XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1972

УДК 519.21

О НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ю. Т. Сильченко, П. Е. Соболевский

1. Рассматривается смешанная краевая задача для параболического уравнения 2-го порядка с одной пространственной переменной. Нас интересует вопрос о нелокальной разрешимости задачи. Этот вопрос изучался во многих работах – библиографию см. в [1].

В [1] доказана нелокальная теорема существования решения для уравнения

$$u'_t = a(t, x, u, u'_x)\, u''_{xx} + f(t, x, u, u'_x)$$

с гладкими коэффициентами, когда

$$|f(t, x, u, p)| \leqslant K_1(u) p^2 + K_2(u),$$

$$m_1 \leqslant a(t, x, u, p) \leqslant m_2,$$

где $K_1(u)$ и $K_2(u)$ – непрерывные функции, $m_1, m_2 > 0$.

Для частного вида уравнения

$$u'_t = u''_{xx} + u u'_x f(u'_x)$$

в [2] указана нелокальная теорема в предположении, что $\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} = \infty$, где $\alpha > 0$.

Ниже приводятся условия, при выполнении которых уравнение

$$u'_t = a(t, x)\, u''_{xx} + f(t, x, u, u'_x) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} &u(0, x) = u_0(x), \\ &u(t, c) = u(t, d) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

($t \in [0, T]$, $x \in [c, d]$) имеет нелокальное решение при более сильном росте функции f по p. Например, допускаются функции вида

$$-\varphi(t, x)\, u^{2n+1} |p|^3 \ln |p|,$$

где $\varphi(t, x) \geqslant 0$.

2. Под решением понимается непрерывная в $[0, T] \times [c, d]$ функция $u(t, x)$, имеющая непрерывные производные u'_t, u'_x, u''_{xx} в $(0, T) \times (c, d) = Q$ и удовлетворяющая в Q уравнению (1), а при $t = 0$ и $x = c$, $x = d$ – условиям (2).

Теорема. *Пусть функция $f(t, x, u, p)$ непрерывна по совокупности переменных и имеет непрерывные частные производные по t, u, p при $t\in[0, T]$, $x\in[c, d]$ и $u\in(-\infty, +\infty)$, $p\in(-\infty, +\infty)$, а функция $a(t, x)$ — непрерывна по совокупности переменных и имеет непрерывную производную по t в $\bar{Q}$. Пусть $u_0(x)$ имеет 2 непрерывные производные.*

Пусть выполнены неравенства:

$$a(t, x)\geqslant a_0>0, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}\cdot\frac{1}{a}\cdot f\right|+N\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial a}{\partial t}\cdot\frac{1}{a}\right)\leqslant M, \qquad N\geqslant 0, \tag{4}$$

$$f(t, x, u, p)u\leqslant\delta p^2+M_1(t, x, u), \tag{5}$$

где $M_1(t, x, u)$ — непрерывна и $\delta<a_0$,

$$|f(t, x, u, p)|\leqslant\varphi(|p|), \tag{6}$$

где $\varphi(s)$ — монотонно возрастающая функция, для которой $\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{s^2\,ds}{\varphi(s)}=\infty$.

Тогда на отрезке $[0, T]$ существует единственное решение задачи (1)—(2).

Локальная разрешимость уравнения может быть доказана различными способами, например, методом дробных степеней операторов в пространствах L_p, как это делается в [3]. Для продолжимости локального решения достаточно иметь априорную оценку

$$|u'_x|\leqslant C. \tag{7}$$

Условия (3)—(4) позволяют получить априорную оценку

$$\max|u'_t|\leqslant C_1. \tag{8}$$

Для этого уравнение (1) преобразовывается к виду

$$u''_{tt}-a(t, x)u'''_{xxt}=\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}\cdot\frac{1}{a}\cdot f+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial a}{\partial t}\cdot\frac{1}{a}\right)u'_t+\frac{\partial f}{\partial p}\,u''_{xt}$$

и рассматривается в точках максимума и минимума функции u'_t. Если $M\leqslant 0$, то внутри области Q u'_t оценивается так: $|u'_t|\leqslant N$. На границе области оценка имеет вид

$$|u'_t|\leqslant\max_{x\in[c, d]}\left\{a(0, x)|u''_0(x)|+\left|f\left(0, x, u_0(x), u'_0(x)\right)\right|\right\}.$$

От предположения $M\leqslant 0$ можно освободиться, сделав в уравнении для функции u'_t замену $u'_t=w\exp kt$ с $k=\frac{M}{N}$.

Умножим уравнение (1) на u и проинтегрируем его по x от c до d. Применив к полученному соотношению неравенство

$$ab\leqslant\varepsilon\,\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2\varepsilon} \qquad (\varepsilon>0)$$

и оценку (8), получим новое неравенство

$$\left(a_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\int\limits_c^d|u'_x|^2\,dx\leqslant\int\limits_c^d f(t, x, u, p)u\,dx.$$

Выберем теперь $\delta+\frac{\varepsilon}{2}<a_0$ и воспользуемся (5). При этом мы получим оценку

$$\int_c^d |u'_x|^2\,dx \leqslant C_2. \tag{9}$$

В частности, эта оценка означает, что

$$\min\,[u'_x(t,\ x)]^2 \leqslant C_2. \tag{10}$$

Перейдем к оценке (7). Введем функцию

$$\Phi(z)=\rho\int_{\alpha^2}^{z}\frac{s^{\frac{1}{2}}\,ds}{C_1+\varphi\left(s^{\frac{1}{2}}\right)},$$

где $\rho=\max\limits_{(t,\ x)\in\bar{Q}} a(t,\ x)$, C_1 – из оценки (8). С использованием условия (6) и оценок (8), (9), (10) методом, изложенным в [4], доказывается, что $\Phi\left(\max\,(u'_x)^2\right)\leqslant C_3$. Это неравенство и означает наличие оценки (7).

Теперь можно заключить, что $|f(t,\ x,\ u,\ p)|\leqslant C(R)$ при $|p|\leqslant R$ и поэтому локальное решение будет продолжимо.

Воронежский Государственный университет

Поступило в редакцию 25.X.1969

Литература

1. О. А. Ладыженская и др., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., „Наука", 1967.
2. О. А. Олейник, С. Н. Кружков, Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными, УМН, **16**, 5 (101) (1961).
3. П. Е. Соболевский, Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах, Труды Моск. матем. об-ва, **10** (1961), 287–350.
4. Ф. Хартман, О краевых задачах для систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, Математика, 1962, 6–5.

APIE NELOKALINĘ EGZISTENCIJOS TEOREMĄ VIENMATEI KVAZITIESINEI PARABOLINEI LYGČIAI

J. Silčenka, P. Sobolevskis

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamas mišrus kraštinis uždavinys vienmatei kvazitiesinei parabolinei lygčiai. Randamos vienpusės netiesiškumo sąlygos, kurioms esant nelokalinės egzistencijos teoremos galiojimui yra galima trečioji netiesiškumo augimo pagal išvestinę eilė.

ÜBER DEN UNLOKALEN EXSISTENZSATZ FÜR EINE EINDIMENSIONALE QUASILINEARE PARABOLISCHE GLEICHUNG

J. Siltschenko, P. Sobolevskij

(*Zusammenfassung*)

In dem Beitrag wird die gemischte Randwertaufgabe für eine eindimensionale quasilineare parabolische Gleichung behandelt. Es sind einseitige Bedingungen auf die Nichtlinearität gefunden, bei deren Erfüllung die dritte Ordnung des Wachsens der Nichtlinearität nach der Ableitung für Richtigkeit des unlokalen Theorems möglich ist.