XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 519.21

О НЕРАВЕНСТВЕ СГЛАЖИВАНИЯ

В. И. Паулаускас

Хорошо известно, какую роль в теории вероятностей, в частности, в предельных теоремах, играют неравенства Эссеена [1], которые В. Феллер называет неравенствами сглаживания, так как они позволяют оценить величину $\sup_x |F(x)-G(x)|$, где $F(x)$ – неубывающая ограниченная функция, а $G(x)$ – функция ограниченной вариации, через сглаженную в некотором смысле разность функций $F(x)$ и $G(x)$ – $\sup_x |(F-G)*H(x)|$. В неравенствах Эссеена этот член оценивается с помощью преобразований Фурье – Стильтьеса функций $F(x)$ и $G(x)$, поэтому неравенства Эссеена можно считать неравенствами сглаживания, приспособленными для метода характеристических функций. В последнее время обобщения неравенств Эссеена проводились по двум направлениям: по точности констант – в работе В. М. Золотарева [5] и по общности формулировки – в докладе В. В. Петрова [6] (без доказательства).

В методе композиций также используется аналогичное неравенство сглаживания, доказанное Г. Бергстремом [2], [3], [4]. В качестве сглаживающего закона в этом случае берется нормальный закон, но оказывается, что полученное таким путем неравенство дает хорошие результаты при рассмотрении предельных теорем, когда $G(x)$ является нормальной функцией распределения, а в предельных теоремах с устойчивым предельным законом целесообразно в качестве сглаживающего закона брать устойчивый с тем же показателем, что и предельный закон [7].

Мы здесь приводим наиболее общий вариант неравенства сглаживания, охватывающий и уточняющий все известные неравенства такого типа.

Теорема. *Пусть $F(x)$ – ограниченная неубывающая функция, $G(x)$ – функция ограниченной вариации, $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$. Пусть $H(x)$ – функция распределения, имеющая плотность $h(x)$. Обозначим*

$$\Delta=\sup_x |F(x)-G(x)|, \quad \Delta_H=\sup_x |[(F-G)*H](x)|.$$

Тогда для всех x и $\alpha>0$ таких, что

$$a_h(x,\ \alpha)=2\int_0^{\alpha} h(x-y)\,dy-1>0 \tag{1}$$

имеет место енравенство

$$\Delta \leqslant \frac{1}{a_h(x,\ \alpha)} \left(\Delta_H + \sup_u \int_0^\alpha |G(y+u) - G(u)|\, h(x-y)\, dy.\right. \qquad (2)$$

Пусть $f(t)$, $g(t)$ *и* $w(t)$ — *преобразования Фурье—Стилтьеса для функций* $F(x)$, $G(x)$ *и* $H(x)$, *соответственно.*

Следствие 1. *Для всех* $T>0$ *и всех* x *и* $\alpha>0$ *таких, что выполняется* (1),

$$\Delta \leqslant \frac{1}{2\pi a_h(x,\ \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(f(t)-g(t))\, w\left(\frac{t}{T}\right)}{t} \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{a_h(x,\ \alpha)} \sup_u \int_0^\alpha \left| G\left(\frac{y}{T}+u\right) - G(u) \right| h(x-y)\, dy. \qquad (3)$$

Ниже покажем, что при $x=\frac{\alpha}{2}$ и выбранной плотности такой, что $|h(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}$, $w(t)=0$ при $|t|>1$, из (3) вытекает оценка В. В. Петрова [6], а при $x=\frac{\alpha}{2}$ и условии $\left| G\left(\frac{y}{T}+u\right) - G(u) \right| \leqslant q\frac{|y|}{T}$ и симметрической плотности $h(x)$ вытекает оценка Б. М. Золотарева [5].

Для получения неравенства сглаживания в методе композиций положим $H(x) = \Phi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\varepsilon(y)\, dy$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varepsilon>0$, и обозначим $\Delta_\varepsilon = \Delta_{\Phi_\varepsilon}$.

Следствие 2. *Если* $|G'(x)| \leqslant A$, *то для всех* $\varepsilon>0$ *и всех* x *и* $\alpha>0$ *таких, что* $a_\varphi(x,\ \alpha)>0$

$$\Delta \leqslant \frac{1}{a_\varphi(x,\ \alpha)} \left(\Delta_\varepsilon + \varepsilon A \int_0^\alpha y\varphi(x-y)\, dy\right). \qquad (4)$$

Покажем, что (4) по отношению к константам дает более точную оценку, чем оценка из леммы Г. Бергстрема [4]:

$$\Delta \leqslant \max(\tau\Delta_\varepsilon,\ 2\varepsilon A b), \qquad (5)$$

где τ и b — решения уравнения

$$3\int_0^b \varphi(u)\, du = 1+\tau^{-1}. \qquad (6)$$

Для этого положим в (4) $x=\frac{\alpha}{2}=b$ и постараемся выразить константы из (4) через b и τ, которые определяются из (6). Нетрудно видеть, что $a_\varphi(b,\ 2b) = \frac{\tau+4}{3\tau}$, а $\int_0^{2b} y\varphi(b-y)\, dy = 2b\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)$, поэтому (4) примет вид

$$\Delta \leqslant \frac{3}{\tau+4}\cdot\tau\Delta_\varepsilon + 2A\varepsilon b\,\frac{\tau+1}{\tau+4}.$$

Отсюда

$$\Delta \leqslant \frac{3}{\tau+4}\,\tau\Delta_\varepsilon + 2A\varepsilon b\,\frac{\tau+1}{\tau+4} \leqslant \max(\tau\Delta_\varepsilon,\ 2A\varepsilon b).$$

Следствие 3. *Пусть* $p_\beta(x)$ — *плотность устойчивого распределения с показателем* $0<\beta\leqslant 2$. *Положим* $H_{\beta,\varepsilon}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\varepsilon}\, p_\beta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$ *и* $\Delta_{\beta,\varepsilon} = \Delta_{H_{\beta,\varepsilon}}$. *Если* $|G'(x)|\leqslant A$, *то*

$$\Delta \leqslant C_1 \Delta_{\beta,\varepsilon} + C_2 A\varepsilon,$$

где C_1 *и* C_2 *зависят только от* $p_\beta(x)$ $\left(\text{*как и прежде,* } C_1 = [a_{p_\beta}(x,\ \alpha)]^{-1}\right)$ $C_2 = C_1 \int\limits_0^\alpha y p_\beta(x-y)\,dy$, *а* x *и* $\alpha>0$ *таковы, что* $a_{p_\beta}(x,\ \alpha)>0$.

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, можем предположить, что $\Delta = |F(0)-G(0)|$, так как если было $\Delta = |F(x_0)-G(x_0)|$, то нам достаточно было рассматривать функции $F_1(x) = F(x+x_0)$ и $G_1(x) = G(x+x_0)$, а от такого сдвига величины, входящие в (2), не меняются:

$$\Delta_H = \sup_x |[(F-G)*H](x)| = \sup_x |[(F_1-G_1)*H](x)|,$$

$$\sup_u \int\limits_0^\alpha |G(y+u)-G(u)|\,h(x-y)\,dy =$$

$$= \sup_u \int\limits_0^\alpha |G_1(y+u)-G_1(u)|\,h(x-y)\,dy.$$

Предположим также, что $F(0)>G(0)$ (случай $F(0)\leqslant G(0)$ рассматривается аналогично). Используя тот факт, что $F(x)$ — неубывающая функция, имеем для $x>0$

$$F(x)-G(x) \geqslant F(0)-G(x) = \Delta - \big(G(x)-G(0)\big) \geqslant \Delta - |G(x)-G(0)|.$$

Далее, применяя неравенство $|a+b|\geqslant a-|b|$, можем записать для любых x и $\alpha>0$

$$\Delta_H \geqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(F(t)-G(t)\big)\,h(x-t)\,dt \right| \geqslant \int\limits_0^\alpha \big(F(t)-G(t)\big)\,h(x-t)\,dt -$$

$$-\left| \int\limits_{-\infty}^{0} [F(t)-G(t)]\,h(x-t)\,dt + \int\limits_\alpha^\infty [F(t)-G(t)]\,h(x-t)\,dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^\alpha \big(\Delta - |G(t)-G(0)|\big)\,h(x-t)\,dt - \Delta\left(\int\limits_{-\infty}^0 + \int\limits_\alpha^\infty h(x-t)\,dt\right) =$$

$$= \Delta\left(2\int\limits_0^\alpha h(x-t)\,dt - 1\right) - \int\limits_0^\alpha |G(t)-G(0)|\,h(x-t)\,dt. \qquad (7)$$

Теперь потребуем, чтобы x и $\alpha>0$ были таковыми, чтобы выполнялось (1), и тогда из (7) получим (2).

Доказательство следствия 1. Для $T=1$ неравенство (3) следует просто из оценки

$$\Delta_H \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[f(t)-g(t)]\,w(t)}{t} \right| dt.$$

Это значит, что из (2) вытекает

$$\Delta \leqslant \frac{1}{2\pi a_h(x,\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[f(t)-g(t)]\,w(t)}{t} \right| dt +$$

$$+\frac{1}{a_h(x,\alpha)} \sup_u \int_0^{\alpha} |G(y+u)-G(u)|\,h(x-y)\,dy. \tag{8}$$

Теперь применим (8) к функциям $F_2(x)=TF\left(\frac{x}{T}\right)$ и $G_2(x)=TG\left(\frac{x}{T}\right)$, где $T>0$. Так как $f_2(t)=Tf(tT)$ и $g_2(t)=Tg(tT)$, то легко получаем

$$\Delta=\sup_x |F(x)-G(x)|=\frac{1}{T}\sup_x |F_2(x)-G_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T2\pi a_h(x,\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} |[f_2(t)-g_2(t)]\,w(t)|\,\frac{dt}{|t|}+$$

$$+\frac{1}{Ta_h(x,\alpha)} \sup_u \int_0^{\alpha} |G_2(y+u)-G_2(u)|\,h(x-y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi a_h(x,\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} |[f(tT)-g(tT)]\,w(t)|\,\frac{dt}{|t|}+$$

$$+\frac{1}{a_h(x,\alpha)} \sup_u \int_0^{\alpha} \left| G\left(\frac{y}{T}+\frac{u}{T}\right)-G\left(\frac{u}{T}\right) \right| h(x-y)\,dy,$$

что совпадает с (3).

Если в (3) выберем $h(x)=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$ и $x=\frac{\alpha}{2}$, то оценивая во втором члене $h(x)\leqslant\frac{1}{2\pi}$ и обозначая $\frac{1}{2\pi a_h\left(\frac{\alpha}{2},\,\alpha\right)}=b$, для определения α получим то же самое уравнение, что и в работе В. В. Петрова [6].

В наиболее часто встречаемой ситуации $G(x)$ имеет ограниченную производную, и тогда, используя оценку $\left| G\left(\frac{y}{T}+u\right)-G(u) \right| \leqslant q\,\frac{|y|}{T}$, где $q=\sup_x |G'(x)|$, из (3) получаем неравенство

$$\Delta \leqslant \frac{1}{2\pi a_h(x,\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Big(f(t)-g(t)\Big)\, w\left(\frac{t}{T}\right) \right| \frac{dt}{|t|}+\beta_h(x,\alpha)\,\frac{q}{T}, \tag{9}$$

где

$$\beta_h(x, \alpha) = \frac{\int\limits_0^{\alpha} yh(x-y)\,dy}{a_h(x, \alpha)} = \frac{x\int\limits_{x-\alpha}^{x} h(u)\,du - \int\limits_{x-\alpha}^{x} uh(u)\,du}{2\int\limits_{x-\alpha}^{x} h(u)\,du - 1}.$$

Если в (9) положить $x=\frac{\alpha}{2}$ и $h(x)$ выбрать симметрической, то получаем неравенство В. М. Золотарева [5]. Преимущество (9) в том, что за счет ухудшения коэффициента в первом члене выбором x можно уменьшить $\beta_h(x, \alpha)$. Из выражения $\beta_h(x, \alpha)$ видно, что мы можем даже устремить $\alpha \to \infty$ $\left(\text{чего нельзя делать, когда выбрано } x=\frac{\alpha}{2}\right)$.

Доказательство следствий 2, 3. Если в неравенстве (2) положим $H(x)=\Phi_\varepsilon(x)$ и применим оценку $|G'(x)| \leqslant A$, то будем иметь

$$\Delta \leqslant \frac{\Delta_\varepsilon + A\int\limits_0^{\alpha} y\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy}{2\int\limits_0^{\alpha} \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy - 1} = \frac{\Delta_\varepsilon + \varepsilon A\int\limits_0^{\alpha_1} y\varphi(x_1-y)\,dy}{2\int\limits_0^{\alpha_1} \varphi(x_1-y)\,dy - 1},$$

где $\alpha_1=\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $x_1=\frac{x}{\varepsilon}$. Теперь остается потребовать, чтобы было $\alpha_1>0$ и α_1 и x_1 были таковыми, чтобы $a_\varphi(\alpha_1, x_1)>0$ (а это всегда можно сделать, так как пока единственным требованием было $\alpha>0$, а $\varepsilon>0$), и мы получим (4), где сохранены обозначения α и x вместо α_1 и x_1.

Доказательство следствия 3 вполне аналогично.

Можно надеяться, что при помощи полученных точных неравенств сглаживания удастся улучшить константы, входящие в оценки скорости сходимости в предельных теоремах.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
4.XII.1970

Литература

1. C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions, Acta Math., 77 (1945).
2. H. Bergström, On the Central Limit Theorem, Skand. Aktruarietidskrift, 1944.
3. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand. Aktuarietidskrift, No 1–2 (1949).
4. H. Bergström, A comparision method for distribution function of sums of independent and dependent random variables, Теор. вероятн., и ее примен., XV, вып. 3 (1970).
5. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее примен., IX, вып. 3 (1965).
6. В. В. Петров, Оценка близости функций ограниченной вариации по близости их преобразований Фурье–Стилтьеса, ДАН СССР, **192**, № 5 (1970).
7. А. Миталаускас, Оценка остаточного члена в интегральной предельной теореме в случае сходимости к устойчивому закону, Лит. матем. сб., **XI**, 3 (1971), 627–639.

APIE SUGLODINIMO NELYGYBĘ

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Straipsnyje įrodyta šitokia teorema.

Teorema. Sakykime, $F(x)$ yra aprėžta nemažėjanti funkcija, $G(x)$ – aprėžtos variacijos funkcija, $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$. Jei $H(x)$ yra pasiskirstymo funkcija su tankiu $h(x)$, tai visiems x ir $\alpha>0$, tokiems, kad $a_h(x, \alpha)=2\int_0^\alpha h(x-y)\,dy-1>0$,

$$\sup_x |F(x)-G(x)| \leqslant \frac{1}{a_h(x, \alpha)} \Big(\sup_x |[(F-G)*H](x)| + $$

$$+\sup_u \int_0^\alpha |G(y+u)-G(u)|\, h(x-y)\,dy.$$

Trijose teoremos išvadose parodoma, kad gautoji nelygybė yra bendresnė ir tikslesnė, negu visos iki šiol žinomos tokio tipo nelygybės.

ON AN INEQUALITY OF SMOOTHING

V. Paulauskas

(*Summary*)

The aim of the paper is to prove the following

Theorem. Let $F(x)$ bee bounded nondecreasing function, $G(x)$ bee function of bounded variation, $F(-\infty)=G(-\infty)$, $F(+\infty)=G(+\infty)$. Let $H(x)$ be a distribution function with density of probability $h(x)$. Then for all x and $\alpha>0$ such, that $a_h(x, \alpha)=2\int_0^\alpha h(x-y)\,dy-1>0$, the following inequality holds

$$\sup_x |F(x)-G(x)| \leqslant \frac{1}{a_h(x, \alpha)} \Big(\sup_x |[(F-G)*H](x)| + $$

$$+\sup_u \int_0^\alpha |G(y+u)-G(u)|\, h(x-y)\,dy.$$

The three corrolaries of the theorem show that obtained inequality is more general and sharper than all inequalities of such type known up to the present both in the method of characteristic functions [1], [5], [6] and in that of convolutions [4].