УДК 513

К ТЕОРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ B-ПРОСТРАНСТВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Л. Крищюнайте

В математической литературе последних лет широко рассматриваются почти комплексные многообразия. Изучаются также и так называемые почти контактные структуры, которые естественно возникают на гиперповерхностях упомянутых многообразий при надлежащем оснащении [6].

Аналогичные результаты получим, если будем исходить из почти двойного многообразия. На гиперповерхностях таких многообразий возникает аналогичная структура, которая названа почти контактной структурой гиперболического типа [4] (обычной почти контактной структуре присвоено название структуры эллиптического типа). Представляется, что результаты изучения почти контактных структур гиперболического типа могут иметь широкое приложеиие к некоторым геометрическим вопросам. Например, в настоящей статье показано, что почти контактная метрическая структура гиперболического типа II рода [3], которая индуцируется на всякой гиперповерхности почти двойного пространства с B-метрикой, позволяет рассмотреть в новом аспекте некоторые вопросы теории комплексов прямых эллиптического пространства.

В § 1 излагаются известные результаты общей теории почти контактных структур гиперболического типа, индуцируемых на гиперповерхностях почти двойных многообразий при почти контактном оснащении [3]. В § 2 рассматриваются некоторые частные случаи B-пространств гиперболического типа [3]. В частности, показано, что многообразие прямых X_4 эллиптического пространства S_3 является B-пространством гиперболического типа.

§ 3 посвящен теории гиперповерхностей некоторых B-пространств гиперболического типа. Найден класс интегрируемых почти контактных метрических гиперповерхностей гиперболического типа II рода в этих пространствах. Выяснен геометрический смысл упомянутых гиперповерхностей многообразия X_4 с точки зрения линейчатой геометрии пространства S_3. Даны примеры гиперповерхностей с нормальной почти контактной метрической структурой гиперболического типа II рода, в частности, указаны комплексы прямых в S_3, обладающие этим свойством.

1. Пусть $X_{2n}(x^i)$, $i=1, \ldots, 2n$, — почти двойное многообразие, т.е. четномерное дифференцируемое многообразие, на котором задан структурный аффинор F_i^j, удовлетворяющий условиям

$$F_i^k F_k^j = \delta_i^j,$$

$$F_i^i = 0. \qquad (1)$$

Пусть, вдобавок, на X_{2n} задан метрический тензор G_{ij}, который является B-тензором по отношению к структурному аффинору:

$$F_{ij}=F_i^k G_{kj}=F_{ji}; \tag{2}$$

пусть F_i^j — ковариантно постоянен в римановой связности, определенной B-метрикой G_{ij}:

$$\nabla_i F_j^k=0. \tag{3}$$

Тогда X_{2n} называется B-пространством гиперболического типа [5]. На гиперповерхности $x^i=x^i(y^a)$, $a=1, \ldots, 2n-1$, такого пространства возникает почти контактная метрическая структура (φ, ξ, η, g) гиперболического типа II рода [3], определяемая тензорами

$$\varphi_a^b=B_a^i F_i^j \bar{B}_j^b, \quad \xi^a=-\bar{B}_i^a F_j^i C^j,$$

$$\eta_a=B_a^i F_i^j \bar{C}_j, \quad g_{ab}=B_a^i B_b^j G_{ij}, \tag{4}$$

где $B_a^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^a}$, вектор C^i, дающий почти контактное оснащение гиперповерхности, является единичным вектором и лежит в инвариантных площадках, определяемых векторами n^i, $F_j^i n^j$ (n^i — нормальный вектор к гиперповерхности, т.е. $G_{ij} n^i B_a^j=0$), $\bar{B}_i^a$, $\bar{C}_i$ определяют корепер, дуальный реперу B_a^i, C^i.

Эти тензоры удовлетворяют условиям

$$\varphi_a^a=0, \quad \varphi_a^c \varphi_c^b=\delta_a^b+\xi^b \eta_a,$$

$$\varphi_a^c \eta_c=0, \quad \varphi_a^c \xi^a=0, \quad \xi^c \eta_c=-1,$$

$$\varphi_{ab}=\varphi_a^c g_{cb}=\varphi_{ba}, \quad g_{ab}\xi^b=-\eta_a. \tag{5}$$

Почти контактная структура называется интегрируемой, если тензор Нейенхейса аффинора φ равен 0:

$$N_{ab}^c=\varphi_b^e \partial_e \varphi_a^c-\varphi_a^e \partial_e \varphi_b^c+\varphi_e^c(\partial_a \varphi_b^e-\partial_b \varphi_a^e)=0, \tag{6}$$

и нормальной, если

$$N_{ab}^c-\xi^c(\partial_a \eta_b-\partial_b \eta_a)=0. \tag{7}$$

Условия нормальности (7) для почти контактной метрической гиперповерхности гиперболического типа II рода в B-пространстве гиперболического типа имеет вид [3]:

$$\partial_a \eta_b-\partial_b \eta_a=0, \tag{8}$$

т.е. влечет интегрируемость структуры (5).

2. Наипростейшим примером B-пространства гиперболического типа является $2n$-мерное биаффинное пространство гиперболического типа [4], в котором, кроме аффинора F_i^j

$$(F_i^j)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \tag{9}$$

задана метрика G_{ij}

$$(G_{ij})=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \tag{10}$$

E — единичная n-мерная матрица.

Такое пространство $Б_{2n}(x^i)$ называется биаффинным пространством гиперболического типа с B-метрикой. Нетрудно проверить, что для тензоров (9), (10) выполняются условия (1), (2), (3), т.е. $Б_{2n}$ является B-пространством гиперболического типа.

Отметим следующие очевидные факты. Каждая точка (x^i) пространства $Б_{2n}$ находится во взаимно однозначном соответствии с парой точек на двух абсолютных плоскостях $E_1(x^1, \ldots, x^n)$, $E_2(x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$. Эти плоскости являются евклидовыми плоскостями с метриками $ds_1^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$, $ds_2^2 = (dx^{n+1})^2 + \ldots + (dx^{2n})^2$, определенными метрикой $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ в $Б_{2n}$. Обратно, метрику (10) в $Б_{2n}$ можно получить задав в плоскостях E_1, E_2 евклидовы метрики ds_1^2, ds_2^2. При всем этом надо помнить, что движения пространства $Б_{2n}$, сохраняющие аффинорную метрическую структуру (9), (10), находятся во взаимно-однозначном соответствии с независимыми движениями в n-мерных евклидовых плоскостях E_1, E_2.

Другой пример B-пространства гиперболического типа обнаружим рассматривая многообразие прямых эллиптического трехмерного пространства $S_3(u^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Это — трехмерное проективное пространство с абсолютом $\sum_\alpha (u^\alpha)^2 = 0$.

Многообразие прямых эллиптического пространства $S_3(u^\alpha)$ является четырехмерным, так как плюккеровы координаты прямой $p^{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta - u^\beta v^\alpha$, проходящей через две сопряженные точки (u^α), (v^α), должны удовлетворять условию Плюккера и условию нормирования:

$$p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0,$$

$$(p^{22})^2 + (p^{34})^2 + (p^{13})^2 + (p^{42})^2 + (p^{14})^2 + (p^{23})^2 = 1. \qquad (11)$$

Известно [2], что многообразие прямых $\{p^{\alpha\beta}\}$ можно взаимно однозначно*) отобразить на пару точек в двух сферах S_1, S_2 евклидова трехмерного пространства E_3 при помощи формул (интерпретация Фубини):

$$\begin{aligned} &p^{12} + p^{34} = \cos x^1 \cos x^2, \qquad && p^{12} - p^{34} = \cos x^3 \cos x^4, \\ &p^{13} + p^{42} = \cos x^1 \sin x^2, && p^{13} - p^{42} = \cos x^3 \sin x^4, \\ &p^{14} + p^{23} = \sin x^1, && p^{14} - p^{23} = \sin x^3, \end{aligned} \qquad (12)$$

где x^1, x^2 — географические координаты на сфере S_1, x^3, x^4 — на S_2. Таким образом, на многообразии прямых X_4 эллиптического пространства S_3 можно ввести координаты x^1, x^2, x^3, x^4. При такой интерпретации многообразия прямых устанавливается взаимно однозначное соответствие между движениями эллиптического пространства S_3 (проективными преобразованиями, сохраняющими абсолют) и независимыми вращениями евклидовых сфер S_1, S_2 [2].

*) Если заменить пару точек на S_1, S_2 диаметрально противоположными точками, то получим ту же прямую $(-p^{\alpha\beta})$.

Это позволяет выделить в касательном пространстве каждой точки многообразия $X_4(x^1, x^2, x^3, x^4)$ две абсолютные двухмерные плоскости, инвариантные по отношению к этим движениям. Таким образом, на X_4 определяется аффинор

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

удовлетворяющий условиям (1) $(n=2)$. Кроме того, метрики $ds_1^2=(dx^1)^2+ +\cos^2 x^1 (dx^2)^2$, $ds_2^2=(dx^3)^2+\cos^2 x^3 (dx^4)^2$ на сферах S_1, S_2 позволяют ввести на X_4 метрику $ds^2=ds_1^2+ds_2^2$. Метрический тензор

$$G\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2 x^3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

вместе с аффинором F (13) удовлетворяет (2) $(n=2)$. Ненулевые скобки Кристоффеля метрики (14) равны:

$$\Gamma_{12}^2=-\operatorname{tg} x^1,\quad \Gamma_{22}^1=\cos x^1 \sin x^1,\quad \Gamma_{34}^4=-\operatorname{tg} x^3,\quad \Gamma_{44}^3=\cos x^3 \sin x^3. \tag{15}$$

Отсюда получаем, что для аффинора F (13) выполняется (3), и многообразие прямых $X_4(x', x^2, x^3, x^4)$ эллиптического пространства S_3 является B-пространством гиперболического типа.

3. Пусть $X_4(x^i)$, $i=1, 2, 3, 4,$ — пространство прямых эллиптического пространства S_3 (биаффинное пространство гиперболического типа с B-метрикой). Так как X_4 — B-пространство гиперболического типа, то на гиперповерхности

$$x^4=f(x^1, x^2, x^3) \tag{16}$$

этого пространства возникает (φ, ξ, η, g)-структура гиперболического типа II рода, определенная тензорами (4), удовлетворяющими условиям (5):

$$(\varphi_a^b)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{f_1^2\cos^2 x^1}{\lambda}, & \dfrac{-f_1 f_2}{\lambda}, & \dfrac{-f_1 f_3\cos^2 x^3}{\omega} \\ \dfrac{-f_1 f_2 \cos^2 x'}{\lambda}, & 1-\dfrac{f_2^2}{\lambda}, & \dfrac{-f_2 f_3 \cos^2 x^3}{\omega} \\ 0, & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\xi^a)=\frac{1}{\Delta}\left(-f_1\cos^2 x^1,\quad -f_2,\quad f_3\cos^2 x^3\ \frac{\lambda}{\omega}\right),$$

$$(\eta_a)=\frac{\Delta}{\lambda}\,(f_1,\ f_2,\ 0), \tag{17}$$

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix} 1+f_1^2\cos^2 x^3 & f_1 f_2\cos^2 x^3 & f_1 f_3\cos^2 x^3 \\ f_1 f_2\cos^2 x^3 & \cos^2 x^1+f_2^2\cos^2 x^3 & f_2 f_3\cos^2 x^3 \\ f_1 f_3\cos^2 x^3 & f_2 f_3\cos^2 x^3 & 1+f_3^2\cos^2 x^3 \end{pmatrix},$$

где

$$f_a=\frac{\partial f}{\partial x^a}, \quad a=1,\ 2,\ 3, \quad \lambda=f_1^2\cos^2 x^1+f_2^2, \quad \omega=1+f_3^2\cos^2 x^3,$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{\lambda}{\omega}\left(\omega\cos^2 x^1+\lambda\cos^2 x^3\right)}.$$

(Соответственно

$$(\varphi_a^b)=\begin{pmatrix} 1-\frac{f_1^2}{f_1^2+f_2^2}, & \frac{-f_1f_2}{f_1^2+f_2^2}, & \frac{-f_1f_3}{1+f_3^2} \\ \frac{-f_2f_1}{f_1^2+f_2^2}, & 1-\frac{f_2^2}{f_2^2+f_2^2}, & \frac{-f_2f_3}{1+f_3^2} \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\xi^b)=\frac{1}{\delta}\left(-f_1,\ -f_2,\ f_3\,\frac{f_1^2+f_2^2}{1+f_3^2}\right),$$

$$(\eta_a)=\frac{\delta}{f_1^2+f_2^2}(f_1,\ f_2,\ 0), \tag{17)*$$

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix} 1+f_1^2 & f_1f_2 & f_1f_3 \\ f_1f_2 & 1+f_2^2 & f_2f_3 \\ f_1f_3 & f_2f_3 & 1+f_3^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\delta=\sqrt{\frac{(f_1^2+f_2^2)\,(1+f_3^2+f_1^2+f_2^2)}{1+f_3^2}}.\Big)$$

Гиперповерхность (16) в X_4 определяет отображение, каждой точке $(x^1, x^2)\in S_1$ (E_1) относящее кривую $l_2\in S_2$ (E_2) и каждой точке $(x^3,\ x^4)\in S_2$ (E_2) относящее кривую $l_1\in S_1$ (E_1), причем, если $(x^3,\ x^4)\in l_2$, то $(x^1,\ x^2)\in l_1$, и наоборот. Любой другой точке кривой l_2 соответствует, вообще говоря, другая кривая l_1. То же самое можно сказать и о точках кривой l_1. Наконец отметим, что гиперповерхность в пространстве X_4 — это комплекс прямых эллиптического пространства S_3.

Условие интегрируемости (6) почти контактной структуры (17) ((17)*) приводит к дифференциальному уравнению

$$f_1f_{23}-f_2f_{13}=0. \tag{18}$$

Отсюда гиперповерхность (16) имеет вид

$$f=F\left(A(x^1,\ x^2),\ x^3\right). \tag{19}$$

Это равносильно тому, что x^4 находится из уравнения

$$A(x^1,\ x^2)=B(x^3,\ x^4). \tag{20}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$A(x^1,\ x^2)=c \tag{21}$$

на $S_1(E_1)$ и однопараметрическое семейство кривых

$$B(x^3,\ x^4)=c \tag{22}$$

на $S_2(E_2)$. Гиперповерхность (19) или (20) определяет соответствие между точками $(x^1, x^2)\in S_1(E_1)$ и кривыми $l_2\in S_2(E_2)$, а также между точками $(x^3, x^4)\in S_2(E_2)$ и кривыми $l_1\in S_1(E_1)$ так, что точкам кривой $A(x^1, x^2)=c_1$ на $S_1(E_1)$ соответствует та же кривая $B(x^3, x^4)=c_1$ на $S_2(E_2)$ и наоборот, точкам кривой семейства (22) соответствует одна и та же кривая семейства (21), причем соответствующие кривые отвечают одинаковым значениям параметра c.

Таким образом, самую общую гиперповерхность в X_4, имеющую интегрируемую (φ, ξ, η, g)-структуру, можно получить следующим путем: берем произвольное однопараметрическое семейство кривых (21) в $S_1(E_1)$ и произвольное семейство кривых (22) в $S_2(E_2)$. Устанавливаем взаимно однозначное непрерывное соответствие между кривыми этих семейств.

Пусть даны кривые $l_1\in S_1$, $l_2\in S_2$. Определим двухмерную поверхность в X_4, так чтобы произвольная точка этой поверхности (x^1, x^2, x^3, x^4) определялась парой произвольных точек $(x^1, x^2)\in l_1$ и $(x^3, x^4)\in l_2$. Получим конгруэнцию прямых пространства S_3, которая является конгруэнцией нормалей к поверхности нулевой гауссовой кривизны [1]. Частный случай таких конгруэнций — конгруэнция перпендикуляров к одной прямой (прямые конгруэнции нормальны к семейству коаксиальных клиффордовых поверхностей) [1]. Отсюда следует теорема.

Теорема. *Для того, чтобы комплекс прямых эллиптического пространства S_3 имел интегрируемую (φ, ξ, η, g)-структуру гиперболического типа II рода, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде однопараметрического семейства конгруэнций нормалей к поверхностям нулевой гауссовой кривизны.*

Рассмотрим нормальные почти контактные метрические гиперповерхности (16) в пространстве X_4. Условие (8) с учетом (17) $\left((17)^*\right)$ приводит к уравнению (18) и к системе следующих дифференциальных уравнений

$$f_{12}(f_1^2\cos^2 x^1-f_2^2)+f_1f_2(f_{22}-f_{11}\cos^2 x^1)-f_2^3\operatorname{tg} x^1=0, \tag{23}$$

$$\partial_3\left(\frac{f_1^2\cos^2 x^3}{1+f_3^2\cos^2 x^3}\right)=0$$

$$\left(\begin{array}{l} f_{12}(f_1^2-f_2^2)+f_1f_2(f_{22}-f_{11})=0, \\ \partial_3\left(\dfrac{f_1^2}{1+f_3^2}\right)=0\end{array}\right). \tag{23*}$$

Первое из этих уравнений в силу (18) приводит к следующему требованию для функции $A=A(x^1, x^2)$ (20):

$$A_{12}(A_1^2\cos^2 x^1-A_2^2)+A_1A_2(A_{22}-A_{11}\cos^2 x^1)-A_2^3\operatorname{tg} x^1=0, \quad A_1=\frac{\partial A}{\partial x^1},$$

$$A_2=\frac{\partial A}{\partial x^2} \tag{24}$$

$$\left(A_{12}(A_1^2-A_2^2)+A_1A_2(A_{22}-A_{11})=0\right). \tag{24*}$$

Второе приводит к такому же уравнению для функции $B=B(x^3, x^4)$:

$$B_{34}(B_3^2\cos^2 x^3-B_4^2)+B_3B_4(B_{44}-B_{33}\cos^2 x^3)-B_4^3\operatorname{tg}x^3=0,\qquad B_3=\frac{\partial B}{\partial x^3},$$

$$B_4=\frac{\partial B}{\partial x^4}\tag{25}$$

$$\left(B_{34}(B_3^2-B_4^2)+B_3B_4(B_{44}-B_{33})=0\right).\tag{25)*}$$

Отсюда следует, что для нормальности (φ, ξ, η, g)-структуры (17) $\left((17)^*\right)$ необходимо и достаточно, чтобы эта структура была интегрируемой, а семейства кривых (21), (22) находились из уравнений (24), (25) $\left((24)^*\ (25)^*\right)$, причем соответствие между кривыми этих семейств можно брать произвольно.

Существуют интегрируемые, но не нормальные (φ, ξ, η, g)-структуры (17) $\left((17)^*\right)$ в пространстве X_4. Например, этим свойством обладает структура на однопараметрическом семействе конгруэнций нормалей к прямым. Этот комплекс определяется кривыми (21) вида

$$\cos\psi(c)\cos\varphi(c)\cos x^1\cos x^2+\cos\psi\sin\varphi\cos x^1\sin x^2+\sin\psi\sin x^1=0$$

и кривыми (22) вида

$$\cos\sigma(c)\cos\tau(c)\cos x^3\cos x^4+\cos\sigma\sin\tau\cos x^3\sin x^4+\sin\sigma\sin x^3=0,$$

которые, вообще говоря, условиям (24), (25) $\left((24)^*, (25)^*\right)$ не удовлетворяют.

Укажем несколько примеров нормальных почти контактных метрических гиперповерхностей в пространстве X_4. Заметим, что функция

$$z=f(a\cos x\cos y+b\cos x\sin y+c\sin x)$$

$$\left(z=f[a(x^2+y^2)+bx+cy]\right)\tag{26}$$

является частным решением уравнения

$$\begin{vmatrix} z_{xy}+\operatorname{tg}x\, z_y & \cos^2 x\, z_{xx}-z_{yy}+\sin x\cos x\, z_x \\ z_x z_y & \cos^2 x\, z_x^2-z_y^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\begin{vmatrix} z_{xy} & z_{xx}-z_{yy} \\ z_x z_y & z_x^2-z_y^2\end{vmatrix}=0\right),\tag{27}$$

равносильного уравнению (24) или (25) $\left((24)^*\text{ или }(25)^*\right)$, где

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Отсюда гиперповерхноси

$$f(a\cos x^1\cos x^2+b\cos x^1\sin x^2+c\sin x^1)=\alpha\cos x^3\cos x^4+$$

$$+\beta\cos x^3\sin x^4+\gamma\sin x^3\tag{28}$$

$$\left(f\left[a\left((x^1)^2+(x^2)^2\right)+bx^1+cx^2\right]=\alpha\left((x^3)^2+(x^4)^2\right)+\beta x^3+\gamma x^4\right),\tag{28)*}$$

где a, b, c, α, β, γ — константы, имеют нормальную (φ, ξ, η, g)-структуру гиперболического типа II рода. Кривые (21), (22), соответствующие гиперповерхности (28), $\left((28)^*\right)$, являются семействами параллельных малых окружностей сфер S_1, S_2, получаемых при пересечении этих сфер с двумя однопараметрическими семействами параллельных евклидовых плоскостей пространства E_3, перпендикулярных, соответственно, радиусам векторам сфер S_1, S_2, проходящим через точки

$$\left(\underset{0}{x^1}=\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \underset{0}{x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\in S_1,$$

$$\left(\underset{0}{x^3}=\arcsin\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \underset{0}{x^4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\right)\in S_2$$

(семействами концентрических окружностей с конечным или бесконечно удаленным центром в евклидовых плоскостях E_1 и E_2).

Таким образом, чтобы задать комплекс прямых в S_3 с нормальной (φ, ξ, η, g)-структурой (17), достаточно взять две произвольные точки

$$\left(\underset{0}{x'}=\arcsin c,\quad \underset{0}{x^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\in S_1 \text{ и } \left(\underset{0}{x^3}=\arcsin\gamma,\ \underset{0}{x^4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\right)\in S_2,$$

где $a^2+b^2+c^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, и определить на S_1 и S_2 однопараметрические семейства параллельных окружностей, плоскости которых перпендикулярны радиусам векторам этих сфер, проходящим через точки $(\underset{0}{x^1}, \underset{0}{x^2})$, $(\underset{0}{x^3}, \underset{0}{x^4})$. При любом соответствии между окружностями этих семейств получим нормальную почти контактную метрическую гиперповерхность. Если это соответствие такое, что расстояния соответственных окружностей от точек пропорциональны, то получим следующую почти контактную нормальную метрическую поверхность в X_4:

$$a\cos x^1\cos x^2+b\cos x^1\sin x^2+c\sin x'=$$
$$=k(\alpha\cos x^3\cos x^4+\beta\cos x^3\sin x^4+\gamma\sin x^3),$$

где $k=\text{const}$.

В силу (12) она определяет линейный комплекс в пространстве S_3:

$$(a-k\alpha)p^{12}+(a+k\alpha)p^{34}+(b-k\beta)p^{13}+(b+k\beta)p^{42}+$$
$$+(c-k\gamma)p^{14}+(c+k\gamma)p^{23}=0.$$

Если $k=\pm1$, т.е., если соответствующие окружности одинаково удалены от точек $(\underset{0}{x^1}, \underset{0}{x^2})$, $(\underset{0}{x^3}, \underset{0}{x^4})$ или от точек $(\underset{0}{x^1}, \underset{0}{x^2})$, $(\underset{0}{x^3}+\pi, \underset{0}{x^4})$, то комплекс становится специальным линейным комплексом. Действительно, тогда и только тогда справедливо равенство

$$(a-k\alpha)\,(a+k\alpha)+(b-k\beta)\,(b+k\beta)+(c-k\gamma)\,(c+k\gamma)=$$
$$=a^2+b^2+c^2-k^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.$$

(Отметим некоторые частные случаи гиперповерхностей (28)*:

$$f(b\,x^1+c\,x^2)=\beta\,x^3+\gamma\,x^4,$$
$$(x^3)^2+(x^4)^2\pm(x^1)^2\pm(x^2)^2=1.$$

Первая гиперповерхность получится, если в евклидовых плоскостях E_1, E_2 определены семейства параллельных прямых $b\,x^1 + c\,x^2 = \text{const}$, $\beta\,x^3 + \gamma\,x^4 = \text{const}$ (окружностей с бесконечно удаленным центром), и между прямыми этих семейств' установлено произвольное взаимно однозначное непрерывное соответствие. Вторые гиперповерхности — гиперсферы пространства X_4.)

Другим частным решением уравнения (27) является функция

$$z = y - \sqrt{a-1}\ \Phi(x)$$

$$\left(z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a(x^2+y^2)-1} + \sqrt{a(x^2+y^2)-1}\right.,$$

где

$$\Phi(x) = \frac{t}{2} \ln \frac{s+t \sin x}{s-t \sin x} + r \ln(r \cos x + s), \qquad s = \sqrt{1 - r^2 \sin^2 x}, \tag{29}$$

$$r = \sqrt{\frac{a}{a-1}}, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{a-1}}, \qquad a = \text{const}.$$

Комбинируя (26), (29) и другие частные решения уравнения (27), можно получить достаточное число гиперповерхностей в X_4 с нормальной структурой (17) $\big((17)^*\big)$. Например, гиперповерхности

$$x^2 - \sqrt{a-1}\ \Phi(x^1) = f(\alpha \cos x^3 \cos x^4 + \beta \cos x^3 \sin x^4 + \gamma \sin x^3)$$

$$\Big(f[(x^1)^2 + (x^2)^2] = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^4}{x^3} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a[(x^3)^2 + (x^4)^2] - 1} +$$

$$+ \sqrt{a[(x^3)^2 + (x^4)^2] - 1}\Big)$$

обладают этим свойством.

Шяуляйский педагогический институт

Поступило в редакцию
17.IV.1971

Литература

1. Б. А. Розенфельд, Теория конгруенций и комплексов прямых в эллиптическом пространстве, ИАН, сер. мат., 5 (1941), 105–126.
2. М. С. Бродский, Конгруенции прямых эллиптического пространства, 1941.
3. А. Л. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, Уч. Зап. Казан. ун-та, **128**, 3 (1968), 55–75.
4. А. Л. Крищюнайте, Почти контактные структуры на гиперповерхностях четырехмерного центробиаффинного пространства эллиптического и гиперболического типа, Liet. matem. rink., **VII**, 3 (1967), 423–438.
5. А. П. Норден, О самосопряженных образах биаксиального пространства, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, **114**, 2 (1954).
6. Y. Tashiro, On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I, Tohoku Math. J., **15** (1963), 62–78.

KAI KURIŲ HIPERBOLINIO TIPO *B*-ERDVIŲ HIPERPAVIRŠIŲ TEORIJOS KLAUSIMU

A. Kriščiūnaitė

(*Reziumė*)

Nagrinėjamos hiperbolinio tipo II rūšies beveik kontaktinės metrinės struktūros [3] kai kurių hiperbolinio tipo *B*-erdvių hiperpaviršiuose. Nustatyta integruojamų beveik kontaktinių metrinių hiperpaviršių klasė elipsinės erdvės S_3 tiesių daugdaroje X_4 ir hiperbolinio tipo biafininėje erdvėje su *B*-metrika $Б_4$. Nurodyti normalinių beveik kontaktinių metrinių hiperpaviršių pavyzdžiai. Išaiškinta minėtų daugdaros X_4 hiperpaviršių geometrinė prasmė erdvės S_3 tiesinės geometrijos požiūriu.

ON THE THEORY OF HYPERSURFACES IN SOME *B*-SPACES OF HYPERBOLIC TYPE

A. Kriščiūnaitė

(*Summary*)

Almost contact metric structures of hyperbolic type [3] in hypersurfaces of some *B*-spaces (hyperbolic type) are considered. A class of integrable and some examples of norma l almost contact metric hypersurfaces in manifold of lines of elliptic space S_3 and in hyperbolic biaffined space with *B*-metric have been found.