XII LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1972

УДК 513.7

РЕДУКЦИИ РАССЛОЕНИЯ $G(G/H, H)$ НАД ПОДМНОГООБРАЗИЯМИ ПРОСТРАНСТВА G/G. I

Р. В. Восилюс

В работе [1] А. Швец определяет понятие эквивалентности двух пространств со связностью и изучает метод канонизации репера для определения такой эквивалентности. Развиваемая там теория находит свое применение [2, 3, 4] при изучении геометрии подмногообразий однородных пространств вида G/H. Однако, это применение возможно лишь в том случае, если над подмногообразиями пространства G/H существуют редукции главного расслоения $G(G/H, H)$. Построению таких редукций посвящена статья [2], результаты которой относятся к однородным пространствам с линейной группой движений. В этой статье указан некоторый путь построения редукций, обеспечивающий их существование хотя бы в некоторой окрестности данной точки.

В настоящей работе приводится другое решение указанной задачи, позволяющее находить все пространства G/H, которые обладают искомой редукцией над произвольными подмногообразиями данной размерности (при условии наличия некоторого универсального способа построения таких редукций). Задача решается путем применения аппарата ,,джет-продолжений" векторных расслоений и главных расслоенных пространств с линейной группой расслоения. Построение такого аппарата изложено в первой части данной работы. Здесь же доказаны и все основные алгебраические теоремы, непосредственно применяемые в дальнейшем. Изложение ведется в бескоординатной форме теории струй.

Статья тесно соприкасается с работой [5].

1. Алгебраический аппарат

1. Пусть ξ и γ – некоторые конечномерные векторные пространства. Через γ^k обозначим k-тую декартову степень этого пространства, тогда как через

$$\Delta : \gamma \to \gamma^k$$

– их диагональное отображение.

Для каждого целого числа $k \geqslant 1$ символом

$$L_s^k(\gamma, \xi)$$

обозначим пространство k-линейных симметрических отображений

$$\gamma^k \to \xi.$$

По определению

$$L^0(\gamma, \xi)=\xi.$$

Каждому элементу

$$f\in L_s^k(\gamma, \xi)$$

соответствует отображение

$$\bar{f}:\gamma\to\xi,$$

задаваемое формулой

$$\bar{f}=f\circ\Delta.$$

Через

$$P^k(\gamma, \xi)$$

обозначим Im отображения $f\to\bar{f}$. Это пространство однородных полиномиальных отображений $\gamma\to\xi$ k-той степени. Известно, что пространства

$$L_s^k(\gamma, \xi) \text{ и } P^k(\gamma, \xi)$$

канонически изоморфны. Следовательно, мы имеем различные интерпретации одного и того же пространства.

Пусть $\mathrm{Hom}\,\xi$ означает пространство всех эндоморфизмов, а $GL(\xi)$ — пространство всех невырожденных эндоморфизмов пространства ξ.

2. Для каждого целого числа $k\geqslant 1$ определим пространство

$$GL^k(\gamma\xi)=GL(\gamma)\oplus GL(\xi)\bigoplus_{l=2}^{k}L_s^l(\gamma, \gamma)\oplus$$

$$\bigoplus_{l=1}^{k}L_s^l(\gamma, \mathrm{Hom}\,\xi).$$

Если в этой формуле $k=1$, то слагаемое

$$\bigoplus_{l=2}^{k}L_s^l(\gamma, \gamma)$$

отсутствует.

Для $k=0$ положим

$$GL^0(\gamma, \xi)=GL(\xi).$$

Пусть

$$a\in GL^k(\gamma, \xi).$$

Элемент a однозначно определяется своими проекциями $\bar{a}_\gamma$ и $\bar{a}_\xi$ на подпространства

$$GL(\gamma)\bigoplus_{l=2}^{k}L_s^l(\gamma, \gamma)$$

и

$$GL(\xi)\bigoplus_{l=1}^{k}L_s^l(\gamma, \mathrm{Hom}\,\xi),$$

соответственно. Так как эти подпространства изоморфны пространствам

$$GL(\gamma)\bigoplus_{l=2}^{k}P^l(\gamma, \gamma)$$

и

$$GL(\xi)\bigoplus_{l=1}^{k}P^l(\gamma, \mathrm{Hom}\,\xi),$$

то проекции $\bar{a}_\gamma$ и $\bar{a}_\xi$ определяют некоторые неоднородные полиномиальные отображения

$$a_\gamma : \gamma \to \gamma, \quad a_\xi : \gamma \to \mathrm{Hom}\, \xi.$$

В силу указанного изоморфизма, соответствие $a \leftrightarrow (a_\gamma, a_\xi)$ взаимно-однозначное.

Легко видеть, что касательное отображение к a_γ в нулевой точке пространства γ совпадает с действием проекции элемента a на слагаемое $GL(\gamma)$. Следовательно, a_γ задает диффеоморфизм

$$a_\gamma : U \to V$$

окрестностей нуля пространства γ, тогда как a_ξ нулевую точку этого пространства переводит в элемент группы $GL(\xi)$.

С другой стороны, если нам задан диффеоморфизм (в дальнейшем будут рассматриваться дифференцируемые отображения, только принадлежащие классу C^∞)

$$f : U \to V$$

и отображение

$$\varphi : U \to \mathrm{Hom}\, \xi,$$

относительно которых нулевая точка неподвижна в первом случае и отображается в элемент группы $GL(\xi)$ во втором, то отображения

$$j_0^k f : \gamma \to \gamma,$$

$$j_0^k \varphi : \gamma \to \mathrm{Hom}\, \xi,$$

где $j_0^k(\cdot)$ — струя k-того порядка, взятая в нулевой точке, являются полиномиальными отображениями, позволяющими однозначно восстановить элемент пространства $GL^k(\gamma, \xi)$. Значит, каждый элемент пространства $GL^k(\gamma, \xi)$ можно представить в виде пары

$$a = (j_0^k f_a, j_0^k \varphi_a),$$

где

$$f_a : U \to V$$

— некоторый диффеоморфизм окрестностей нуля пространства γ такой, что

$$f_a(0) = 0$$

и

$$\varphi_a : U \to \mathrm{Hom}\, \xi$$

— дифференцируемое отображение, подчиненное условию

$$\varphi_a(0) \in GL(\xi).$$

Пусть

$$b = (j_0^k f_b, j_0^k \varphi_b)$$

— некоторый другой элемент пространства $GL^k(\gamma, \xi)$, задаваемый отображениями

$$f_b : Z \to W, \quad \varphi_b : Z \to \mathrm{Hom}\, \xi.$$

Заменяя окрестности Z и V их пересечением, всегда можем считать, что пара $(a,\ b)$ задается диаграммой следующего вида:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi_a} & \mathrm{Hom}\,\xi \\ & \searrow^{f_a} & \uparrow{\scriptstyle\varphi_b} \\ & & V \xrightarrow{f_b} W. \end{array}$$

Для пары окрестностей U, V можно построить диффеоморфизм

$$f_b \circ f_a : U \to W$$

и дифференцируемое отображение

$$\Big((\varphi_b \circ f_a)(\cdot)\Big)\Big(\varphi_a(\cdot)\Big) : U \to \mathrm{Hom}\,\xi$$

такие, что

$$(f_b \circ f_a)(0) = 0,$$

$$\Big((\varphi_b \circ f_a)(0)\Big)\Big(\varphi_a(0)\Big) \in GL(\xi).$$

Это показывает, что пара

$$\left(j_0^k (f_b \circ f_a),\ j_0^k \Big((\varphi_b \circ f_a)(\cdot)\Big)\Big(\varphi_a(\cdot)\Big)\right)$$

задает элемент пространства $GL^k(\gamma,\ \xi)$. Мы получаем отображение

$$S^k : GL^k(\gamma,\ \xi) \times GL^k(\gamma,\ \xi) \to GL^k(\gamma,\ \xi).$$

Теорема 1. *Отображение S^k определяет структуру группы в пространстве $GL^k(\gamma,\ \xi)$.*

Доказательство. Формулой

$$b \cdot a = S^k(a,\ b) = \left(j_0^k (f_b \circ f_a),\ j_0^k \Big((\varphi_b \circ f_a)(\cdot)\Big)\Big(\varphi_a(\cdot)\Big)\right)$$

определим произведение в пространстве $GL^k(\gamma,\ \xi)$.

Пусть

$$1 : V \to V$$

является тождественным диффеоморфизмом и

$$l : V \to \mathrm{Hom}\,\xi$$

постоянным отображением, отображающим окрестность U в тождественное преобразование пространства ξ.

Легко проверить, что элемент

$$E = (j_0^k 1,\ j_0^k l)$$

является единицей рассматриваемого произведения.

Элемент, обратный данному элементу

$$a = (j_0^k f_a,\ j_0^k \varphi_a)$$

можно представить в виде

$$a^{-1} = \left(j_0^k f_a^{-1},\ j_0^k (\varphi_a \circ f_a^{-1})^{-1}\right),$$

если через

$$(\varphi_a \circ f_a^{-1})^{-1}$$

обозначить элемент пространства $\mathrm{Hom}\,\xi$, обратный к

$$\varphi_a \circ f_a^{-1}.$$

В силу условия

$$(\varphi_a \circ f_a^{-1})(0) \in GL(\xi)$$

такой элемент всегда существует, если только окрестность V достаточно мала.

Наконец, ассоциативность умножения легко усматривается из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[dr, "f_a"'] & \mathrm{Hom}\,\xi & & \\
& V \arrow[u, dashed, "\varphi_b"] \arrow[r, "f_b"] & W \arrow[ul, "\varphi_c"'] \arrow[r, "f_c"] & Z.
\end{tikzcd}$$

Теорема доказана.

3. Каждому целому числу $k \geqslant 0$ сопоставим векторное пространство

$$D^k(\gamma,\ \xi) = \bigoplus_{l=0}^{k} L_s^l(\gamma,\ \xi).$$

Пусть

$$v \in D^k(\gamma,\ \xi).$$

Отождествив пространства

$$L_s^k(\gamma,\ \xi) \text{ и } P^k(\gamma,\ \xi)$$

мы получим индуцированное элементом v полиномиальное отображение

$$v_\xi : \gamma \to \xi,$$

позволяющее представлять его в виде

$$v = j_0^k \psi_v,$$

где

$$\psi_v : U \to \xi$$

— некоторое отображение, определенное в окрестности U нуля пространства γ.

Пару

$$a \in GL^k(\gamma,\ \xi),\ v \in D^k(\gamma,\ \xi)$$

можно представлять диаграммой вида

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f_a"] \arrow[d, "\psi_v"'] \arrow[dr, "\varphi_a"] & V \\
\xi & \mathrm{Hom}\,\xi.
\end{tikzcd}$$

Так как f_a является диффеоморфизмом, то имеет смысл отображение

$$\left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) : V \to \xi.$$

Поэтому,

$$j_0^k \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)$$

задает элемент пространства $D^k(\gamma, \xi)$, который обозначим через $\rho^k(a)(v)$. При фиксированном элементе a символ $\rho^k(a)$ означает некоторое преобразование

$$\rho^k(a): D^k(\gamma, \xi) \to D^k(\gamma, \xi).$$

Теорема 2. ρ^k является линейным представлением группы $GL^k(\gamma, \xi)$.

Доказательство. Легко видеть, что преобразование $\rho^k(a)$ линейно. Действительно, пусть

$$v_1, \ v_2 \in D^k(\gamma, \xi)$$

представлены полиномиальными отображениями

$$(v_1)_\xi: \gamma \to \xi, \ (v_2)_\xi: \gamma \to \xi.$$

Тогда

$$(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)_\xi = \lambda^1 (v_1)_\xi + \lambda^2 (v_2)_\xi$$

и, следовательно,

$$\left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left(\left((\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)_\xi \circ f_a^{-1}\right)(\cdot)\right) =$$

$$= \lambda^1 \left(\left(\varphi_a \circ f_a^{-1}(\cdot)\right)\left((v_1)_\xi \circ f_a^{-1}\right)(\cdot)\right) +$$

$$+ \lambda^2 \left(\left(\varphi_a \circ f_a^{-1}(\cdot)\right)\left((v_2)_\xi \circ f_a^{-1}\right)(\cdot)\right).$$

В силу линейности операции j^k отсюда следует, что

$$\rho^k(a) \in \operatorname{Hom} D^{k^\circ}(\gamma, \xi).$$

Если E является единицей группы $GL^k(\gamma, \xi)$, то, как мы видели,

$$E = (j_0^k 1, \ j_0^k I).$$

Поэтому

$$\rho^k(E)(v) = j_0^k \left((I \circ 1)(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ 1)(\cdot)\right) = j_0^k \psi_v(\cdot) = v.$$

Пусть элементы

$$a, \ b \in GL^k(\gamma, \xi), \ v \in D^k(\gamma, \xi)$$

представлены диаграммой

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "\psi_v"'] \arrow[dr, "f_a"] & \operatorname{Hom} \xi & \\
\xi & V \arrow[u, "\varphi_b"'] \arrow[r, "f_b"] & W.
\end{tikzcd}$$

Тогда соотношение

$$\rho^k(b \cdot a) = \rho^k(b) \cdot \rho^k(a)$$

следует из легко проверяемого равенства

$$\left(\left((\varphi_b \circ f_a)(\cdot)\right)\left(\varphi_a(\cdot)\right) \circ f_a^{-1} \circ f_b^{-1}\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1} \circ f_b^{-1})(\cdot)\right) =$$

$$= \left(\left((\varphi_b \circ f_b^{-1})(\cdot)\right)\left(\left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\right) \circ f_b^{-1}(\cdot)\right).$$

Это значит, что

$$\rho^k \left(GL^k(\gamma,\ \xi)\right) \subset GL \left(D^k(\gamma,\ \xi)\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. $\operatorname{Ker}\rho^k$ *тривиально.*

Доказательство. Мы должны доказать, что равенство

$$j_0^k \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) = j_0^k \psi_v(\cdot) \tag{1}$$

при любом выборе отображения ψ_v выполняется тогда и только тогда, если

$$j_0^k f_a = j_0^k 1,\ j_0^k \varphi_a = j_0^k l. \tag{2}$$

Этот результат будем доказывать при помощи математической индукции.

Допустим, что для любого отображения ψ_v справедливо равенство

$$j_0^1 \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) = i_0^1 \psi_v(\cdot).$$

Оно эквивалентно следующим двум соотношениям:

$$\varphi_a(0)\left(\psi_v(0)\right) = \psi_v(0)$$

$$d\left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \Big|_0 = d\psi_v(\cdot)\Big|_0. \tag{3}$$

В силу произвольности $\psi_v(0)$ первое из этих равенств означает, что

$$\varphi_a(0) = 1.$$

Пусть ψ_v — постоянное отображение. Вместе с условием (3) это значит, что при любом выборе вектора $x \in \gamma$ имеет место такое равенство:

$$\left(d\varphi_a \big|_0 \left(df_a^{-1}\big|_0(x)\right)\right)\left(\psi_v(0)\right) = 0.$$

Однако, $\psi_v(0)$ — произвольный вектор. Поэтому,

$$d\varphi_a\big|_0 \circ df_a^{-1}\big|_0 = 0.$$

Так как

$$df_a^{-1}\big|_0 \in GL(\gamma),$$

то

$$d\varphi_a\big|_0 = 0$$

и, в силу условия (4),

$$j_0^1 \varphi_a = j_0^1 l.$$

Доказанное равенство позволяет в условии (3) отображение φ_a заменить отображением l. Это приводит к такому условию:

$$d(\psi_v \circ f_a^{-1})\big|_0 = d\psi_v\big|_0.$$

Значит,

$$df_a\big|_0 = 1,$$

что вместе с равенством

$$f(0) = 0$$

дает требуемый результат:

$$j_0^1 f_a = j_0^1 1.$$

При $k=1$ теорема верна.

Допустим, что теорема верна для всех k, не превосходящих $l-1$. Докажем, что тогда она справедлива и для $k=l$.

Пусть отображения f_a и φ_a при любом выборе отображения ψ_v удовлетворяют равенству

$$j_0^l\left((\varphi_a\circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v\circ f_a^{-1})(\cdot)\right)=j_0^l\psi_v(\cdot). \tag{5}$$

В силу принятых соглашений отсюда следуют равенства

$$j_0^{l-1}f_a=j_0^{l-1}1,\ j_0^{l-1}\varphi_a=j_0^{l-1}l, \tag{6}$$

которые позволяют условие (5) написать в виде

$$d^l\left((\varphi_a\circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v\circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\Big|_0=d^l\psi_v(\cdot)\Big|_0 \tag{7}$$

(здесь, как и во всех подобных случаях, мы пользуемся изоморфностью пространств $L_s^l(\gamma,\ \xi)$ и $P^l(\gamma,\ \xi)$).

Допустим, что ψ_v является постоянным отображением. Тогда условие (7) показывает, что при произвольном выборе векторов $w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_l\in\gamma$ имеет место тождество

$$d^l\varphi_a|_0\left(df_a^{-1}|_0(w_1),\ df_a^{-1}|_0(w_2),\ \dots,\ df_a^{-1}|_0(w_l)\right)\left(\psi_v(0)\right)=0.$$

Значит,

$$d^l\varphi_a|_0=0$$

и, в виду условий (6),

$$j_0^l\varphi_a=j_0^l l.$$

Это позволяет нам в равенстве (7) отображение φ_a заменить отображением l, что дает равенство вида

$$d^l(\psi_v\circ f_a^{-1})|_0=d^l\psi_v|_0.$$

При имеющихся условиях оно равносильно тому, что соотношение (получаемое при помощи формулы Лейбница)

$$d^l\psi_v\left(df_a^{-1}|_0(w_1),\ df_a^{-1}|_0(w_2),\ \dots,\ df_a^{-1}|_0(w_l)\right)+$$
$$+d\psi_v|_0\left(d^lf_a^{-1}|_0(w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_l)\right)=d^l\psi_v|_0(w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_l)$$

должно выполняться для произвольных наборов $w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_l$ векторов пространства γ. Однако,

$$df_a^{-1}|_0=1,$$

поэтому, на самом деле, должно выполняться условие

$$d\psi_v|_0\left(d^lf_a^{-1}|_0(w_1,\ w_2,\ \dots,\ w_l)\right)=0,$$

в силу произвольности $d\psi_v|_0$ означающее, что

$$d^lf_a^{-1}|_0=0. \tag{8}$$

Равенства (6) показывают, что элемент

$$(j_0^{l-1}f_a,\ j_0^{l-1}\varphi_a)$$

является единицей группы $GL^{l-1}(\gamma, \xi)$. Равный ему обратный элемент задается в виде пары

$$\left(j_0^{l-1} f_a^{-1}, j_0^{l-1} (\varphi_a \circ f_a^{-1})^{-1}\right).$$

Значит,

$$j_0^{l-1} f_a^{-1} = j_0^{l-1} 1,$$

что, вместе с условием (8), приводит к равенству

$$j_0^l f_a^{-1} = j_0^l 1.$$

Это, как мы видели, равносильно условию

$$j_0^l f_a = j_0^l 1.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Группа $GL^k(\gamma, \xi)$ является подгруппой группы*

$$GL\left(D^k(\gamma, \xi)\right).$$

4. Изучим более подробно пространство $D^k(\gamma, \xi)$. С этой целью, для каждого целого числа $0 \leqslant p \leqslant k$ определим пространства

$$T_p^k(\gamma, \xi) = \bigoplus_{l=k}^{k+p} L_s^l(\gamma, \xi).$$

Эти пространства образуют флаг подпространств

$$T^k(\gamma, \xi) : T_0^k(\gamma, \xi) \subset T_1^k(\gamma, \xi) \subset \ldots \subset T_k^k(\gamma, \xi) = D^k(\gamma, \xi)$$

пространства $D^k(\gamma, \xi)$.

Теорема 4. *Флаг $T^k(\gamma, \xi)$ инвариантен относительно группы $GL^k(\gamma, \xi)$.*

Доказательство. Элемент

$$v = j_0^k \psi_v$$

пространства $D^k(\gamma, \xi)$ тогда и только тогда лежит в подпространстве $T_l^k(\gamma, \xi)$, если

$$j_0^l \psi_v = 0.$$

Фиксируем элемент

$$a = (j_0^k f_a, j_0^k \varphi_a)$$

группы $GL^k(\gamma, \xi)$. Как мы знаем,

$$\rho^k(a)(v) = j_0^k \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right).$$

Элемент a группы $GL^k(\gamma, \xi)$ имеет „проекцию“ $\tilde{a}$ в группу $GL^l(\gamma, \xi)$, задаваемую формулой

$$\tilde{a} = (j_0^l f_a, j_0^l \varphi_a).$$

Если

$$j_0^l \psi_v = 0,$$

то равенство

$$j_0^l \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right)\left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) = 0,$$

равносильное включению

$$\rho^k(a)(v) \in T_l^k(\gamma, \xi),$$

означает лишь то, что нулевой вектор

$$j_l^0(\psi_v) \in D^l(\gamma, \xi)$$

инвариантен относительно $\rho^l(\tilde{a})$. Это и доказывает теорему.

Пространство

$$T_0^k(\gamma, \xi) = L_s^k(\gamma, \xi)$$

изоморфно тензорному произведению $\xi \otimes S^k(\gamma)$, где через $S^k(\gamma)$ обозначена k-тая симметрическая тензорная степень пространства γ.

Пусть σ^k означает тензорное представление группы

$$GL(\gamma) \times GL(\xi)$$

в пространстве $\xi \otimes S^k \gamma$. В силу теоремы 4, в этом пространстве действует и группа $GL^k(\gamma, \xi)$. Индуцированное действие обозначим через ρ_0^k.

Каждый элемент пространства $GL^k(\gamma, \xi)$ обладает натуральной проекцией $\tilde{\pi}^k$ в группу

$$GL(\gamma) \times GL(\xi),$$

очевидно являющейся гомоморфизмом групп. Через

$$\pi^k : GL^k(\gamma, \xi) \to GL(\gamma) \times GL(\xi)$$

обозначим некоторый другой гомоморфизм, построенный следующим образом: если

$$\tilde{\pi}^k(a) = (a|_{GL(\gamma)}, \ a|_{GL(\xi)}),$$

то

$$\pi^k(a) = \left((a|_{GL(\gamma)})^{-1}, \ a|_{GL(\xi)}\right).$$

Теорема 5. $\rho_0^k = \sigma^k \circ \pi^k$.

Доказательство. Элемент

$$v = j_0^k \psi_v \in D^k(\gamma, \xi)$$

тогда и только тогда принадлежит подпространству $\xi \otimes S^k(\gamma)$, если

$$j_0^{k-1} \psi_v = 0.$$

Так как подпространство $\xi \otimes S^k(\gamma)$ инвариантно относительно группы $GL^k(\gamma, \xi)$, то

$$\rho_0^k(a)(v) = d^k \left((\varphi_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \left((\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \Big|_0 \circ \Delta$$

где, как и раньше,

$$\Delta : \gamma \to \gamma^k$$

диагональное отображение.

При помощи формулы Лейбница это можно записать следующим образом:

$$\rho_0^k(a)(v) = \sum_{l=0}^{k} \binom{l}{k} \left(d^{k-l}(\varphi_a \circ f_a^{-1}(\cdot)\Big|_0\right) \left(d^l(\psi_v \circ f_a^{-1})(\cdot)\right) \Big|_0 \circ \Delta.$$

Однако,

$$d^l(\psi_v \circ f_a^{-1})|_0 = 0,$$

если $l \neq k$. Значит,

$$\rho_0^k(a)(v) = \left(\varphi_a(0)\right) \left(d^k(\psi_v \circ f_a^{-1})\Big|_0\right) \circ \Delta.$$

Так как

$$\rho_0^k(a)(v) \in \xi \otimes S^k(\gamma)$$

то, пользуясь изоморфизмом пространств $L_s^k(\gamma, \xi)$ и $P^k(\gamma, \xi)$, мы можем с помощью этого элемента определить k-линейное отображение $\gamma^k \to \xi$. Это показывает, что для произвольного набора векторов $w_1, w_2, \ldots, w_k \in \gamma$ имеет место равенство

$$\left(\rho_0^k(a)(v)\right)(w_1, w_2, \ldots, w_k) =$$

$$= \left(\varphi_a(0)\right)\left(d^k \psi_v \Big|_0 \left(df_a^{-1}\Big|_0(w_1), df_a^{-1}\Big|_0(w_2), \ldots, df_a^{-}\Big|_0(w_k)\right)\right).$$

Для окончательного доказательства теоремы остается лишь заметить, что

$$\varphi_a(0) = a|_{GL(\xi)}, \quad df_a^{-1}|_0 = (a|_{GL(\gamma)})^{-1},$$
$$d^k \psi_v|_0 = v \in \xi \otimes S^k(\gamma).$$

5. Рассмотрим группу $GL^k(\gamma, \xi)$. Легко видеть, что ее элементы, задаваемые парами вида

$$(j_0^k f_a, j_0^k l)$$

образуют подгруппу, не зависящую от выбора пространства ξ. Это k-тая дифференциальная группа $DL^k(\gamma)$ пространства γ.

Теорема 6. *Каждая группа $GL^k(\gamma, \gamma)$ содержит подгруппу, изоморфную с группой $DL^{k+1}(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть элемент

$$a = (j_0^{k+1} f_a, j_0^{k+1} l)$$

принадлежит группе $DL^{k+1}(\gamma)$. Так как отображение

$$f_a : U \to V$$

является диффеоморфизмом, то пара

$$(j_0^k f_a, j_0^k df_a)$$

задает элемент группы $GL^k(\gamma, \gamma)$, который мы обозначим через $\tau^{k+1}(a)$. Тем самым определено отображение

$$\tau^{k+1} : DL^{k+1}(\gamma) \to GL^k(\gamma, \gamma).$$

Докажем, что τ^{k+1} является изоморфизмом.

Пусть

$$b = (j_0^{k+1} f_b, j_0^{k+1} l) \in DL^{k+1}(\gamma),$$

где

$$f_b : V \to W$$

некоторый другой диффеоморфизм. Тогда

$$\tau^{k+1}(b) = (j_0^k f_b, j_0^k df_b)$$

и, следовательно,

$$\tau^{k+1}(b) \cdot \tau^{k+1}(a) =$$

$$= \left(j_0^k(f_b \circ f_a), j_0^k \left((df_b \circ f_a)(\cdot)\right)\left((df_a(\cdot)\right)\right).$$

Пользуясь легко проверяемым равенством

$$\Big((df_b \circ f_a)(\cdot)\Big)\Big(df_a(\cdot)\Big) = d(f_b \circ f_a)(\cdot),$$

получаем:

$$\tau^{k+1}(b)\,\tau^{k+1}(a) = \Big(j_0^k(f_b \circ f_a),\ j_0^k d(f_b \circ f_a)\Big).$$

С другой стороны:

$$b \cdot a = (j_0^{k+1}(f_b \circ f_a),\ j_0^{k+1} l).$$

Значит,

$$\tau^{k+1}(b \cdot a) = \tau^{k+1}(b) \cdot \tau^{k+1}(a),$$

и отображение τ^{k+1} является гомоморфизмом групп.

Осталось доказать, что $\operatorname{Ker} \tau^{k+1}$ тривиально.

Пусть

$$a = (j_0^{k+1} f_a,\ j_0^{k+1} l) \in \operatorname{Ker} \tau^{k+1}.$$

Это значит, что

$$(j_0^k f_a,\ j_0^k df_a) = (j_0^k 1,\ j_0^k l),$$

откуда следуют равенства

$$j_0^k f_a = j_0^k 1,\ j_0^k df_a = j_0^k l.$$

Нам достаточно доказать равенство

$$j_0^{k+1} f_a = j_0^{k+1} 1.$$

Для этого мы воспользуемся формулой

$$j_0^{k+1} f = f(0) \dotplus j_0^k df,$$

которая справедлива для любого отображения

$$f: U \to V.$$

С учетом вышестоящих равенств, это дает:

$$j_0^{k+1} f_a = j_0^k df_a = j_0^k l.$$

Остается лишь заметить, что

$$j_0^k l = j_0^{k+1} 1.$$

Теорема доказана.

6. Пусть

$$U,\ V \subseteq R^m,\ W,\ Z \subseteq R^{n-m}$$

— некоторые окрестности нуля соответствующих пространств.

Мы будем рассматривать такие диффеоморфизмы

$$f: U \times W \to V \times Z,$$

для которых

$$f(U,\ 0) \subseteq V \times \{0\},\ f(0,\ 0) = 0.$$

Теорема 7. *Элементы вида*

$$(j_0^k f,\ j_0^k df)$$

образуют подгруппу группы $DL^{k+1}(R^n,\ R^n)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что композиция рассматриваемых диффеоморфизмов и обратный диффеоморфизм имеют такой же вид.

В дальнейшем группы $DL^k(R^n, R^n)$ будем обозначать через $DL^k(n)$, определенные выше подгруппы — через $DL^k_m(n)$.

Теорема 8. *Группа $DL^k_m(n)$ содержит подгруппу, изоморфную с $DL^k(m)$.*

Доказательство. Чтобы получить изоморфное вложение

$$DL^k(m)\to DL^k_m(n),$$

достаточно каждому элементу группы $DL^k(m)$, задаваемому посредством диффеоморфизма

$$\varphi: U\to V,$$

сопоставить элемент группы $DL^k_m(n)$, задаваемый диффеоморфизмом

$$\varphi\times 1: U\times R^{n-m}\to W\times R^{n-m}.$$

Следствие 2. *Если $m<n$, то группа $DL^k(n)$ содержит подгруппу, изоморфную с $DL^k(m)$.*

7. В дальнейшем пространства $D^k(R^n, R^n)$ будем обозначать через $D^k(n)$.

Пусть, как и раньше, $m<n$. Мы знаем, что пространство $D^k(m)$ задается при помощи отображений вида

$$\psi: U\to V.$$

Каждому такому отображению сопоставим отображение

$$\psi\times 0: U\to R^{n-m}\to V\times R^{n-m}.$$

Это позволяет получить изоморфное вложение

$$D^k(m)\to D^k(n).$$

Мы будем просто говорить, что $D^k(m)$ является подпространством в $D^k(n)$.

В пространстве $D^k(n)$ определим подпространство $D^k_m(n)$, порожденное k-струями тех отображений

$$\psi_v: U\times W\to V\times Z,$$

для которых

$$j^k_0\psi_v(R^m)\subset R^m,$$

если R^m рассматривать как подпространство в R^n вида $R^m\times\{0\}$.

Теорема 9. *Подпространство $D^k_m(n)$ содержит $D^k(m)$ и инвариантно относительно группы $DL^{k-1}_m(n)$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь факт инвариантности относительно группы $DL^{k+1}_m(n)$.

Если диффеоморфизм

$$f_a: U\times W\to V\times Z$$

удовлетворяет условие

$$f_a(U, 0)\subseteq V\times\{0\},\ f(0, 0)=0,$$

то

$$(j^k_0 f_a)(R^m)\subset R^m. \tag{9}$$

Включение (9) и характеризует элементы группы $DL^{k+1}_m(n)$.

Если

$$\psi_v: U\times W\to V\times Z$$

отображение вида $\psi \times 0$, то

$$(j_0^k \psi_v)(R^n) \subset R^m.$$

Это определяет подпространство $D_m^k(n)$.

Пусть

$$F(\cdot) = \Big((df_a \circ f_a^{-1})(\cdot)\Big)\Big((\psi_v \circ f_a^{-1}(\cdot)\Big).$$

Тогда, как мы знаем,

$$\rho^k(a)(v) = j_0^k F.$$

Легко видеть, что

$$dF|_0(w) = d^2 f_a|_0 \Big(df_a^{-1}|_0(w),\ \psi_v(0)\Big) +$$

$$+ df_a|_0 \Big((d\psi_v|_0 \circ df_a^{-1}|_0)(w)\Big)$$

для каждого вектора $w \in R^n$. Значит,

$$dF|_0(w) \in R^m,$$

если $w \in R^m$ и подпространство $D_m^1(R^n)$ инвариантно относительно группы $DL_m^2(n)$.

Сейчас допустим, что подпространства $D_m^{l-1}(n)$ инвариантны относительно групп $DL_m^l(n)$ для всех $l \leqslant k$. Докажем, что тогда $D_m^k(n)$ тоже $DL_m^{k+1}(n)$ — инвариантно.

В силу принятых условий, нам надо доказать лишь то, что

$$d^k F|_0(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_k) \in R^m$$

для произвольного набора векторов $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_k$ пространства R^m. Однако

$$d^k F|_0 = \sum_l \binom{l}{k} \Big(d^l(df_a \circ f_a^{-1})|_0\Big)\Big(d^{k-l}(\psi_v \circ f_a^{-1})|_0\Big)$$

и, в виду условия (9), это всегда выполнено.

Теорема 10. Группа $DL_m^{k+1}(n)$ является максимальной подгруппой группы $DL^{k+1}(n)$, относительно которой пространство $D_m^k(n)$ инвариантно.

Доказательство. Пусть

$$a = (j_0^k f_a,\ j_0^k df_a)$$

— любой элемент группы $DL^{k+1}(n)$, относительно которого подпространство $D_m^k(n)$ неподвижно. Надо доказать, что

$$a \in DL_m^{k+1}(n),$$

т. е. что

$$j_0^k f_a(R^m) \subset R^m.$$

Мы докажем равносильное утверждение, что

$$d^l f_a|_0(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_l) \in R^m$$

для всех $0 \leqslant l \leqslant n$ и для всех l-наборов $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_l$ векторов пространства R^m.

Так как пространство $D_m^k(n)$ является a-инвариантным, то

$$\Big(j_0^k F(\cdot)\Big)(R^m) \subset R^m.$$

Пользуясь изоморфизмом пространств $L_s^l(R^n, R^n)$ и $P^l(R^n, R^n)$, отсюда легко получить, что

$$d^l F|_0(w_1, w_2, \ldots, w_l) \in R^m$$

для всех l-наборов $w_1, w_2, \ldots, w_l$ векторов пространства R^m. Так как

$$F(0) = df_a|_0\left(\psi_v(0)\right) \in R^m,$$

то, в силу произвола $\psi_v(0)$,

$$df_a|_0(R^m) \subset R^m.$$

Пусть выполнены включения

$$d^2 f_a|_0(R^m) \subset R^m, \quad \ldots, \quad d^{l-1} f_a|_0(R^m) \subset R^m.$$

Нам остается доказать, что

$$d^l f_a|_0(R^m) \subset R^m.$$

Но для этого достаточно лишь заметить, что

$$d^{l-1} F|_0(w_1, w_2, \ldots, w_{l-1}) =$$
$$= d^l f_a|_0\left(df_a^{-1}(w_1), df_a^{-1}|_0(w_2), \ldots, df_a^{-1}|_0(w_{l-1}), \psi_v(0)\right) + \ldots,$$

где пропущенные члены уже не содержат

$$d^l f_a|_0.$$

Вильнюсский Государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
15.III.1971

Литература

1. A. Švec, Cartans method of specialization of frames, Czech. Math. J., **16** (99) (1966), 552–599
2. A. Švec, Inner geometry of submanifolds of homogeneous spaces, Czech. Math. J., **17** (92) (1967), 460–466.
3. A. Švec, Deformation of surfaces in homogeneous 3-spaces, Czech. Math. J., **18** (93) (1968), 137–143.
4. A. Švec, Submanifolds of Klein Spaces, Czech. Math. J., **19** (94) (1969), 492–499.
5. Л. Е. Евтушик, Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы, Труды геометрического семинара, 2, Москва, 1969, 119–150.
6. Ю. Г. Лумисте, Связности в однородных расслоениях, Математический сборник, 69, 111: 3, Москва, 1966, 434–469.

IŠSLUOKSNIAVIMO $G\,(G/H,\ H)$ REDUKCIJOS VIRŠ ERDVĖS G/H PODAUGDARIŲ. I

R. Vosylius

(*Reziumė*)

Ryšium su A. Šveco darbais [1, 2, 3, 4], su džet-pratęsimų aparato pagalba nurodomas būdas, kaip konstruoti išsluoksniavimo $G\,(G/H,\ H)$ redukcijas virš erdvės G/H podaugdarių.

REDUCTION OF FIBRE BUNDLE $G\,(G/C,\ H)$ OVER SUBMANIFOLDS OF SPACE G/H. I

R. Vosylius

(*Summary*)

In connection with A. Švec's papers [1, 2, 3, 4] by means of the jet-prolongation apparatus is given the way for reduction of the principle fibre bundle $G\,(G/H,\ H)$ over submanifolds of the homogeneous space G/H.