XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1972

УДК 519.21

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ С БОЛЬШИМИ УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Э. Мисевичюс

Рассматривается однородная цепь Маркова $\{\xi_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ с пространством возможных состояний $(\Omega,\ \mathcal{F})$, переходной вероятностной функцией $P(\omega,\ A)$, $\omega\in\Omega$, $A\in\mathcal{F}$ и стационарным распределением $P(A)$, $A\in\mathcal{F}$.

Пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots\ X_n$$

случайные величины, связанные в цепь Маркова $\{\xi_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, т.е. $X_k=g(\xi_k)$, где $g(\omega)$ — действительная $\mathcal{F}$-измеримая функция.

Функцию распределения случайной величины $\xi$ обозначим $F_\xi$, $\Phi$ означает $(0,\ 1)$ — нормальную функцию распределения. Следуя Р. Л. Добрушину [1], в работе пользуемся коэффициентом эргодичности $\alpha$ переходной вероятностной функции $P(\omega,\ A)$,

$$\alpha=1-\sup_{\omega,\ \tilde{\omega},\ A}|P(\omega,\ A)-P(\tilde{\omega},\ A)|.$$

У нас везде $\alpha>0$, $DX_1<\infty$, поэтому существует

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{DS_n}{n}\ .$$

Положим

$$Z_n=\frac{S_n-an}{\sigma\sqrt{n}},\quad a=MX_1.$$

Ограниченную положительную постоянную обозначим $B$, монотонную как угодно медленно возрастающую в бесконечность функцию натурального аргумента — $\rho(n)$.

В работе использовано следующее основное условие.

**Условие** $A_\beta$. Существуют конечные положительные постоянные $a$ и $C$ и положительная постоянная $\beta$, $\beta<\frac{1}{2}$, такие что

$$\sup_{\omega}\int_{\Omega}\exp\{a\,|\,X_2(\tilde{\omega})|^{\frac{4\beta}{1+2\beta}}\}P(\omega,\ d\tilde{\omega})\leqslant C.$$

**Теорема 1.** *Если* $\alpha>0$, $\sigma>0$ *и выполнено условие* $(A_\beta)$, $0<\beta<\frac{1}{6}$, *то равномерно по* $x$,

$$0\leqslant x\leqslant\frac{n^\beta}{\rho(n)},\ n\to\infty\ ,$$

*имеют место соотношения*

$$1-F_{Z_n}(x)=\Big(1-\Phi(x)\Big)\Big(1+o(1)\Big), \tag{1}$$

$$F_{Z_n}(-x)=\Phi(-x)\Big(1+o(1)\Big). \tag{2}$$

**Теорема 2.** *Если* $\alpha>0$, $\sigma>0$ *и выполнено условие*

$$(A_\beta),\ \frac{1}{6}\leqslant\beta<\frac{1}{2},$$

*то при*

$$x\geqslant\frac{n^\beta}{\rho(n)}$$

*имеет место соотношение*

$$P\{|Z_n|>x\}\leqslant B\exp\left\{-\eta\frac{n^{2\beta}}{\rho^2(n)}\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\eta$ — некоторая ограниченная положительная постоянная. Ради простоты вычислений будем считать, что

$$MX_1=0,\ \sigma=1.$$

При доказательстве теорем используются предложенные Р. Л. Добрушиным [1] и В. А. Статулявичусом [6] прямые вероятностные и С. В. Нагаевым [4] — аналитические методы. Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты Ю. В. Линника [2] и В. В. Петрова [5].

## Доказательство теорем

При каждом $n$ введем вспомогательную $(0, n^\beta)$ нормальную случайную величину $Y_n$, независящую от случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и обозначим

$$Z'_n=\frac{S_n+Y_n}{\sqrt{n}}.$$

**Лемма 1.** *Если соотношения* (1) *и* (2) *выполняются для* $Z'_n$ *равномерно по* $x$, $1\leqslant x\leqslant n^\beta$, *то эти соотношения выполняются равномерно по* $x$ *в том же интервале и для* $Z_n$.

Доказательство леммы проводится ках и для независимых случайных величин (см. [5]).

**Лемма 2.** *Если* $\alpha>0$, $\sigma>0$ *и выполнено условие* $(A_\beta)$, $0<\beta<\frac{1}{2}$, *то для* $x_2=n^K$, $K>1+\beta$, $n\to\infty$, *справедливо соотношение*

$$P\{Z'_n>x_2\}=o(1)\Big(1-\Phi(n^\beta)\Big). \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P\left\{X_1\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}},\ X_2\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}},\ \ldots,\ X_n\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}}\right\}\times$$
$$\times P\left\{Y_n\leqslant\frac{1}{2}n^{K+\frac{1}{2}}\right\}\leqslant P\{Z'_n\leqslant x_2\}. \tag{5}$$

Обозначим

$$\gamma=\frac{4\beta}{1+2\beta},\quad 0<\beta<\frac{1}{2}.$$

Согласно условию $(A_\beta)$, $0<\beta<\frac{1}{2}$, при любом $x>0$

$$\int_x^\infty dF_{X_2}(u\mid\xi_1)\leqslant C\exp\{-x^\gamma\}.$$

Отсюда при $x(n)\to\infty$, когда $n\to\infty$,

$$F_{X_2}(x\mid\xi_1)\geqslant 1-C\exp\{-x^\gamma\}.$$

Взяв $K>\frac{1}{2}$, имеем

$$P\left\{X_1\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}},\quad X_2\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}},\ \ldots,\ X_n\leqslant\frac{1}{2}n^{K-\frac{1}{2}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(1-B\exp\left\{-\frac{1}{2\gamma}n^{\gamma\left(K-\frac{1}{2}\right)}\right\}\right)^n. \tag{6}$$

Если $0\leqslant x\leqslant o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$, то справедливо неравенство

$$(1-x)^n\geqslant 1-nx. \tag{7}$$

Имея ввиду определение $Y_n$ и неравенство (7) и подставляя оценку (6) в неравенство (5), получаем утверждение леммы.

Доказательство теорем 1 и 2. Пусть

$$x_1\in\left[1,\ \frac{n^\beta}{\rho(n)}\right]\ \text{и}\ x_2=n^K,\ K>1+\beta.$$

По формуле обращения

$$F_{Z_n'}(x_2)-F_{Z_n'}(x_1)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\sqrt{n}\,x_2t}-e^{-i\sqrt{n}\,x_1t}}{t}f_{S_n}(t)f_{Y_n}(t)\,dt.$$

Дальнейшее доказательство опирается на леммы 3 и 4 (см. [3]), а также на лемму 2, и проводится как и для независимых случайных величин (см. [5]).

Автор искренне благодарит В. А. Статулявичуса за постоянное внимание и ценные советы при выполнении этой работы.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 1.IV.1971

**Литература**

1. Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I, Теория вероят. и ее примен., **I**, вып. 1 (1965), 72–89.
2. Ю. В. Линник, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. I. III, Теория вероят. и ее примен., **VI**, вып. 2 (1961), 145–163; **VII**, вып. 2 (1962),121–134.
3. Э. Мисевичюс, Локальные теоремы с большими уклонениями для однородных цепей Маркова, Liet. matem. rink., **XI**, 3 (1971), 607–625.
4. С. В. Нагаев, Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова, Теория вероят. и ее примен., **VI**, вып. 1 (1961), 67–86.

5. В. В. Петров, Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера. II, Вестник ЛГУ, 1 (1964), 52–75.
6. В. Статулявичус, Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I. II. III, Liet. matem. rink., **IX**, 2 (1969), 346–361; **IX**, 3 (1969), 635–672; **X**, 1 (1970), 161–169.

## INTEGRALINĖS DIDELIŲ NUKRYPIMŲ HOMOGENINĖSE MARKOVO GRANDINĖSE TEOREMOS

E. Misevičius

(*Reziumė*)

Straipsnyje yra nagrinėjami atsitiktinių dydžių, surištų į homogeninę Markovo grandinę su teigiamu ergodiškumo koeficientu, atitinkamai normuotos sumos pasiskirstymo funkcijos dideli nukrypimai, kai atsitiktinio dydžio sąlyginis pasiskirstymas tenkina J. Liniko sąlygą.

## INTEGRAL THEOREMS OF DEVIATIONS FOR HOMOGENEOUS MARKOFF'S CHAINS

E. Misevičius

(*Summary*)

The present article considers random variables bound up in a homogeneous Markoff's chain having positive coefficient, large deviations of the respectively normed sum distribution functions, when the conditional distribution satisfies Linik's condition.