XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1972

УДК 519.21

ОДНА ТЕОРЕМА О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ

А. Миталаускас

Рассмотрим последовательность $\{\xi_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $F(x)$. Пусть $G_\alpha(x, \lambda)$ – функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем $\alpha\neq 1$ и параметром λ. Введем ,,псевдомоменты"

$$\mu_i=\int_{-\infty}^{\infty} x^i\, d[F(x)-G_\alpha(x, 1)]$$

для целых неотрицательных i, и ,,абсолютные псевдомоменты"

$$\nu_r=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r\, |d[F(x)-G_\alpha(x, 1)]|$$

для всех $r\geqslant 0$. Пусть, далее,

$$F_n(x)=\mathbf{P}\left\{n^{-\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k<x\right\}.$$

В предыдущей работе автора [1] получена в терминах псевдомоментов оценка остаточного члена в интегральной предельной теореме в случае сходимости $F_n(x)$ к устойчивому закону. Метод, используемый в [1], позволяет получить несколько более общий результат.

Теорема. *Если*

$$\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_{m-1}=0, \tag{1}$$

и $\nu_m<\infty$ *при некотором целом* $m\geqslant\varkappa=1+[\alpha]$, *тогда для всех натуральных n имеет место оценка*

$$R_n=\sup_x |F_n(x)-G_\alpha(x, 1)|\leqslant c\;\frac{\max\left(\nu_m,\ \nu_m^{\frac{1}{1+m}}\right)}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}. \tag{2}$$

Здесь $c=c(\alpha, m)$ – константа, зависящая только от показателя предельного закона α и числа m. И в дальнейшем буквой c с индексами будем обозначать константы, зависящие, вообще говоря, от α и m.

Для доказательства теоремы воспользуемся леммой 2 упомянутой работы [1], утверждающей: *для* $\lambda>0$ *и* $0<\alpha<2$ *имеет место неравенство*

$$\sup_x |F(x)-G_\alpha(x, 1)|\leqslant c_2\sup_x |[F(x)-G_\alpha(x, 1)]*G_\alpha(x, \lambda)|+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{3}$$

В доказательстве еще потребуется неравенство из [1]: для всех натуральных k

$$\left|\frac{d^k G_\alpha(x,\lambda)}{dx^k}\right| \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\lambda^{-\frac{k}{\alpha}}, \tag{4}$$

а также неравенство: для всех целых $m \geqslant \varkappa$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{m+1}G_\alpha(x,\lambda)}{dx^{m+1}}\right| dx \leqslant c_1 \lambda^{-\frac{m}{\alpha}}, \tag{5}$$

получаемое аналогично случаю $m=\varkappa$ (см. формулу (6) в [1]). Наконец, потребуется еще одна лемма (тоже аналогичная лемме 3 из [1]).

Лемма. *При* $n \geqslant 2$, $0<\lambda<\frac{1}{2}$ *и* $n_0=\min\{i_0, n-1\}$ *справедливы оценки:*

$$S_1=\sum_{1\leqslant i\leqslant n_0}\frac{1}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant c_4 n + c_5\frac{c\nu_m^\rho n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} + c_6\frac{c\nu_m^\rho n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}, \tag{6}$$

$$S_2=\sum_{n_0<i\leqslant n-1}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant c_7\frac{n}{c\nu_m^\rho} + c_8\frac{n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} + c_9\frac{n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}. \tag{7}$$

Здесь

$$i_0 = c^{\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}}\nu_m^{\frac{\alpha\rho}{\varkappa-\alpha}},$$

$$\rho=\rho(\nu_m)=\begin{cases}1 & \text{при } \nu_m\geqslant 1,\\ \frac{1}{1+m} & \text{при } \nu_m<1.\end{cases}$$

Доказательство леммы. Если $n_0+1\leqslant\frac{3}{4}n$, тогда

$$S_1\leqslant\int_0^{i_0}\frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{n}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+$$

$$+\frac{1}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{n}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant 4^{\frac{m}{\alpha}}c_{10}(n+1)\leqslant c_4 n, \tag{8}$$

где $c_4=4^{\frac{m}{\alpha}}\cdot 2c_{10}$, а $c_{10}=\max\left(1, \frac{\alpha}{m-\alpha}\right)$.

Если $n_0+1>\frac{3}{4}\,n$, тогда

$$S_1\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{n}{\left(1-\frac{n_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{n_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{n}{\lambda^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+$$

$$+\frac{1}{\lambda^{\frac{m}{\alpha}}}=\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{c\nu_m^{\rho}\,n}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\,\lambda^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+\frac{n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}\cdot n}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant c_5\,\frac{c\nu_m^{\rho}\,n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+c_6\,\frac{c\nu_m^{\rho}\,n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}},\qquad (9)$$

где $c_5=\frac{\alpha}{m-\alpha}\cdot 4^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}$, $c_6=4^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}$. Из (8) и (9) следует (6).

Так как $S_2=0$ при $i_0\geqslant n-1$ мы можем ограничиться случаем $i_0<n-1$. Итак,

$$S_2=S_{21}+S_{22},$$

где

$$S_{21}=\sum_{i_0<i\leqslant\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}},$$

$$S_{22}=\sum_{\frac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-1}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

При $i_0<\frac{1}{2}\,(n-1)$ (иначе S_{21} пусто) имеем

$$S_{21}\leqslant I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int_{i_0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{dx}{x^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}},$$

$$I_2=\frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{i_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}},$$

$$I_3=\frac{2^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{(n-1)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\lambda\right]^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Имеем:

$$I_1\leqslant\frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\int_{i_0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{n}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\lambda\right]^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{2^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}\,n}{c\nu_m^{\rho}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}\leqslant\frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{4^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}\,n}{c\nu_m^{\rho}}.$$

Если $i_0+1 \leqslant \frac{3}{4}n$, тогда

$$I_2 \leqslant \frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{m}{\alpha}}}{c\nu_m^{\rho}}.$$

Если же $i_0+1 > \frac{3}{4}n$, тогда

$$I_2 \leqslant \frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{m}{\alpha}}} = \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Далее

$$I_3 \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{m}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{m}{\alpha}}n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Наконец,

$$S_{22} \leqslant \frac{2^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{(n-1)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \sum_{\frac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-1} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \int_{\frac{1}{2}(n-1)}^{n-1} \frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha}}} + \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{m}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}n}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} + \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} =$$

$$= \frac{\alpha}{m-\alpha}\,\frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} + \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Обозначив

$$c_7 = \left(4+\frac{\alpha}{m-\alpha}\right)\cdot 4^{\frac{m-\alpha}{\alpha}},$$

$$c_8 = \frac{\alpha}{m-\alpha}\cdot 4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}},$$

$$c_9 = (2^{\frac{m}{\alpha}}+2)\cdot 4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}},$$

мы получим (7). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Следуя [1], пишем тождество

$$[F_n(x)-G_\alpha(x,\ 1)] * G_\alpha(x,\ \lambda) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} V_i(x) + nV_0(x)\right] * \left[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x) - G_\alpha\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right],$$

где

$$V_0(x)=G_\alpha^{n-1}\left(x,\ \frac{1}{n}\right)*G_\alpha(x,\ \lambda),$$

$$V_i(x)=\left[F^i(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G_\alpha^i\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right]*G_\alpha^{n-i-1}\left(x,\ \frac{1}{n}\right)*G_\alpha(x,\ \lambda)$$

для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Применим метод математической индукции. Покажем справедливость теоремы при $n=1$, а именно, докажем неравенство

$$R_1=\sup_x|F(x)-G_\alpha(x,\ 1)|\leqslant c\nu_m^\rho. \tag{10}$$

Оно требует доказательства лишь при $\nu_m<1$. Ввиду (1) разложение $G_\alpha(x,\ \lambda)$ в ряд Тейлора и применение (4) дает

$$\sup_x|G_\alpha(x,\ \lambda)*[F_1(x)-G_\alpha(x,\ 1)]|\leqslant\frac{\nu_m}{m!}\ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\ \lambda^{-\frac{m}{\alpha}}.$$

Поэтому, применив (3), имеем

$$R_1\leqslant c_2\ \frac{\nu_m}{m!}\ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\ \lambda^{-\frac{m}{\alpha}}+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}=c_{11}\nu_m\lambda^{-\frac{m}{\alpha}}+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{11}$$

Выбрав $\lambda^{\frac{1}{\alpha}}=c_{12}\nu_m^{\frac{1}{1+m}}$, получаем

$$R_1\leqslant(c_{11}c_{12}^{-m}+c_3c_{12})\,\nu_m^{\frac{1}{1+m}}\leqslant c\nu_m^{\frac{1}{1+m}}$$

для всех $c\geqslant c_{11}c_{12}^{-m}+c_3c_{12}$. Случай $n=1$ этим доказан.

Предположим, что (2) верно для всех $i\leqslant n-1$, т.е.

$$R_i\leqslant\frac{c\nu_m^\rho}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}},\qquad 1\leqslant i\leqslant n-1, \tag{12}$$

и покажем, что оно верно и для $i=n$.

Разлагая $V_i(x)$ в ряд Тейлора, ввиду (1), получаем

$$\sup_x\left|V_i(x)*\left[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G_\alpha\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right]\right|\leqslant\frac{\nu_m}{m!}\ n^{-\frac{m}{\alpha}}\sup_x\left|\frac{d^mV_i(x)}{dx^m}\right|. \tag{13}$$

Далее,

$$V_i(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[F^i(n^{\frac{1}{\alpha}}y)-G_\alpha^i\left(y,\ \frac{1}{n}\right)\right]dG_\alpha\left(x-y,\ \frac{n-i-1}{n}+\lambda\right). \tag{14}$$

Поэтому, ввиду (5),

$$\sup_x\left|\frac{d^mV_i(x)}{dx^m}\right|\leqslant\frac{c_1R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}$$

и

$$\sup_x\left|V_i(x)*\left[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G_\alpha\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right]\right|\leqslant\frac{c_{13}\nu_mR_i}{n^{\frac{m}{\alpha}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}, \tag{15}$$

где обозначили $c_{13}=\frac{c_1}{m!}$. Легко получить также

$$n\sup_x\left|V_0(x)*\left[F(n^{\frac{1}{\alpha}}x)-G_\alpha\left(x,\frac{1}{n}\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant n\frac{\nu_m}{m!}n^{-\frac{m}{\alpha}}\frac{c_1}{\left(\frac{n-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant c_{14}\frac{\nu_m}{n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}\tag{16}$$

при $n\geqslant 2$, где $c_{14}=\frac{2^{\frac{m}{\alpha}}c_1}{m!}$. Поэтому

$$R_n\leqslant\frac{c_2c_{13}\nu_m}{n^{\frac{m}{\alpha}}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}+c_2c_{14}\frac{\nu_m}{n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}}+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}.\tag{17}$$

Выберем

$$\lambda^{\frac{1}{\alpha}}=c_{15}\frac{\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}.\tag{18}$$

Утверждение теоремы

$$R_n\leqslant\frac{c\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}=\frac{c}{c_{15}}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$$

нетривиально лишь тогда, когда $\frac{c}{c_{15}}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}<1$, т.е. при

$$\lambda<\left(\frac{c_{15}}{c}\right)^\alpha.\tag{19}$$

В дальнейшем мы будем выбирать константы c_{15} и c такими, чтобы соблюдалось условие $\lambda<\frac{1}{2}$, при котором доказана наша лемма. Ясно, что основную трудность составляет оценка первого из трех слагаемых в (17).

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n_0}\frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}+\sum_{n_0<i\leqslant n-1}\frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant n_0}\frac{1}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}+c\nu_m^\rho\sum_{n_0<i\leqslant n-1}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Как видно, в первой из этих сумм мы воспользовались тривиальной оценкой $R_i\leqslant 1$, а во второй – индукционной предпосылкой (12). Для оценки этих сумм привлечем нашу лемму. В обозначениях этой леммы имеем

$$R_n\leqslant\frac{c\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{c_2c_{13}\nu_m^{1-\rho}}{cn^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}S_1+\frac{c_2c_{13}\nu_m}{n^{\frac{m-(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}S_2+\frac{c_2c_{14}\nu_m^{1-\rho}}{cn^{\frac{m-\varkappa}{\alpha}}}\right]+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ввиду (6) и (7), получаем

$$R_n \leqslant \frac{c\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \left\{ \frac{c_2[c_{13}(c_4+c_7)+c_{14}]\nu_m^{1-\rho}}{cn^{\frac{m-\varkappa}{\alpha}}} + \frac{c_2c_{13}(c_5+c_8)\nu_m}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_2c_{13}(c_6+c_9)\nu_m}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} + \frac{c_3c_{15}}{c} \right\}. \tag{20}$$

В дальнейшем можем считать, что

$$\frac{c\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} < 1, \tag{21}$$

так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Но тогда, принимая во внимание (18), имеем

$$\nu_m^{1-\rho} \leqslant 1, \tag{22}$$

$$\frac{\nu_m}{(n\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} = \frac{\nu_m^{1-\rho m}}{c_{15}^m n^{\frac{m}{\alpha}(1+\alpha-\varkappa)}} \leqslant \frac{1}{c_{15}^m}, \tag{23}$$

$$\frac{\nu_m}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} = \frac{\nu_m^{\frac{\alpha+1}{m+1}}}{c_{15}^{m-\alpha} n^{\frac{m-\alpha}{\alpha}(1+\alpha-\varkappa)}} \leqslant \frac{1}{c_{15}^{m-\alpha}} \tag{24}$$

при $\nu_m < 1$ и

$$\frac{\nu_m}{(n\lambda)^{\frac{m-\alpha}{\alpha}}} = \frac{1}{c_{15}^{m-\alpha}\nu_m^{m-\varkappa} n^{\frac{m-\varkappa}{\alpha}(1+\alpha-\varkappa)}} \left(\frac{\nu_m}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \right)^{1+\alpha-\varkappa} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c_{15}^{m-\alpha}c^{1+\alpha-\varkappa}} \tag{25}$$

при $\nu_m \geqslant 1$.

Из неравенств (22)—(25) следует, что, выбирая c_{15} и c достаточно большими, можно сделать выражение в фигурных скобках формулы (20) меньшим единицы. Но тогда

$$R_n \leqslant \frac{c\nu_m^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}},$$

т.е. утверждение теоремы верно при $i=n$, причем константа c одна и та же для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда по методу математической индукции заключаем, что утверждение нашей теоремы верно для всех n.

В заключение заметим, что доказанная теорема обобщает на случай устойчивого предельного закона один результат В. Паулаускаса [2].

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
23.IV.1971

Литература

1. А. Миталаускас, Оценка остаточного члена в интегральной предельной теореме в случае сходимости к устойчивому закону, Liet. matem. rink., **XI**, 3 (1971), 627—639.
2. В. Паулаускас, Одна теорема о скорости сходимости в центральной предельной теореме, Liet. matem. rink., **XI**, 1 (1971), 173—179.

VIENA TEOREMA APIE KONVERGAVIMO Į STABILŲ DĖSNĮ GREITĮ

A. Mitalauskas

(*Reziumė*)

Darbe gautas autoriaus ankstesnio rezultato [1] apie liekamojo nario įvertinimą integralinėje ribinėje teoremoje stabilaus ribinio dėsnio atveju apibendrinimas.

A THEOREM ON THE RATE OF CONVERGENCE TO THE STABLE LAW

A. Mitalauskas

(*Summary*)

The paper presents a generalization of the previous result obtained by the author [1] concerning the estimate of the remainder term in the integral limit theorem in the case of the stable limit distribution law.