1972

УДК 519.24

ОБ ОШИБКЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Р. Бенткус

§ 1. Обозначения, определения

Пусть $X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,r}}$, где время t может быть как дискретное, $t=0, \pm 1, \ldots$, так и непрерывное, $-\infty<t<\infty$, – стационарный в широком смысле измеримый случайный процесс. Пусть, далее, $X_k(t)\in R^1$, и $\mathbf{E}X(t)\equiv 0$. Через $m_{k_1\ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n)$ обозначим момент n-ого порядка,

$$m_{k_1\ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n)=\mathbf{E}X_{k_1}(t_1)\ \ldots\ X_{k_n}(t_n),$$

а через $c_{k_1\ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n)$ – семиинвариант n-ого порядка,

$$c_{k_1\ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n)=\sum(-1)^{q-1}(q-1)!\ m_{\nu_1}(t_{\nu_1})\ldots m_{\nu_q}(t_{\nu_q}),$$

где суммирование ведется по всем неупорядоченным разбиениям $\nu_1, \ldots, \nu_q$, $q=\overline{1, n}$, множества $\{1, \ldots, n\}$, а

$$m_{\nu_j}(t_{\nu_j})=m_{k_{j_1}\ldots k_{j_l}}(t_{j_1}, \ldots, t_{j_l}),\ \text{если}\ \nu_j=\{j_1, \ldots, j_l\}\subset\{1, \ldots, n\}.$$

Мы будем предполагать, что спектральная функция (с. ф.) $F_{k_1k_2}(\lambda)$ абсолютно непрерывна. Тогда в рассматриваемом случае

$$m_{k_1k_2}(t, 0)=c_{k_1k_2}(t, 0)=\int e^{it\lambda}\,dF_{k_1k_2}(\lambda)=\int f_{k_1k_2}(\lambda)\,e^{it\lambda}\,d\lambda. \tag{1.1}$$

Здесь и далее для удобства опускаются пределы интегрирования. Все интегралы с опущенными пределами нужно брать от $-\pi$ до π в случае дискретного времени t и от $-\infty$ до ∞ в случае непрерывного времени t. Иногда мы будем предполагать, что существует спектральная плотность (с. п.) третьего порядка $f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, определяемая из равенства

$$c_{k_1k_2k_3k_4}(t_1, t_2, t_3, 0)=$$
$$=\int\int\int f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\exp\left\{i\sum_1^3 t_j\lambda_j\right\}d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3. \tag{1.2}$$

Функцию $f_{k_1k_2}(\lambda)$ мы будем называть с. п. первого порядка или просто с. п. В случае дискретного времени t, с целью получить более простые записи, все рассматриваемые функции, в том числе и с. п., считаются периодичными с периодом 2π по каждому аргументу.

В качестве оценки, построенной по выборке $\{X(t),\ 0 \leqslant t < T\}$ объема T, для a priori неизвестной с. ф. $F_{k_1 k_2}(\lambda)$ применяется интеграл

$$\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda,$$

где

$$I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi T} \sum\limits_{s_1=0}^{T-1} e^{-is_1\lambda} X_{k_1}(s_1) \sum\limits_{s_2=0}^{T-1} e^{is_2\lambda} X_{k_2}(s_2) \text{ в случае дискретного } t, \\ \dfrac{1}{2\pi T} \int\limits_0^T e^{-is_1\lambda} X_{k_1}(s_1)\, ds_1 \int\limits_0^T e^{is_2\lambda} X_{k_2}(s_2)\, ds_2 \text{ в случае непрерывного } t, \end{cases}$$

а $\varphi(\lambda)$ — некоторая ограниченная функция. В данной статье рассматривается асимптотическое поведение при $T \to \infty$ первых двух моментов от случайных величин

$$\xi_{k_1 k_2}^{(T)}(\varphi) = \sqrt{T} \left[\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda - \mathbf{E} \int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda \right]$$

и

$$\zeta_{k_1 k_2}^{(T)}(\varphi) = \sqrt{T} \left[\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi(\lambda)\, f_{k_1 k_2}(\lambda)\, d\lambda \right].$$

В доказательствах мы постоянно будем пользоваться формулами

$$\sum_{s=0}^{T-1} e^{is\alpha} = \frac{e^{iT\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1} = \frac{\sin \frac{T\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\, e^{i\frac{T-1}{2}\alpha} \tag{1.3}$$

и

$$\int_0^T e^{is\alpha}\, ds = \frac{e^{iT\alpha}-1}{i\alpha} = \frac{\sin \frac{T\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\, e^{i\frac{T}{2}\alpha}. \tag{1.4}$$

Буквой M обозначается константа, необязательно всюду одна и та же.

§ 2. Формулировка результатов

Всюду ниже предполагаетса, что случайный процесс $X(t)$ измеримый и стационарный в широком смысле, $\mathbf{E}X(t) \equiv 0$, а время t, если нет явных оговорок, может быть как дискретное, так и непрерывное. Все интегралы с опущенными пределами, нужно брать от $-\pi$ до π, в случае дискретного t, и от $-\infty$ до $+\infty$, в случае непрерывного t.

Теорема 2.1. *Пусть функция $\varphi(\lambda)$ ограничена, $|\varphi(\lambda)| \leqslant M < \infty$, а случайный процесс $X(t)$ такой, что для фиксированного набора (k_1, k_2), $1 \leqslant k_j \leqslant r$, существует с. п. $f_{k_1 k_2}(\lambda)$. Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E} \int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda = \int \varphi(\lambda) f_{k_1 k_2}(\lambda)\, d\lambda.$$

Теорема 2.2. *Пусть случайный процесс $X(t)$ такой, что для фиксированного набора (k_1, k_2) существует с. п. $f_{k_1 k_2}(\lambda)$, для которой*

$$G_{k_1 k_2}(p) = \left(\int |f_{k_1 k_2}(\lambda)|^p\, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть, далее, функция $\varphi(\lambda)$ *имеет ограниченную вариацию, и* $\int |\varphi(\lambda)|\,d\lambda < \infty$. *Тогда*

1) *для* $1 < p \leqslant 2$

$$\left|\mathbf{E}\int \varphi(\lambda)\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi(\lambda)\, f_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\operatorname{Var}\varphi}{T^{1-1/p}} \cdot \varepsilon_T \leqslant C_1\, \frac{G_{k_1k_2}(p)\cdot \operatorname{Var}\varphi}{T^{1-1/p}},$$

где $\varepsilon_T \to 0$ *при* $T\to\infty$ *и не зависит от* φ;

2) *для* $p > 2$

$$\left|\mathbf{E}\int \varphi(\lambda)\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi(\lambda)\, f_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda\right| \leqslant C_2\, \frac{G_{k_1k_2}(p)\cdot \operatorname{Var}\varphi}{T^{1-1/p}};$$

3) *для* $|f_{k_1k_2}(\lambda)| \leqslant M < \infty$

$$\left|\mathbf{E}\int \varphi(\lambda)\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi(\lambda)\, f_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda\right| \leqslant C_3 \cdot M\, \frac{\operatorname{Var}\varphi \cdot \ln T}{T}.$$

Здесь C_1, C_2 *и* C_3 — *константы, не зависящие от* φ *и* $f_{k_1k_2}$.

Из теоремы 2.2 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 2.1. *Пусть* $\int |f_{k_1k_2}(\lambda)|^2\, d\lambda < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{\varphi} \sqrt{T}\left|\mathbf{E}\int \varphi(\lambda)\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda - \int \varphi(\lambda)\, f_{k_1k_2}(\lambda)\, d\lambda\right| \to 0 \text{ при } T\to\infty, \tag{2.1}$$

где sup *берется по всем функциям* φ, *для которых* $\operatorname{Var}\varphi \leqslant M < \infty$ *и* $\int |\varphi(\lambda)|\, d\lambda < \infty$.

Теорема 2.3. *Пусть случайный процесс* $X(t)$ *такой, что для фиксированного набора* (k_1, k_2, k_3, k_4), $1 \leqslant k_j \leqslant r$, *выполняются условия*:

1) *с. п.* $f_{k_1k_4}$, $f_{k_2k_3}$, $f_{k_1k_3}$ *и* $f_{k_2k_4}$ *существуют, и их модули интегрируемы с квадратом*;

2) $\mathbf{E}\,|X_{k_j}(t)|^4 < \infty$, $j=\overline{1,4}$, *и для всех* t_j *и* t $m_{k_1k_2k_3k_4}(t+t_1, \ldots, t+t_4) = m_{k_1k_2k_3k_4}(t_1, \ldots, t_4)$;

3) *с. п. третьего порядка* $f_{k_1k_2k_3k_4}$ *существует*,

$$\sup_h \iint |f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha,\ h-\alpha,\ \beta)|\, d\alpha\, d\beta < \infty, \tag{2.2}$$

и

$$\lim_{h\to 0} \iint |f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha,\ h-\alpha,\ \beta) - f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)|\, d\alpha\, d\beta = 0, \tag{2.3}$$

где sup *в* (2.2) *берется по* $-\pi \leqslant h \leqslant \pi$, *в случае дискретного времени, и по* $-\infty < h < \infty$, *в случае непрерывного времени. Тогда для любых ограниченных функций* φ_1 *и* φ_2, $|\varphi_j(\lambda)| \leqslant M < \infty$, *имеем*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1k_2}(\varphi_1)\, \xi^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2) = 2\pi \iint \varphi_1(\alpha)\, \varphi_2(\beta)\, f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+\, 2\pi \int \varphi_1(\alpha)\, \varphi_2(\alpha)\, f_{k_1k_4}(\alpha)\, f_{k_2k_3}(-\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\, 2\pi \int \varphi_1(\alpha)\, \varphi_2(-\alpha)\, f_{k_1k_3}(\alpha)\, f_{k_2k_4}(-\alpha)\, d\alpha. \tag{2.4}$$

Так как $\overline{\xi^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)} = \xi^{(T)}_{k_4 k_3}(\bar{\varphi}_2)$, то из теоремы 2.3 вытекает следствие.

Следствие 2.2. *При нужным образом измененных условиях теоремы 2.3 имеем*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \overline{\xi^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)} =$$

$$= 2\pi \int\int \varphi_1(\alpha)\, \overline{\varphi_2(\beta)}\, f_{k_1 k_2 k_4 k_3}(\alpha, -\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta +$$

$$+ 2\pi \int \varphi_1(\alpha)\, \overline{\varphi_2(\alpha)}\, f_{k_1 k_3}(\alpha)\, f_{k_2 k_4}(-\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ 2\pi \int \varphi_1(\alpha)\, \overline{\varphi_2(-\alpha)}\, f_{k_1 k_4}(\alpha)\, f_{k_2 k_3}(-\alpha)\, d\alpha. \tag{2.5}$$

Теорема 2.4. *Пусть имеют место условия теоремы* 2.2, *и пусть дополнительно существуют с. п.* $f_{k_1 k_3}$ *и* $f_{k_2 k_4}$, *модули которых также интегрируемы с квадратом. Пусть, далее, вариация функции* φ *ограничена и* $\int |\varphi(\lambda)|\, d\lambda < \infty$. *Тогда* $\lim\limits_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \zeta^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)$ *равняется правой стороне равенства* (2.4).

Если вместо условий теоремы 2.3 *выполнены условия следствия* 2.2, *то* $\lim\limits_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \overline{\zeta^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)}$ *равняется правой стороне равенства* (2.5).

В случае дискретного времени условие абсолютной интегрируемости функции $\varphi(\lambda)$ в теоремах 2.2, 2.4 и следствии 2.1 следует опустить, так как оно заведомо выполнено, если $\mathrm{Var}\, \varphi < \infty$.

Если время t дискретное, а случайный процесс $X(t)$ линейный, то при некоторых дополнительных условиях с. п. третьего порядка существует, и $f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\alpha, -\alpha, \beta)$ можно выразить через с. п. первого порядка. Поэтому пределы (2.4) и (2.5) можно упростить. Линейной последовательностью мы называем случайный процесс $X(t)$, представимый в виде

$$X(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a(s-t)\, \eta(s),$$

где

$$a(s) = \{a_k(s)\}_{k=\overline{1,r}}, \quad a_k(s) \in R^1, \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_k^2(s) < \infty,$$

а $\eta(s)$, $s = 0, \pm 1, \ldots,$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что $\mathbf{E}\,\eta(0) = 0$, $\mathbf{E}\,\eta^2(0) = 1$. На самом деле, из теорем 2.3, 2.4 и следствия 2.2 вытекает

Следствие 2.3. *Пусть случайная последовательность* $X(t)$ *линейная,* $\mathbf{E}\,\eta^4(0) < \infty$ *и с. п.* f_{kk}, $k = \overline{1, r}$ (*с. п. первого порядка для линейных процессов всегда существуют*) *интегрируемы с квадратом на* $[-\pi, \pi]$. *Тогда для любых ограниченных функций*

$$\varphi_1 \quad и \quad \varphi_2, \quad |\varphi_j(\lambda)| \leqslant M < \infty,$$

и для любого набора

$$(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad 1 \leqslant k_j \leqslant r,$$

имеем

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \xi^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2) =$$

$$= (\mathbf{E}\,\eta^4(0)-3) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha) f_{k_1 k_2}(\alpha)\, d\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(\beta) f_{k_3 k_4}(\beta)\, d\beta +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha) f_{k_1 k_4}(\alpha) f_{k_2 k_3}(-\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(-\alpha) f_{k_1 k_3}(\alpha) f_{k_2 k_4}(-\alpha)\, d\alpha. \tag{2.6}$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \overline{\xi^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)} =$$

$$= (\mathbf{E}\,\eta^4(0)-3) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha) f_{k_1 k_2}(\alpha)\, d\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\varphi_2(\beta) f_{k_3 k_4}(\beta)}\, d\beta +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\alpha)} f_{k_1 k_3}(\alpha) f_{k_2 k_4}(-\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(-\alpha)} f_{k_1 k_4}(\alpha) f_{k_2 k_3}(-\alpha)\, d\alpha. \tag{2.7}$$

Если кроме того

$$\operatorname{Var} \varphi_j < \infty, \quad \text{\textit{то}} \quad \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \zeta^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)$$

также равняется правой стороне (2.6), *и*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \overline{\zeta^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)}$$

равняется правой стороне (2.7).

Приведенные выше теоремы являются дальнейшим развитием некоторых результатов работ И. А. Ибрагимова [1] и Д. Р. Бриллингера [5]. Теоремы 2.1 и 2.2 в случае $k_1=k_2=1$ доказаны И. А. Ибрагимовым [1]. И. А. Ибрагимов [1] доказал и теорему 2.3, но при дополнительных условиях, что случайный процесс $X(t)$ гауссовский (тогда $f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv 0$), $k_1=k_2=k_3=k_4=1$, и функции φ_1 и φ_2 не имеют разрывов второго рода. Случай, когда $X(t)$ — одномерная линейная последовательность, рассмотрен И. А. Ибрагимовым и Т. М. Товстик [2]. Результаты последней работы Т. М. Товстик [3] перенесла на случай непрерывного времени.

Среди других вопросов асимптотику моментов случайной величины $\zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi)$ рассматривал Д. Р. Бриллингер [5]. В частности, им найден $\lim_{T\to\infty} \zeta^{(T)}_{k_1 k_2}(\varphi_1)\, \overline{\zeta^{(T)}_{k_3 k_4}(\varphi_2)}$ при условиях, что случайный процесс $X(t)$ стационарный в узком смысле, функции $\varphi_j(\alpha)$ — индикаторы интервалов $[0, \lambda_j]$, и при некотором дополнительном условии, накладываемом на семиинварианты. Из этого условия, в частности, следует, что с. п. $f_{k_{j_1}k_{j_2}}$ и $f_{k_1k_2k_3k_4}$ существуют, ограничены и равномерно непрерывны.

§ 3. Доказательства

Доказательство теоремы 2.1. Пусть для определенности время дискретное. Применение формул (1.1) и (1.3) дает

$$\mathbf{E}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,d\lambda\int_{-\pi}^{\pi}f_{k_1k_2}(\alpha)\,\Phi_T(\alpha-\lambda)\,d\alpha=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,d\lambda\int_{-\pi}^{\pi}f_{k_1k_2}(x+\lambda)\,\Phi_T(x)\,dx,$$

где $\Phi_T(x)=\dfrac{1}{2\pi T}\dfrac{\sin^2\frac{Tx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$ – ядро Фейера. Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,f_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,d\lambda\int_{-\pi}^{\pi}f_{k_1k_2}(\lambda)\,\Phi_T(x)\,dx,$$

то

$$\left|\mathbf{E}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)\,f_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\cdot\int_{\{|x|\leqslant\delta_0\}}\|f_x-f\|\,\Phi_T(x)\,dx+M\cdot\int_{\{|x|\leqslant\pi\}\setminus\{|x|\leqslant\delta_0\}}\|f_x-f\|\,\Phi_T(x)\,dx=$$

$$=K_1+K_2,$$

где

$$\|f_x-f\|=\int_{-\pi}^{\pi}|f_{k_1k_2}(\lambda+x)-f_{k_1k_2}(\lambda)|\,d\lambda.$$

Теперь зафиксируем $\varepsilon>0$. Так как $\sup\limits_{\{|x|\leqslant\delta\}}\|f_x-f\|\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$, то можно подобрать такое $\delta_0>0$, что

$$K_1\leqslant M\cdot\sup_{\{|x|\leqslant\delta_0\}}\|f_x-f\|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

С другой стороны

$$K_2\leqslant M\cdot 2\int_{-\pi}^{\pi}|f_{k_1k_2}(\lambda)|\,d\lambda\cdot\frac{1}{T\cdot\sin^2\frac{\delta_0}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно большом T.

В случае непрерывного времени доказательство аналогично, роль ядра $\Phi_T(x)$ играет ядро

$$\Psi_T(x)=\frac{1}{2\pi T}\,\frac{\sin^2\frac{Tx}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству соответствующей теоремы в случае $k_1=k_2=1$ (см. [1], § 1), поэтому мы его опускаем. Для доказательства теоремы 2.3 нам понадобятся ядра

$$\Phi_T(x,\ y,\ z)=\frac{1}{(2\pi)^3\,T}\,\frac{\sin\frac{Tx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\sin\frac{Ty}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\,\frac{\sin\frac{Tz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\,\frac{\sin\frac{T(x+y+z)}{2}}{\sin\frac{x+y+z}{2}} \tag{3.1}$$

и

$$\Psi_T(x,\ y,\ z)=\frac{1}{(2\pi)^3\,T}\,\frac{\sin\frac{Tx}{2}}{\frac{x}{2}}\,\frac{\sin\frac{Ty}{2}}{\frac{y}{2}}\,\frac{\sin\frac{Tz}{2}}{\frac{z}{2}}\,\frac{\sin\frac{T(x+y+z)}{2}}{\frac{x+y+z}{2}}. \tag{3.2}$$

Они являются, как это видно из приведенных ниже лемм 3.1 и 3.2, обобщением на трехмерный случай известных ядер Фейера

$$\Phi_T(x)=\frac{1}{2\pi T}\,\frac{\sin^2\frac{Tx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\ \text{ и }\ \Psi_T(x)=\frac{1}{2\pi T}\,\frac{\sin^2\frac{Tx}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Лемма 3.1. *Ядро $\Phi_T(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ обладает следующими свойствами:*

1) $$\sup_T \iiint_{-\pi}^{\pi} |\,\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3=C_1<\infty\,; \tag{3.3}$$

2) $$\iiint_{-\pi}^{\pi} \Phi_T(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3=1; \tag{3.4}$$

3) *для каждого* $\varepsilon>0$

$$\iiint_{\{|\lambda|\leqslant\pi\}\setminus\{|\lambda|\leqslant\varepsilon\}} |\,\Phi_T(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)|\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3=O\left(\frac{\ln^3 T}{T\cdot\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right), \tag{3.5}$$

здесь $\{|\lambda|\leqslant\alpha\}=\{(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3):\ |\lambda_j|\leqslant\alpha,\ j=1,\ 2,\ 3\}$.

Доказательство. Сначала докажем свойство 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\iiint\limits_{\{|\lambda|\leqslant\pi\}\setminus\{|\lambda|\leqslant\varepsilon\}} |\Phi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \leqslant \int\limits_{\{\varepsilon<|\lambda_1|\leqslant\pi\}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi_T| +$$

$$+ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{\{\varepsilon<|\lambda_2|\leqslant\pi\}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi_T| + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{\{\varepsilon<|\lambda_3|\leqslant\pi\}} |\Phi_T| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^3 T} \cdot \frac{3}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{T\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}} \right| d\lambda \right)^3 = O\left(\frac{\ln^3 T}{T \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}} \right),$$

так как

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{T\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}} \right| d\lambda \leqslant \frac{\pi}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\frac{T\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}} \right| d\lambda = \pi \int\limits_{-\frac{T\pi}{2}}^{\frac{T\pi}{2}} \left| \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right| d\alpha = O(\ln T).$$

Таким образом свойство 3 доказано.

Свойство 1 вытекает из свойства 3 и того, что

$$\iiint\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\Phi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^3 T} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \times$$

$$\times \iiint\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left| \frac{\sin\frac{T\lambda_1}{2}}{\frac{\lambda_1}{2}} \; \frac{\sin\frac{T\lambda_2}{2}}{\frac{\lambda_2}{2}} \; \frac{\sin\frac{T\lambda_3}{2}}{\frac{\lambda_3}{2}} \; \frac{\sin\frac{T(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{2}}{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2}} \right| d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 =$$

$$= \frac{\pi}{16} \iiint\limits_{-\frac{T\pi}{6}}^{\frac{T\pi}{6}} \left| \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} \; \frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2} \; \frac{\sin\alpha_3}{\alpha_3} \; \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \right| d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{16} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} \; \frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2} \; \frac{\sin\alpha_3}{\alpha_3} \; \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \right| d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 < \infty.$$

Сходимость последнего интеграла можно установить с помощью простых вычислений.

Свойство 2 легко получается, если применить к $\Phi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ формулу (1.3) и затем вычислить тройной интеграл.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Ядро* $\Psi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *обладает следующими свойствами:*

$$1)\ \sup_T \int\int\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 = C_2 < \infty; \tag{3.6}$$

$$2)\ \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 = 1; \tag{3.7}$$

3) *для каждого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{T\to\infty} \int\int\int_{R^3\setminus\{|\lambda|\leqslant\varepsilon\}} |\Psi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)|\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 = 0, \tag{3.8}$$

здесь $\{|\lambda|\leqslant\varepsilon\} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : |\lambda_j|\leqslant\varepsilon,\ j=1,\ 2,\ 3\}$.

Доказательство. Свойство 1 следует из равенства

$$\frac{1}{(2\pi)^3 T}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{T\lambda_1}{2}}{\frac{\lambda_1}{2}}\ \frac{\sin\frac{T\lambda_2}{2}}{\frac{\lambda_2}{2}}\ \frac{\sin\frac{T\lambda_3}{2}}{\frac{\lambda_3}{2}}\ \frac{\sin\frac{T(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{2}}{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2}}\right| d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\ \frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2}\ \frac{\sin\alpha_3}{\alpha_3}\ \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right| d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 = C_2 < \infty.$$

Докажем теперь свойство 2. Для каждого $\delta > 0$ имеем

$$A(T, \delta) = \frac{1}{(2\pi)^3 T}\int\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \times$$

$$\times \int\int\int\int_0^T \exp\{-it_1x_1 - it_2x_2 - it_3x_3 + it_4(x_1+x_2+x_3)\}\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, dt_4 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 T}\int\int\int\int_0^T dt_1 \ldots dt_4 \prod_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 x_j^2 + i x_j(t_4-t_j)}\, dx_j =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 T}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta}\right)^3 \int_0^T dt_4 \prod_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{T} e^{-\frac{(t_4-t_j)^2}{2\delta^2}}\, dt_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^3 T}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta}\right)^3 \int_0^T (\sqrt{2\pi}\,\delta)^3\, dt_4 = 1.$$

Так как для каждого фиксированного $T > 0$ и для почти всех $t_4 \in [0, T)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\int_0^T e^{-\frac{(t_4-t_j)^2}{2\delta^2}}\, dt_j \uparrow 1 \quad \text{при} \quad \delta\downarrow 0,$$

то $A(T, \delta)\uparrow 1$ при $\delta\downarrow 0$. С другой стороны, в силу (1.4) и (3.6), имеем

$$\lim_{\delta\to 0} A(T, \delta) = \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

что и заканчивает доказательство свойства 2.

Свойство 3 вытекает из тождества

$$\int\int\int_{R^3\setminus\{|\lambda|\leqslant\varepsilon\}} |\Psi_T(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3|\, d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 =$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int\int\int_{R^3\setminus\left\{|\alpha|\leqslant \frac{T\varepsilon}{2}\right\}} \left| \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} \frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2} \frac{\sin\alpha_3}{\alpha_3} \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right| d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3 является прямым следствием приведенных ниже лемм 3.3, 3.4 и 3.5.

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия теоремы 2.3. Тогда в случае дискретного времени имеем*

$$\mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1k_2}(\varphi_1)\, \xi^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2) = 2\pi \int\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta)\, d\alpha d\beta\, \times$$

$$\times \int\int\int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1k_2k_3k_4}(\alpha+x_1, \ -\alpha+x_2, \ \beta+x_3)\, \Phi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 +$$

$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha \int\int\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(-\alpha-x_1-x_3) f_{k_1k_3}(\alpha+x_1) f_{k_2k_4}(-\alpha+x_2)\, \times$$

$$\times \Phi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha \int\int\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(\alpha-x_2-x_3)\, \times$$

$$\times f_{k_1k_4}(\alpha+x_1) f_{k_2k_3}(-\alpha+x_2)\, \Phi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{3.9}$$

В случае непрерывного времени верна формула, аналогичная формуле (3.9), *с той разницей, что вместо ядра* $\Phi_T(x_1, x_2, x_3)$ *стоит ядро* $\Psi_T(x_1, x_2, x_3)$, *а интегралы берутся от* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Доказательство. Пусть время дискретное. Тогда

$$E^{(T)} = \mathbf{E}\, \xi^{(T)}_{k_1k_2}(\varphi_1)\, \xi^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2) =$$

$$= T\cdot \int\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta)\, [\mathbf{E}\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\alpha)\, I^{(T)}_{k_3k_4}(\beta) - \mathbf{E}\, I^{(T)}_{k_1k_2}(\alpha)\cdot \mathbf{E}\, I^{(T)}_{k_3k_4}(\beta)]\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 T} \int\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta) \sum_{\substack{s_j=0\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}^{T-1} [m_{k_1k_2k_3k_4}(s_1, s_2, s_3, s_4) - m_{k_1k_2}(s_1, s_2)\, \times$$

$$\times\, m_{k_3k_4}(s_3, s_4)]\, \exp\{-is_1\alpha + is_2\alpha - is_3\beta + is_4\beta\}\, d\alpha\, d\beta.$$

Но,

$$m_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s_1, s_2, s_3, s_4) = c_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s_1, s_2, s_3, s_4) + m_{k_1 k_2}(s_1, s_2)\, m_{k_3 k_4}(s_3, s_4) +$$
$$+ m_{k_1 k_3}(s_1, s_3)\, m_{k_2 k_4}(s_2, s_4) + m_{k_1 k_4}(s_1, s_4)\, m_{k_2 k_3}(s_2, s_3),$$

поэтому, учитывая (1.1), (1.2), (1.3) и (3.1), имеем

$$E^{(T)} = \frac{1}{4\pi^3 T} \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int \varphi_1(\alpha)\,\varphi_2(\beta) \sum_{\substack{s_j=0\\ 1\leqslant j\leqslant 0}}^{T-1} \Big[\int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int\!\!\int f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(x, y, z)\times$$
$$\times \exp\{ i(s_1-s_4)\,x + i(s_2-s_4)\,y + i(s_3-s_4)\,z \}\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1 k_3}(x) \exp\{ i(s_1-s_3)\,x \}\, dx \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_2 k_4}(y) \exp\{ i(s_2-s_4)\,y \}\, dy +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_1 k_4}(x) \exp\{ i(s_1-s_4)\,x \}\, dx \int_{-\pi}^{\pi} f_{k_2 k_3}(y) \exp\{ i(s_2-s_3)\,y \}\, dy \Big]\times$$
$$\times \exp\{ -i s_1 \alpha + i s_2 \alpha - i s_3 \beta + i s_4 \beta \}\, d\alpha\, d\beta =$$
$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int \varphi_1(\alpha)\,\varphi_2(\beta)\, d\alpha\, d\beta \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int\!\!\int f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(x, y, z)\times$$
$$\times\ \Phi_T(x-\alpha,\ y+\alpha,\ z-\beta)\, dx\, dy\, dz +$$
$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int\!\!\int \varphi_2(\beta)\, f_{k_1 k_3}(x)\, f_{k_2 k_4}(y)\ \times$$
$$\times\, \Phi_T(x-\alpha,\ y+\alpha,\ -x-\beta)\, dx\, dy\, d\beta +$$
$$+ 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int\!\!\int \varphi_2(\beta)\, f_{k_1 k_4}(x)\, f_{k_2 k_3}(y)\ \times$$
$$\times\, \Phi_T(x-\alpha,\ y+\alpha,\ -y-\beta)\, dx\, dy\, d\beta.$$

Отсюда, сделав замену переменных, получаем (3.9). Доказательство в случае непрерывного времени ничем не отличается от только что приведенного. Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$h_j = h_j^{(1)} x_1 + h_j^{(2)} x_2 + h_j^{(3)} x_3, \quad \text{где} \quad h_j^{(k)} \in R^1, \quad j = 1,\ 2,\ 3,$$

$$A(\varphi, f, g, \Phi_T) = \int_{-\pi}^{\pi}\!\!\int\!\!\int \varphi(\alpha + h_1)\, f(\alpha + h_2)\, g(\alpha + h_3)\times$$
$$\times\, \Phi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

и

$$A(\varphi, f, g, \Psi_T) = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\!\!\int \varphi(\alpha + h_1) f(\alpha + h_2)\, g(\alpha + h_3) \times$$
$$\times\ \Psi_T(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Тогда верна следующая лемма.

Лемма 3.4. *Пусть модули функций f и g интегрируемы с квадратом на $[-\pi, \pi]$, а функция φ ограничена, $|\varphi(\alpha)| \leqslant M < \infty$. Пусть, далее, f, g и φ периодичны с периодом 2π. Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\varphi, f, g, \Phi_T) - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha)| \, d\alpha = 0. \tag{3.10}$$

Если модули функций f и g интегрируемы с квадратом на R^1, а $|\varphi(\alpha)| \leqslant \leqslant M < \infty$, то

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\varphi, f, g, \Psi_T) - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha)| \, d\alpha = 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Докажем только равенство (3.10), так как равенство (3.11) доказывается аналогично. В силу (3.4) имеем

$$\varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha) = \iiint_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha) \, \Phi_T(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(\varphi, f, g, \Phi_T) - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha)| \, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \iiint_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\alpha+h_1) f(\alpha+h_2) g(\alpha+h_3) - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha)| \times$$

$$\times |\Phi_T(x_1, x_2, x_3)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iiint_{\{|x| \leqslant \delta_0\}} \| \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} - \varphi f g \| \cdot |\Phi_T| \, dx +$$

$$+ \iiint_{\{|x| \leqslant \pi\} \setminus \{|x| \leqslant \delta_0\}} \| \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} - \varphi f g \| \cdot |\Phi_T| \, dx = K_1 + K_2,$$

где

$$\| \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} - \varphi f g \| = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\alpha+h_1) f(\alpha+h_2) g(\alpha+h_3) - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha)| \, d\alpha.$$

Далее имеем

$$\| \varphi f g - \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} \| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi - \varphi_{h_1}| \cdot |fg| \, d\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_{h_2}| \cdot |\varphi_{h_1} g| \, d\alpha +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |g - g_{h_3}| \cdot |\varphi_{h_1} f_{h_2}| \, d\alpha \leqslant 2M \int_{-\pi}^{\pi} [|fg| - N(\alpha)] \, d\alpha +$$

$$+ N \cdot \| \varphi - \varphi_{h_1} \| + M \| g \|_{L_2} \cdot \| f - f_{h_2} \|_{L_2} + M \cdot \| f \|_{L_2} \cdot \| g - g_{h_3} \|_{L_2}, \tag{3.12}$$

где

$$N(\alpha) = \min\{N, |g(\alpha) f(\alpha)|\}, \quad \| g \|_{L_2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из (3.12) видно, что

$$\sup_{\{|x| \leqslant \delta\}} \| \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} - \varphi f g \| \downarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \downarrow 0,$$

поэтому, учитывая (3.3), можем подобрать такое $\delta_0 > 0$, что

$$K_1 \leqslant C_1 \cdot \sup_{\{|x| \leqslant \delta_0\}} \| \varphi_{h_1} f_{h_2} g_{h_3} - \varphi f g \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, в силу (3.5) имеем

$$K_2 \leqslant 2M \cdot \|f\|_{L_2} \|g\|_{L_2} \cdot \iiint\limits_{\{|x| \leqslant \pi\} \setminus \{|x| \leqslant \delta_0\}} \times$$

$$\times |\Phi_T(x_1, x_2, x_3)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно большом T. Лемма доказана.

Для заданной функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ введем обозначения

$$B(f, \Phi_T) = \iiint\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha + x_1, -\alpha + x_2, \beta + x_3) \Phi_T(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

$$B(f, \Psi_T) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha + x_1, -\alpha + x_2, \beta + x_3) \Psi_T(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3.$$

Тогда верна такая лемма.

Лемма 3.5. *Пусть для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ выполнены условия:*

1) $f(x_1, x_2, x_3)$ *периодична с периодом 2π по каждому аргументу;*

2) $$\iiint\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x_1, x_2, x_2)| \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 < \infty; \quad (3.13)$$

3) $$\sup_{-\pi \leqslant h \leqslant \pi} \iint\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha, h - \alpha, \beta)| \, d\alpha d\beta = C_3 < \infty; \quad (3.14)$$

4) $$\lim_{h \to 0} \iint\limits_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha, h - \alpha, \beta) - f(\alpha, -\alpha, \beta)| \, d\alpha \, d\beta = 0. \quad (3.15)$$

Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \iint\limits_{-\pi}^{\pi} |B(f, \Phi_T) - f(\alpha, -\alpha, \beta)| \, d\alpha \, d\beta = 0. \quad (3.16)$$

Если модуль функции $f(x_1, x_2, x_3)$ интегрируем в R^3, а (3.14) *и* (3.15) *выполнены в R^2* (sup *берется по* $-\infty < h < \infty$), *то*

$$\lim_{T \to \infty} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |B(f, \Psi_T) - f(\alpha, -\alpha, \beta)| \, d\alpha \, d\beta = 0. \quad (3.17)$$

Доказательство. Мы опять докажем только (3.16). Равенство (3.17) доказывается аналогично.

В силу (3.4) имеем

$$f(\alpha, -\alpha, \beta) = \iiint\limits_{-\pi}^{\pi} f(\alpha, -\alpha, \beta) \, \Phi_T(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

поэтому

$$\int\int_{-\pi}^{\pi} |B(f,\ \Phi_T)-f(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)|\,d\alpha\,d\beta \leqslant$$

$$\leqslant \int\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\,d\beta \int\int\int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha+x_1,\ -\alpha+x_2,\ \beta+x_3)-f(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)|\times$$

$$\times|\Phi_T|\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\int\int\int_{\{|x|\leqslant\delta_0\}} \|f_x-f\|\cdot|\Phi_T|\,dx+$$

$$+\int\int\int_{\{|x|\leqslant\pi\}\setminus\{|x|\leqslant\delta_0\}} \|f_x-f\|\cdot|\Phi_T|\,dx=K_1+K_2,$$

где

$$\|f_x-f\|=\int\int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha+x_1,\ -\alpha+x_2,\ \beta+x_3)-f(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)|\,d\alpha\,d\beta\leqslant$$

$$\leqslant\int\int_{-\pi}^{\pi} |f(y,\ x_1+x_2-y,\ z)-f(y,\ -y,\ z)|\,dy\,dz+$$

$$+\int\int_{-\pi}^{\pi} |f(\alpha+x_1,\ -\alpha-x_1,\ \beta+x_3)-f(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)|\,d\alpha\,d\beta. \qquad (3.18)$$

Теперь зафиксируем $\varepsilon>0$. Из (3.15) и (3.18) видно, что

$$\sup_{\{|x|\leqslant\delta\}} \|f_x-f\|\downarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta\downarrow 0,$$

поэтому, учитывая (3.3), можем подобрать такое $\delta_0>0$, что

$$K_1\leqslant C_1\cdot \sup_{\{|x|\leqslant\delta_0\}} \|f_x-f\|<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

с другой стороны в силу (3.5) и (3.14)

$$K_2\leqslant 2C_3\cdot \int\int\int_{\{|x|\leqslant\pi\}\setminus\{|x|\leqslant\delta_0\}} |\Phi_T(x_1,\ x_2,\ x_3)|\,dx_1\,dx_2\,dx_3<\frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно большом T. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Первое утверждение теоремы вытекает из (2.1) и из равенства

$$\mathbf{E}\zeta^{(T)}_{k_1k_2}(\varphi_1)\,\zeta^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2)-\mathbf{E}\xi^{(T)}_{k_1k_2}(\varphi_1)\,\xi^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2)=$$

$$=\sqrt{T}\left[\int \varphi_1(\lambda)f_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda-\mathbf{E}\int \varphi_1(\lambda)\,I^{(T)}_{k_1k_2}(\lambda)\,d\lambda\right]\times$$

$$\times\sqrt{T}\left[\int \varphi_2(\lambda)f_{k_3k_4}(\lambda)\,d\lambda-\mathbf{E}\int \varphi_2(\lambda)\,I^{(T)}_{k_3k_4}(\lambda)\,d\lambda\right].$$

Второе утверждение вытекает, например, из первого и того, что

$$\overline{\zeta^{(T)}_{k_3k_4}(\varphi_2)}=\zeta^{(T)}_{k_4k_3}(\bar\varphi_2).$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 2.3. Линейная последовательность $X(t)$ стационарна в узком смысле, ряды

$$X_k(t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_k(s-t)\,\eta(s), \quad k=\overline{1,\ r},$$

сходятся в среднем квадратичном, и $\mathbf{E}X_k(t)\equiv 0$. Далее, для любого набора $(k_1,\ k_2)$ имеем

$$m_{k_1k_2}(t,\ 0)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s-t)\,a_{k_2}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{k_1}(\lambda)\,e^{it\lambda}\,\overline{\varphi_{k_2}(\lambda)}\,d\lambda, \tag{3.19}$$

где

$$\varphi_{k_j}(\lambda)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k_j}(s)\,e^{is\lambda}, \qquad \varphi_{k_1}(\lambda)\,e^{it\lambda}=\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s-t)\,e^{is\lambda}. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) видно, что для любой линейной последовательности

$$f_{k_1k_2}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\,\varphi_{k_1}(\lambda)\,\overline{\varphi_{k_2}(\lambda)}=\frac{1}{2\pi}\,\varphi_{k_1}(\lambda)\,\varphi_{k_2}(-\lambda) \tag{3.21}$$

и

$$|f_{k_1k_2}(\lambda)|^2=f_{k_1k_1}(\lambda)\,f_{k_2k_2}(\lambda).$$

Зафиксируем теперь набор $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$. Мы покажем, что если дополнительно $\mathbf{E}\eta^4(0)<\infty$, то

$$f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)=\frac{\mathbf{E}\eta^4(0)-3}{(2\pi)^3}\,\varphi_{k_1}(\lambda_1)\,\varphi_{k_2}(\lambda_2)\,\varphi_{k_3}(\lambda_3)\,\overline{\varphi_{k_4}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}. \tag{3.22}$$

На самом деле, последовательность

$$\sum_{s=-N}^{N} a_k(s-t)\,\eta(s), \qquad N=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

фундаментальна в пространстве L^4. Поэтому она сходится в метрике пространства L^4, и

$$\mathbf{E}\,|X_k(t)|^4=\|X_k(t)\|^4_{L^4}=\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{s=-N}^{N} a_k(s-t)\,\eta(s)\right\|^4_{L^4}=$$

$$=\left(\mathbf{E}\eta^4(0)-3\right)\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_k^4(s)+3\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_k^2(s)\right]^2<\infty\,.$$

Учитывая последнее обстоятельство, имеем

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left[\sum_{s_1=-N}^{N} a_{k_1}(s_1-t_1)\,\eta(s_1)\ldots\sum_{s_4=-N}^{N} a_{k_4}(s_4-t_4)\,\eta(s_4)\right]=$$

$$=\mathbf{E}X_{k_1}(t_1)\ \ldots\ X_{k_4}(t_4),$$

поэтому

$$
\begin{aligned}
&m_{k_1 k_2 k_3 k_4}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)= \\
&=\sum_{\substack{s_j=-\infty \\ 1\leqslant j\leqslant 4}}^{\infty} a_{k_1}(s_1-t_1)\, a_{k_2}(s_2-t_2)\, a_{k_3}(s_3-t_3)\, a_{k_4}(s_4-t_4)\, \mathbf{E}\eta(s_1)\,\eta(s_2)\,\eta(s_3)\,\eta(s_4)= \\
&=\left(\mathbf{E}\eta^4(0)-3\right)\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s-t_1)\, a_{k_2}(s-t_2)\, a_{k_3}(s-t_3)\, a_{k_4}(s-t_4)+ \\
&+\sum_{s_1=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s_1-t_1)\, a_{k_2}(s_1-t_2)\sum_{s_2=-\infty}^{\infty} a_{k_3}(s_2-t_3)\, a_{k_4}(s_2-t_4)+ \\
&+\sum_{s_1=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s_1-t_1)\, a_{k_3}(s_1-t_3)\sum_{s_2=-\infty}^{\infty} a_{k_2}(s_2-t_2)\, a_{k_4}(s_2-t_4)+ \\
&+\sum_{s_1=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s_1-t_1)\, a_{k_4}(s_1-t_4)\sum_{s_2=-\infty}^{\infty} a_{k_2}(s_2-t_2)\, a_{k_3}(s_2-t_3).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Из (3.19) и (3.23) видно, что

$$
\begin{aligned}
&c_{k_1 k_2 k_3 k_4}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ 0)= \\
&=\left(\mathbf{E}\eta^4(0)-3\right)\sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{k_1}(s-t_1)\, a_{k_2}(s-t_2)\, a_{k_3}(s-t_3)\, a_{k_4}(s-t_4).
\end{aligned}
$$

Отсюда, учитывая (3.20), аналог равенства Парсеваля и (1.2), получаем (3.22).

Учитывая сказанное выше и условие, что с. п. f_{kk}, $k=\overline{1,\ r}$, интегрируемы с квадратом на $[-\pi,\ \pi]$, легко показать, что для любого набора $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ выполнены условия теорем 2.3 и 2.4. Отсюда и из равенства

$$
f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\alpha,\ -\alpha,\ \beta)=\frac{\mathbf{E}\eta^4(0)-3}{2\pi}\, f_{k_1 k_2}(\alpha)\, f_{k_3 k_4}(\beta)
$$

вытекают все утверждения следствия 2.3. Доказательство закончено.

Автор глубоко благодарен В. А. Статулявичусу и И. А. Ибрагимову за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
31.V.1971

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса, Теория вероят. и ее примен., **VIII**, 4 (1963), 391–430.
2. И. А. Ибрагимов, Т. М. Товстик, Об оценке спектральных функций одного класса стационарных случайных последовательностей, Вестник ЛГУ, № 1 (1964), 42–57.
3. Т. М. Товстик, Об оценке спектральных функций одного класса стационарных случайных процессов, Вестник ЛГУ, № 13 (1966), 47–54.
4. В. П. Леонов, А. Н. Ширяев, К технике вычисления семиинвариантов, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 3 (1959), 342–355.

5. D. R. Brillinger, Asymptotic properties of spectral estimates of second order, Biometrika, **56**, 2 (1969), 375–390.
6. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, том 1, 2, „Мир“, Москва, 1965.
7. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, Москва, 1948.
8. Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, Москва, 1963.
9. Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, „Мир“, Москва, 1969.

APIE STACIONARAUS PROCESO SPEKTRINĖS FUNKCIJOS ĮVERTINIMO PAKLAIDĄ

R. Bentkus

Reziumė)

Darbe nagrinėjama daugiamačio stacionaraus proceso spektrinės funkcijos įvertinimo paklaidos pirmųjų dviejų momentų asimptotika, kai prabos tūris neaprėžtai didėja. Teoremų sąygos formuluojamos pirmos ir trečios eilės spektriniams tankiams.

ON THE ERROR OF THE ESTIMATE OF THE SPECTRAL FUNCTION OF A STATIONARY PROCESS

R. Bentkus

Summary)

Let $X(t)=\{X_k(t)\}_{k=\overline{1,r}}$ – be a zero mean measurable stationary random process with real-valued components. Given the sample $\{X(t), 0\leqslant t<T\}$, the integral $\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda$ is used as an estimate for the spectral function $F_{k_1 k_2}(\lambda)$ supposed to be absolutely continuous, $F'_{k_1 k_2}(\lambda)=$ $=f_{k_1 k_2}(\lambda)$, where $\varphi(\lambda)$ is some bounded function, $I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)$ – the second-order periodogram and the range of integration is $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$ in the discrete time case and $-\infty<\lambda<\infty$ in the continuous case.

The paper considers asymptotic behaviour, when $T\to\infty$ of the first- and second-order moments of the random variables

$$\xi_{k_1 k_2}^{(T)}(\varphi)=\sqrt{T}\left[\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda-\mathbf{E}\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda\right]$$

and

$$\zeta_{k_1 k_2}^{(T)}(\varphi)=\sqrt{T}\left[\int \varphi(\lambda)\, I_{k_1 k_2}^{(T)}(\lambda)\, d\lambda-\int \varphi(\lambda)\, f_{k_1 k_2}(\lambda)\, d\lambda\right]$$

under the assumptions on the first- and third-order spectral densities.