qquad a>0. \tag{6}$$

Поскольку при $\varepsilon>\frac{1}{4}$ неравенство тривиальное, предположим, что $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$. В силу неравенства (6) можно утверждать существование хотя бы одной точки $a_0>0$, при которой выполняется неравенство:

$$\sqrt{\varepsilon}\leqslant 1-\Phi(a_0)<\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon. \tag{7}$$

Далее определим $\lambda$ из равенства $\Phi(a_0)=e^{-\lambda a_0}$. В силу равенства (5) и условия (2)

$$\Phi(a_0)[\Phi(a_0)-\varepsilon]^{m-1}\leqslant\Phi(ma_0)\leqslant\Phi(a_0)[\Phi(a_0)+\varepsilon]^{m-1},\qquad m=1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\Phi(a_0)[\Phi(a_0)-\varepsilon]^{m-1}-[\Phi(a_0)]^m\leqslant\Phi(ma_0)-[\Phi(a_0)]^m\leqslant$$
$$\leqslant\Phi(a_0)[\Phi(a_0)+\varepsilon]^{m-1}-[\Phi(a_0)]^m.$$

Отсюда легко получаем:

$$|\Phi(ma_0)-e^{-\lambda ma_0}|\leqslant\varepsilon\frac{e^{-\lambda a_0}}{1-e^{-\lambda a_0}}[1-e^{-\lambda(m-1)a_0}].$$

Так как функция $\frac{1-x}{x}$, $0<x<1$, убывающая, в силу неравенств (7) имеем

$$|\Phi(ma_0)-e^{-\lambda ma_0}|\leqslant(\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)[1-e^{-\lambda(m-1)a_0}],\qquad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть теперь $x\geqslant a_0$ — любое. Тогда при некотором целом $m>1$ выполняются неравенства: $(m-1)a_0\leqslant x<ma_0$. Так как $\Phi(x)$ и $e^{-\lambda x}$ невозрастающие функции, мы заключаем, что либо

$$0\leqslant\Phi(x)-e^{-\lambda x}<\Phi\Big((m-1)a_0\Big)-e^{-\lambda(m-1)a_0}+e^{-\lambda(m-1)a_0}(1-e^{-\lambda a_0})<$$
$$<(\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)(1-e^{-\lambda(m-2)a_0})+(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon)e^{-\lambda(m-2)a_0}=$$
$$=\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon+3\varepsilon e^{-\lambda(m-2)a_0}\leqslant\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon,$$

либо

$$0<e^{-\lambda x}-\Phi(x)\leqslant e^{-\lambda(m-1)a_0}(1-e^{-\lambda a_0})+e^{-\lambda ma_0}-\Phi(ma_0)<$$
$$<(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon)e^{-\lambda(m-1)a_0}+(\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)[1-e^{-\lambda(m-1)a_0}]<\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon.$$

Таким образом, для любого $x\geqslant a_0$

$$|\Phi(x)-e^{-\lambda x}|<\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon.$$

При $0\leqslant x<a_0$ справедлива также оценка

$$|\Phi(x)-e^{-\lambda x}|\leqslant 1-e^{-\lambda a_0}<\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Аналогичное свойство характеризует семейство геометрических распределений в классе целочисленных неотрицательных сл. вел. Об устойчивости этого свойства справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть* $\xi\geqslant 0$ *— целочисленная сл. вел. и для всех целых* $m\geqslant 0$ *и* $n\geqslant 0$

$$|h(m,\ n)|\leqslant\varepsilon,\qquad 0<\varepsilon<1.$$

*Тогда найдется такое геометрическое распределение* $\Gamma(k)=a^k$, $0<a<1$, *что*

$$\sup_{k\geqslant 0}|\Phi(k)-a^k|<2\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon.$$

Доказательство примерно такое же, как и предыдущее. Укажем лишь выбор параметра $a$: пусть $k_0\geqslant 1$ – целое, при котором справедливы неравенства:

$$1-\Phi(k_0-1)<\sqrt{\varepsilon}\leqslant 1-\Phi(k_0).$$

Тогда полагаем

$$a=[\Phi(k_0)]^{\frac{1}{k_0}}.$$

3. Для математического ожидания неотрицательной сл. вел. справедливо равенство $M\xi=\int_0^\infty \Phi(x)\,dx$. Учитывая последнее, свойство (3) можно записать в следующей форме:
для всех $y\geqslant 0$

$$H(y)=\int_0^\infty h(x,\ y)\,dx\equiv 0. \tag{3'}$$

**Теорема 3.** *Пусть для произвольной сл. вел.* $\xi\geqslant 0$ *с конечным математическим ожиданием* $M\xi=b$ *выполняется условие*

$$\sup_{y\geqslant 0}|H(y)|\leqslant\varepsilon b,\qquad 0<\varepsilon<1.$$

*Тогда найдется такое показательное распределение* $E(x)=e^{-\nu x}$, *что*

$$\sup_{x\geqslant 0}|\Phi(x)-e^{-\nu x}|<2\varepsilon. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, т.к. только в этом случае неравенство (8) нетривиальное. Перепишем $H(y)$ следующим образом:

$$H(y)=\int_0^\infty h(x,\ y)\,dx=\int_0^\infty\left[\frac{\Phi(x+y)}{\Phi(y)}-\Phi(x)\right]dx=\frac{1}{\Phi(y)}\int_y^\infty\Phi(x)\,dx-b.$$

Отсюда

$$\Phi(y)=\frac{1}{b+H(y)}\int_y^\infty\Phi(x)\,dx=\frac{1}{b+H(y)}\left[b-\int_0^y\Phi(x)\,dx\right].$$

Фиксируем точку $y_0$, которую выберем позже, и оценим $\Phi(y)$ в точках $y=ky_0$, $k=1,2,3,\ldots$ Прежде всего, из последнего соотношения

$$\frac{b-y_0}{b+H(y_0)}\leqslant\Phi(y_0)\leqslant\frac{b}{b+H(y_0)+y_0}.$$

Далее

$$\Phi\ (k+1)y_0\Big)=\frac{1}{b+H\big((k+1)y_0\big)}\int_{(k+1)y_0}^\infty\Phi(x)\,dx\leqslant\frac{b+H(ky_0)}{h+H\big((k+1)y_0\big)}\Phi(ky_0)-$$

$$-\frac{y_0}{b+H\ \big((k+1)y_0\big)}\Phi\Big((k+1)y_0\Big);$$

$$\Phi\left((k+1)y_0\right) \leqslant \frac{b+H(ky_0)}{b+H\left((k+1)y_0\right)+y_0}\,\Phi(ky_0) \leqslant \ldots \leqslant \frac{b+H(ky_0)}{b+y_0+H\left((k+1)y_0\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{b+H\left((k-1)y_0\right)}{b+y_0+H(ky_0)}\cdot\ldots\cdot\frac{b+H(2y_0)}{b+y_0+H(3y_0)}\cdot\frac{b+H(y_0)}{b+y_0+H(2y_0)}\cdot\frac{b}{b+y_0+H(y_0)} =$$

$$= \frac{b}{b+y_0+H\left((k+1)y_0\right)}\left(1-\frac{y_0}{b+y_0+H(y_0)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{y_0}{b+y_0+H(ky_0)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b}{b+y_0-\varepsilon b}\left(1-\frac{y_0}{b+y_0+\varepsilon b}\right)^k. \tag{9}$$

Аналогичным образом получаем нижнюю оценку:

$$\Phi\left((k+1)y_0\right) \geqslant \frac{b-y_0}{b+b\varepsilon}\left(1-\frac{y_0}{b-\varepsilon b}\right)^k. \tag{10}$$

Теперь положим $y_0=\varepsilon b$ и определим параметр $\nu$ из соотношения

$$e^{-\nu\varepsilon b} = \frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Покажем, что при распределении $E(x)=e^{-\nu x}$ выполняется неравенство (8).

Пусть $y \geqslant y_0$ — любое и $m \geqslant 1$ такое целое, при котором $my_0 \leqslant y < (m+1)y_0$. Учитывая свойства функции распределения и полученные оценки (9) и (10), получаем:

если $\Phi(y) \geqslant e^{\nu y}$

$$0 \leqslant \Phi(y)-e^{-\nu y} < \Phi(my_0)-e^{-\nu(m+1)y_0} \leqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{m-1} -$$

$$-\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{m+1} < \left(\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)\left[1+\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{m-2}\right]+\left[1-\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^2\right]\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{m-1} = \frac{3\varepsilon}{2(1+2\varepsilon)} -$$

$$-\frac{3\varepsilon}{2(1+2\varepsilon)}\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{m-1}+\frac{8\varepsilon}{(2+\varepsilon)^2}\left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^{m-1} < \frac{3\varepsilon}{2+4\varepsilon}+$$

$$+\frac{4+20\varepsilon-3\varepsilon^2}{(2+4\varepsilon)(2+\varepsilon)^2}\cdot\varepsilon = \frac{8\varepsilon}{(2+\varepsilon)^2} < 2\varepsilon;$$

если же $\Phi(y) < e^{-\nu y}$,

$$0 < e^{-\nu y}-\Phi(y) \leqslant e^{-\nu my_0}-\Phi\left((m+1)y_0\right) \leqslant \left(1-\frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^m-\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m+$$

$$+\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m < \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m\right]+\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m =$$

$$= \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}+\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}\left(1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m < 2\varepsilon.$$

При $0 \leqslant y < y_0$

$$|\Phi(y)-e^{-\nu y}| \leqslant 1-e^{-\nu y_0} = \frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon} < \varepsilon.$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Пусть $\xi \geqslant 0$ — целочисленная сл. вел. с конечным математическим ожиданием $M\xi=b$ и при всех целых $m \geqslant 0$*

$$|H(m)| < \varepsilon b, \qquad 0<\varepsilon<1.$$

*Тогда*

$$\sup_{k\geqslant 0}\left|\Phi(k)-\left(\frac{b}{b+1}\right)^k\right| < \frac{2b\varepsilon}{b+1}.$$

При доказательстве этого утверждения используются неравенства:

$$\frac{b}{b+1+\varepsilon b}\left(\frac{b-\varepsilon b}{b+1-\varepsilon b}\right)^{n-1}\leqslant \Phi(n)\leqslant \frac{b}{b+1-\varepsilon b}\left(\frac{b+\varepsilon b}{b+1+\varepsilon b}\right)^{n-1}, n=1, 2, 3,\ldots$$

4. Отметим, что, применив идеи работы [3], результат нашей теоремы 3 можно усилить следующим образом.

**Теорема 5.** *Если выполнены условия теоремы* 3, *то найдется такое распределение* $E(x)=e^{-\nu x}$, *что будет справедливо неравенство*

$$|\Phi(x)-e^{-\nu x}|\leqslant \min\left\{2\varepsilon, \frac{2\varepsilon}{1+x}\left[1+6b\ln\frac{1}{2\varepsilon}\right]\right\}.$$

Ташкентский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
24.XI.1969

Литература

1. Хоанг Хыу Ньы, Оценка устойчивости одной характеризации экспоненциального закона, Liet. matem. rink., **VIII**, № 1(1968), 175–177.
2. H. E. Reinhardt, Characterizing the exponential distribution, Biometrics, **24,** No 2 (1968), 437–439.
3. С. Ф. Колодяжный, Обобщение одной теоремы Эссеена, Вестник Ленинградского университета, 13 (1968), 28–33.

## EKSPONENTINĮ PASISKIRSTYMĄ CHARAKTERIZUOJANČIŲ SAVYBIŲ STABILUMAS

T. Azlarovas

(*Reziumė*)

Įrodoma, kad neneigiamo atsitiktinio dydžio, tenkinančio sąlygą

$$h(x, y)=\left|\sup_{\substack{x>0\\y>0}}\left(P\left\{\xi\geqslant x+y \mid \xi\geqslant x\right\}-\Phi(x)\right)\right|\leqslant\varepsilon,\ 0\leqslant\varepsilon<1,$$

pasiskirstymo funkcijai $\Phi(x)=P\{\xi\geqslant x\}$ galioja priklausomybė

$$\inf_{0<\nu<\infty}\ \sup_{x\geqslant 0}|\Phi(x)-e^{-\nu x}|\leqslant \sqrt{3}+2\varepsilon.$$

Įrodomos panašios teoremos, esant kitoms sąlygoms bei esant diskretiniam pasiskirstymui.

## STABILITY OF CHARACTERIZING PRORERTIES OF EXPONENTIAL DISTRIBUTION

T. Azlarov

(*Summary*)

It is proved that for every distribution $\Phi(x)=P\{\xi\geqslant x\}$ of the nonnegative random variable satisfying the condition

$$|h(x, y)|=\left|\sup_{\substack{x>0\\y>0}}\left(P\left\{\xi\geqslant x+y \mid \xi\geqslant x\right\}-\Phi(x)\right)\right|\leqslant\varepsilon,\quad 0\leqslant\varepsilon<1$$

the following relation

$$\inf_{0<\nu<\infty}\ \sup_{x\geqslant 0}|\Phi(x)-e^{-\nu x}|\leqslant \sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon$$

is valid.

The theorem of such a type for the nonnegative random variable satisfying the condition

$$\sup_{y\geqslant 0}\left|\int_0^\infty h(x, y)\,dx\right|\leqslant\varepsilon b,\ 0<\varepsilon<1,$$

where $b=\mathbf{M}\xi$ is proved.

The case of lattice distribution is investigated as well.