1972

УДК 519.21

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ СТУПЕНЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р. Банис

1. Пусть $\mathbf{K}$ означает совокупность функций $x(t)$, $t \geqslant 0$, принимающих действительные значения, имеющих в каждой точке интервала $(0, \infty)$ предел слева и непрерывных справа на $[0, \infty)$. На $\mathbf{K}$ введем топологию S (см. [6]).

Определение. *Последовательность $x_n(t)$ S-сходится к $x(t)$, если существует последовательность $\lambda_n(t)$ таких непрерывных взаимно однозначных отображений $[0, \infty)$ на самого себя, что для каждого $T > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\lambda_n(t) - t| = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left| x_n(t) - x\left(\lambda_n(t)\right) \right| = 0.$$

Положим для каждой функций $x(t)$ из $\mathbf{K}$ и любого $T > 0$

$$\Delta_c(x, T) = \sup_{\substack{t-c<t_1<t<t_2<t+c \\ 0\leqslant t_1<t_2\leqslant T}} \min\ [|x(t) - x(t_1)|;\ |x(t) - x(t_2)|].$$

В дальнейшем будем считать, что траектории случайных процессов $X_n(t)$, $n \geqslant 0$, принадлежат с вероятностью 1 пространству $\mathbf{K}$. Обозначим черес $\mathcal{C}$ класс функционалов f, непрерывных в топологии S почти всюду по мере, соответствующей процессу $X_0(t)$ и таких, что $f\left(X_n(t)\right)$ является случайной величиной.

Говорим, что последовательность $X_n(t)$ *слабо сходится* к $X_0(t)$, если для всех $f \in \mathcal{C}$ распределение $f\left(X_n(t)\right)$ слабо сходится к распределению $f\left(X_0(t)\right)$. В [6] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть конечномерные распределения процессов $X_n(t)$ сходятся к соответствующим распределениям процесса $X_0(t)$ и для всех $\varepsilon > 0$ и $T > 0$*

$$\lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\Delta_c\left(X_n(t),\ T\right) > \varepsilon\right\} = 0. \tag{1}$$

Тогда последовательность $X_n(t)$ слабо сходится к $X_0(t)$.

Замечание. Сходимость конечномерных распределений везде будем понимать в смысле их слабой сходимости.

2. Будем рассматривать слабую сходимость сумм независимых ступенчатых случайных процессов. Процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, принимающий действительные значения, называем *ступенчатым*, если приращения $X(t) - X(s)$, $s < t$, принимают лишь целые неотрицательные значения и $X(0) = 0$.

Пусть

$$X_n(t) = \sum_{r=1}^{k_n} X_{nr}(t),$$

где $X_{nr}(t)$ – независимые бесконечно малые ступенчатые случайные процессы. Бесконечную малость понимаем в смысле равенства

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}(t)>0\}=0. \tag{2}$$

Обозначим $\Lambda_n(t)=\mathbf{E}X_n(t)$ при $t\geqslant 0$ и $=0$ при $t<0$.

В [3] доказано, что для сходимости конечномерных распределений $X_n(t)$ к соответствующим распределениям пуассоновского процесса $X_0(t)$ с ведущей функцией $\Lambda(t)$ необходимо и достаточно выполнение при любом $t>0$ следующих условий:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}(t)=1\}=\Lambda(t), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{X_{nr}(t)>1\}=0. \tag{4}$$

Тогда из теоремы 1 следует такое утверждение.

Теорема 2. *При условиях* (2)–(4) *для слабой сходимости процессов* $X_n(t)$ *к пуассоновскому процессу достаточно, чтобы при любом* $T>0$

$$\lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_0^T [\Lambda_n(t+c)-\Lambda_n(t-c)]\, d\Lambda_n(t)=0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\xi_{nr}^{(i)}$ означает расстояние между $i-1$ и i единичными скачками процесса $X_{nr}(t)$. Тогда $X_{nr}(t)$ равно максимальному значению k, для которого

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_{nr}^{(i)} \leqslant t.$$

Обозначим $\Lambda_{nr}(t)=\mathbf{E}X_{nr}(t)$ при $t\geqslant 0$ и $=0$ при $t<0$. При $t\geqslant 0$

$$\Lambda_{nr}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbf{P}\{X_{nr}(t)=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi_{nr}^{(1)}+\ldots+\xi_{nr}^{(k)}\leqslant t\},$$

так как

$$\mathbf{P}\{X_{nr}(t)=k\}=\mathbf{P}\{\xi_{nr}^{(1)}+\ldots+\xi_{nr}^{(k)}\leqslant t\}-\mathbf{P}\{\xi_{nr}^{(1)}+\ldots+\xi_{nr}^{(k+1)}\leqslant t\}.$$

Тогда

$$\Lambda_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\Lambda_{nr}(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\xi_{nr}^{(1)}+\ldots+\xi_{nr}^{(i)}\leqslant t\}.$$

Обозначим

$$\eta_{nr}^{(i)}=\xi_{nr}^{(1)}+\ldots+\xi_{nr}^{(i)}.$$

Тогда

$$\Lambda_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}\,\{\eta_{nr}^{(i)}\leqslant t\}. \tag{6}$$

Оценим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_c\Big(X_n(t),\ T\Big)>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k_n-1}\sum_{q=r+1}^{k_n}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}\,\{\eta_{nr}^{(l)}\leqslant T,\ \eta_{nq}^{(m)}\leqslant T,$$

$$|\eta_{nr}^{(l)}-\eta_{nq}^{(m)}|<2c\}+\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{l=2}^{\infty}\mathbf{P}\,\{\eta_{nr}^{(l)}\leqslant T,\ \xi_{nr}^{(l)}<2c\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{k_n-1}\sum_{q=r+1}^{k_n}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T[\mathbf{P}\,\{\eta_{nr}^{(l)}<t+2c\}-$$

$$-\mathbf{P}\,\{\eta_{nr}^{(l)}<t-2c\}]\,d\mathbf{P}\,\{\eta_{nq}^{(m)}<t\}+\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\,\{X_{nr}(T)>1\}.$$

Ввиду (6),

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_c\ \Big(X_n(t),\ T\Big)>\varepsilon\right\}\leqslant\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\,\{X_{nr}(T)>1\}+$$

$$+\int_0^T[\Lambda_n(t+2c)-\Lambda_n(t-2c)]\,d\Lambda_n(t).$$

По условиям теоремы предел правой части неравенства при $n\to\infty$, $c\to 0$ равен нулю. Теорема доказана.

Будем рассматривать некоторые специальные случаи. Пусть слагаемые процессы $X_{nr}(t)$ имеют стационарные приращения и ординарны, т. е. при $t\to 0$

$$\mathbf{P}\,\{X_{nr}(t)\geqslant 2\}=o(t).$$

Параметром процесса $X_{nr}(t)$ называем предел

$$\lambda_{nr}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{P}\,\{X_{nr}(t)>0\}}{t}.$$

В нашем случае он всегда существует (см. [2]) и равен интенсивности данного процесса

$$\lambda_{nr}=\mathbf{E}X_{nr}(1).$$

Пусть интенсивности слагаемых процессов при больших n равномерно малы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\lambda_{nr}=0.$$

Это условие обеспечивает бесконечную малость процессов $X_{nr}(t)$, так как

$$\mathbf{P}\,\{X_{nr}(t)>0\}\leqslant\mathbf{E}\,X_{nr}(t)=\lambda_{nr}\,t.$$

Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}=\Lambda.$$

Тогда для сходимости конечномерных распределений $X_n(t)$ к соответствующим распределениям пуассоновского процесса с параметром Λ необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\lambda_{nr}\int_0^t\varphi_{nr}(0,\ u)\,du=\Lambda t,$$

где $\varphi_{nr}(k,\ t)$ – функция Пальма, определенная равенством

$$\varphi_{nr}(k,\ t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\mathbf{P}\,\{\,X_{nr}(t+\tau)-X_{nr}(\tau)=k,\ X_{nr}(\tau)>0\,\}}{\mathbf{P}\,\{\,X_{nr}(\tau)>0\,\}}$$

(см. [2]).

Легко видеть, что последнее условие является достаточным и для слабой сходимости процессов $X_n(t)$ к пуассоновскому.

Далее рассмотрим случай, когда слагаемые процессы $X_{nr}(t)$ являются *процессами восстановления типа* $\left(\hat{F}_{nr}(x),\ F_{nr}(x)\right)$, т. е. такими ступенчатыми случайными процессами, для которых расстояния $\xi_{nr}^{(i)}$ между $i-1$ и i скачками независимы между собой ($\xi_{nr}^{(1)}$ – расстояние от 0 до первого скачка) и

$$\mathbf{P}\,\{\,\xi_{nr}^{(1)}<x\,\}=\hat{F}_{nr}(x),\ \mathbf{P}\,\{\,\xi_{nr}^{(i)}<x\,\}=F_{nr}(x),\qquad i=2,\ 3,\ \ldots$$

Предположим, что при любом фиксированном $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\hat{F}_{nr}(t)=\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}F_{nr}(t)=0,\tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\Lambda_{nr}(t)=\Lambda(t),\tag{8}$$

где $\Lambda(t)$ – конечная функция.

Тогда конечномерные распределения процессов $X_n(t)=\sum_{r=1}^{k_n}X_{nr}(t)$ сходятся к соответствующим распределениям пуассоновского процесса с ведущей функцией $\Lambda(t)$ (см. [4]). Отсюда и из теоремы 2 следует такое утверждение.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (7), (8), *то для слабой сходимости* $X_n(t)$ *к пуассоновскому процессу достаточно, чтобы функции* $\Lambda_{nr}(t)$ *и* $\Lambda(t)$ *были непрерывными.*

3. Пусть $X_n(t)$, $n\geqslant 0$, – последовательность рекуррентных потоков событий, т. е. интервалы между последовательными событиями потока $X_n(t)$ являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F_n(x)$. Из теоремы 1 выведем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть конечномерные распределения процессов $X_n(t)$ сходятся к соответствующим распределениям процесса $X_0(t)$. Для слабой сходимости $X_n(t)$ к $X_0(t)$ достаточно, чтобы при любом фиксированном $t>0$ последовательность $\Lambda_n(t)$ была ограниченной и*

$$\lim_{c\to 0} \mathbf{P}\,\{X_0(c)>0\}=0. \tag{9}$$

Доказательство. Оценим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_c\left(X_n(t),\ T\right)>\varepsilon\right\}\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,\{\xi_n^{(1)}+\ldots+\xi_n^{(k+1)}\leqslant T,\ \xi_n^{(k+1)}<2c\}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\,\{\xi_n^{(1)}+\ldots+\xi_n^{(k)}\leqslant T\}\cdot \mathbf{P}\,\{\xi_n^{(k+1)}<2c\}=F_n(2c)\cdot\Lambda_n(T).$$

Здесь, как и прежде, $\xi_n^{(k)}$ означает расстояние между $k-1$ и k единичными скачками процесса $X_n(t)$, а $\Lambda_n(t)=\mathbf{E}\,X_n(t)$ при $t\geqslant 0$ и $=0$ при $t<0$. По условиям теоремы

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\Delta_c\left(X_n(t),\ T\right)>\varepsilon\right\}=O\left(F_0(2c)\right)=O\left(\mathbf{P}\left\{X_0(2c)>0\right\}\right).$$

Утверждение доказано.

Проверим условия последней теоремы для последовательности редеющих процессов. Пусть имеется рекуррентный поток с функцией распределения длины промежутков времени между последовательными событиями $F(x)$. Допустим, что каждое событие потока, независимо от других, с вероятностью ε, $0<\varepsilon<1$, порождает событие вторичного потока. После такого разреживания потока осуществляется преобразование оси времени $t'=\delta t$.

Обозначим через $\varphi(s)$ преобразование Лапласа распределения $F(x)$. Нетрудно видеть, что вторичный поток будет рекуррентным и соответствующее преобразование для него будет иметь вид (с учетом изменения масштаба времени)

$$\varphi_\varepsilon(s)=\frac{\varepsilon\varphi(\delta s)}{1-(1-\varepsilon)\,\varphi(\delta s)}.$$

Пусть можно так подобрать функцию δ_ε, что при $\varepsilon\to 0$

$$\varphi_\varepsilon(s)=\frac{\varepsilon\varphi(\delta_\varepsilon s)}{1-(1-\varepsilon)\,\varphi(\delta_\varepsilon s)}\to\psi(s),$$

где $\psi(s)$ — преобразование Лапласа некоторой функции распределения. Класс всех возможных собственных предельных распределений описывается посредством преобразования Лапласа такой формулой:

$$\psi(s)=\frac{1}{1+cs^{\alpha}}, \tag{10}$$

где α постоянная, $0<\alpha\leqslant 1$, $c>0$ (см. [1]).

Произведем n последовательных разреживаний потока. Пусть интервалы между последовательными событиями в полученном потоке будут $\xi_n^{(i)}$. Будем говорить, что $F(x)$ принадлежит области притяжения закона $\Phi(x)$, если при надлежащем подборе нормирующих констант δ_n выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{\delta_n \xi_n^{(i)} < x\} \to \Phi(x), \quad n \to \infty.$$

В [1] найдены области притяжения всех возможных предельных распределений.

Пусть $X_n(t)$ – процесс, полученный в результате n разрежений исходного потока (с учетом изменения масштаба времени). Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Сходимость конечномерных распределений процессов* $X_n(t)$ *влечет слабую сходимость последовательности* $X_n(t)$.

Доказательство. Из (10) следует, что для предельного распределения $F_0(x)$ верны соотношения

$F_0(t) < 1$ для всех $t < \infty$ и $F_0(+0) = 0$. Так как $\mathbf{P}\{X_0(c) > 0\} = F_0(c)$, то соотношение (9) теоремы 4 выполнено.

Ограниченность последовательности $\Lambda_n(t)$ вытекает из соотношения

$$\Lambda_n(t) \leqslant \frac{F_n(t)}{1 - F_n(t)}.$$

Последнее соотношение получаем из интегрального уравнения

$$\Lambda_n(t) = F_n(t) + F_n(t) * \Lambda_n(t),$$

верного для каждого процесса восстановления (см. [4]). Утверждение доказано.

Выражаю глубокую благодарность Б. Григелионису за постановку задачи и ценные указания.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
9.VI.1971

Литература

1. Б. В. Гнеденко, Б. Фрайер, Несколько замечаний к одной работе И. Н. Коваленко, Liet. matem. rink., **IX**, 3 (1969), 463–470.
2. Б. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вероятн. и ее примен., **VIII**, 2 (1963), 189–194.
3. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Liet. matem. rink., **VI**, 2 (1966), 241–244.
4. Б. Григелионис, Об одной предельной теореме теории восстановления, Liet. matem. rink., **II**, 1 (1962), 25–34.
5. А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов, Теория вероятн. и ее примен., **I**, 3 (1956), 289–319.
6. C. Stone, Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals, Proc. Amer. Math. Soc., **XIV**, 5 (1963), 694–696.

APIE LAIPTUOTŲ ATSITIKTINIŲ PROCESŲ SILPNĄ KONVERGENCIJĄ

R. Banys

Reziumė)

Darbe gautos pakankamos sąlygos, kad konverguotų tam tikros klasės funkcionalai nuo be galo mažų laiptuotų atsitiktinių procesų sumų ir nuo retėjančių srautų pasiskirstymų.

ON THE WEAK CONVERGENCE OF STOCHASTIC PROCESSES

R. Banys

(*Summary*)

In the present paper are obtained sufficient conditions for convergence of distributions of certain functionals on the sums of infinitesimal stepped stochastic processes and the thinning currents.