XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1972

УДК 533.59

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

В. И. Скакаускас

В настоящей заметке приведем обобщение некоторых результатов работ [1], [2], [3].

1. Пусть $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ решение уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}=\left(\frac{\varkappa(s-1)}{m}\right)^{\frac{2}{s-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\rho_*}\{f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}_1')f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}')-$$

$$-f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}_1)\}g^{\frac{s-5}{s-1}}\rho d\rho d\varepsilon d\mathbf{u}_1\equiv I(t, \mathbf{r}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

где: $\mathbf{F}(t, \mathbf{r})$ – внешнее поле массовых сил; $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ функция распределения; $\varkappa$, s – постоянные, определяющие центральный потенциал взаимодействия частиц, имеющий вид

$$U(p)=\varkappa\frac{p^{1-s}}{s-1},$$

где p – расстояние между центрами взаимодействующих частиц; $\mathbf{g}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}$; ρ_* – некоторая постоянная; $\mathbf{u}_1'=\mathbf{u}_1-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})$, $\mathbf{u}'=\mathbf{u}+\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор, лежащий на линии центров взаимодействующих частиц.

Вместе с $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ рассмотрим функцию $f(T, \xi, \mathbf{C})$, $T=T(t, \mathbf{r})$, $\xi=\xi(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{C}=a(t, \mathbf{r})(\mathbf{u}-\mathbf{v})$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Найдем функции T, ξ a, $\mathbf{v}$, при которых $f(T, \xi, \mathbf{C})$ будет точным решением уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial T}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T, \xi, \mathbf{C}). \tag{2}$$

Подставляя $f(T, \xi, \mathbf{C})$ в уравнение (1) и выполняя соответствующие преобразования, получим уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial T}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_i\left(v_i+\frac{1}{a}C_i\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\}+\\&+\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\left\{\frac{\partial \xi}{\partial t}+\sum_i\left(v_i+\frac{1}{a}C_i\right)\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right\}+\\&+\frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}}\cdot\left\{\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}+\sum_i\left(v_i+\frac{1}{a}C_i\right)\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_i}+a\mathbf{F}\right\}=\\&=K(a)\,I(T, \xi, \mathbf{C}),\quad K(a)=a^{-4\frac{s-2}{s-1}},\end{aligned}\tag{3}$$

которое после деления на $K(a)$ и наложения условий

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T}{\partial x_i}=\frac{\partial a}{\partial x_i}=0, \\
\frac{\partial v_k}{\partial x_i}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\delta_{ki}, \\
\mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\sum_i v_i\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}, \\
\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}=ab(t)\,\delta_{ki}, \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}=0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

принимает вид

$$
\frac{\partial f}{\partial T}\frac{1}{K(a)}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{b}{K(a)}\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\ \xi,\ \mathbf{C}). \tag{5}
$$

В условиях (4) $k,\ i=1,\ 2,\ 3$, а δ_{ki} – символ Кронеккера. Из условий (4) и уравнения (5) следует

$$
\frac{\partial f}{\partial T}+\frac{\mu}{a^2K(a)}\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\xi,\mathbf{C}), \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
T=\int K(a)\,dt+t_1, \qquad \mathbf{v}=\frac{\dot a}{a}\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha}, \qquad \xi=\mu\left(\frac{1}{a}\mathbf{r}-\int\frac{\boldsymbol{\alpha}}{a}\,dt\right)+\xi_1, \\
\mathbf{F}=\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{\cdot}+\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\mathbf{r}+\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\dot a}{a}\boldsymbol{\alpha}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь μ, ξ_1, t_1 – постоянные интегрирования; $a(t)$, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ – произвольные гладкие функции времени; точка над a, $\boldsymbol{\alpha}$ означает производную. Из (6), (7) видно, что уравнение (6) приводится к виду (2) только при специальном виде массовых сил $\mathbf{F}$ в следующих трех случаях:

а)

$$
\begin{gathered}
\mu=a^2K(a), \quad a=\mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\alpha}=\int\mathbf{F}(t)\,dt+\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}_1=\mathrm{const}, \\
T=K(a)\,t+t_1, \quad \mathbf{v}=\boldsymbol{\alpha}, \quad \xi=aK(a)\left(\mathbf{r}-\int\boldsymbol{\alpha}\,dt\right)+\xi_1, \qquad K(a)=a^{-4\frac{s-2}{s-1}}, \\
f(T,\ \xi,\ \mathbf{C}), \quad \frac{\partial f}{\partial T}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\ \xi,\ \mathbf{C});
\end{gathered}
\tag{8}
$$

б) $s=3$, $\mu=1$; функции a, $\boldsymbol{\alpha}$ определяются видом сил $\mathbf{F}$;

$$
\begin{gathered}
T=\int K(a)\,dt+t_1 \quad \mathbf{v}=\frac{\dot a}{a}\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha}, \quad \xi=\frac{1}{a}\mathbf{r}-\int\frac{\boldsymbol{\alpha}}{a}\,dt+\xi_1, \quad K(a)=a^{-2}, \\
f(T,\ \xi,\ \mathbf{C}), \quad \frac{\partial f}{\partial T}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\ \xi,\ \mathbf{C});
\end{gathered}
\tag{9}
$$

в) $\mu=0$; функции a, $\boldsymbol{\alpha}$ определяются видом сил $\mathbf{F}$;

$$
\begin{gathered}
T=\int K(a)\,dt+t_1, \quad \mathbf{v}=\frac{\dot a}{a}\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha}, \quad K(a)=a^{-4\frac{s-2}{s-1}}, \\
f(T,\ \mathbf{C}), \quad \frac{\partial f}{\partial T}=I(T,\ \mathbf{C}).
\end{gathered}
\tag{10}
$$

При $\mathbf{F}=0$ из (8)–(10) следует:

а)

$$T=K(a)t+t_1,\quad \xi=aK(a)(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)+\xi_1,\quad \mathbf{C}=a(\mathbf{u}-\mathbf{v}),$$

$$f(T,\ \xi,\ \mathbf{C}),\quad \frac{\partial f}{\partial T}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\ \xi,\ \mathbf{C}), \tag{8'}$$

$a>0$, $\mathbf{v}$, t_1, ξ_1 – произвольные постоянные. В этом случае получаем волновое движение;

б)

$$s=3,\quad \mu=1,\quad a=\varkappa(t+t_2),\quad \xi=\frac{1}{a}(\mathbf{r}+\mathbf{v})+\xi_1,$$

$$\mathbf{v}=\frac{1}{t+t_2}(\mathbf{r}+\mathbf{v}),\quad T=t_1-\frac{1}{\varkappa^2(t+t_2)},\quad f(T,\ \xi,\ \mathbf{C}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial T}+\mathbf{C}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi}=I(T,\ \xi,\ \mathbf{C}). \tag{9'}$$

$\varkappa>0$, t_2, $\mathbf{v}$, ξ_1, t_1 – произвольные постоянные. При $\varkappa=1$, $t_2=0$, $\mathbf{v}=\xi_1=0$ отсюда следует результат работы [1];

в)

$$\mu=0,\ a=\varkappa(t+t_2),\quad \mathbf{v}=\frac{1}{t+t_2}(\mathbf{r}+\mathbf{v}),$$

$$T=t_1+\frac{1}{\varkappa^{4\frac{s-2}{s-1}}}\cdot\frac{s-1}{7-3s}\,\frac{1}{(t+t_2)^{\frac{3s-7}{s-1}}},\quad f(T,\ \mathbf{C}),\quad \frac{\partial f}{\partial T}=I(T,\ \mathbf{C}), \tag{10'}$$

$\varkappa>0$, t_1, t_2, $\mathbf{v}$ – произвольные постоянные. При $\varkappa=1$, $t_2=0$, $\mathbf{v}=0$ отсюда следует результат работы [2].

2. В работе [3] показано, что если $f(t,\ u^2)$ удовлетворяет однородному уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}=I(t,\ u^2), \tag{11}$$

то в случае однородной по пространству плотности газа функция

$$f(t,\ C^2),\ C^2=\frac{m}{2k\Theta}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2,\quad \mathbf{v}=-\frac{1}{2\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt}\,\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha}, \tag{12}$$

где Θ, $\mathbf{v}$ – температура и макроскорость газа, является точным решением неоднородного уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}=I(t,\ C^2),\quad \mathbf{F}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}. \tag{13}$$

Здесь Θ, ω, α – произвольные гладкие функции времени. Подстановкой (14) в (13) можно убедиться, что в случае однородной по пространству плотности каждому решению уравнения (11) соответствует решение уравнения (13) вида

$$f(T,\ C^2),\quad C^2=\frac{m}{2k\Theta}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2\quad \mathbf{v}=-\frac{1}{2\Theta}\,\frac{d\Theta}{dt}\,\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\alpha},$$

$$T=\beta+\int\left(\frac{m}{2k\Theta}\right)^{-2\frac{s-2}{s-1}}dt,\quad \beta=\mathrm{const}, \tag{14}$$

где Θ, $\mathbf{v}$ – температура и макроскорость газа, причем гладкие функции времени Θ, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ определяются видом сил $\mathbf{F}$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
25.II.1971

Литература

1. А. А. Никольский, О движении одноатомного разреженного газа в однородно расширяющемся пространстве, ДАН СССР, 153, 3 (1963).
2. А. А. Никольский, Трехмерное однородное расширение – сжатие разреженного газа со степенными функциями взаимодействия, ДАН СССР, 151, 3 (1963).
3. K. Piechôr, Exact solution of the Boltzmann equation for an isotropic velocity distribution, Archiwum mechaniki stosowanej, 4, 22 (1970).

KAI KURIE TIKSLŪS BOLCMANO LYGTIES SPRENDINIAI

V. Skakauskas

(Reziumė)

Straipsnyje parodyta, kad kiekvieną Bolcmano lygties sprendinį $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ atitinka kitas lygties sprendinys $f(T, \xi, \mathbf{C})$. Surastos funkcijos $T(t)$, $\xi(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{C}=a(\mathbf{u}-\mathbf{v})$, $a(t)$, $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$.

SOME EXACT SOLUTIONS OF THE BOLTZMANN EQUATION

V. Skakauskas

(Summary)

It is proved that the Boltzmann equation solution $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$ corresponds another solution $f(T, \xi, \mathbf{C})$. The functions $T(t)$, $\xi(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{C}=a(\mathbf{u}-\mathbf{v})$, $a(t)$, $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ are given.