XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 4
1971

УДК 517.941

О ПРИВОДИМОСТИ ОДНОЙ n-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. Меркис

В работе [1] получены условия приводимости одной двумерной системы с ограниченными коэффициентами, зависящими от параметра. В настоящей статье эти результаты обобщаются на линейную систему n-го порядка.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=x[P_0+\varepsilon P(t)], \tag{1}$$

где $x=[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]$ — вектор строка, $P_0=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$ — диагональная матрица с постоянными вещественными элементами, удовлетворяющими условию

$$\lambda_i-\lambda_k\neq 0\,(i\neq k), \tag{2}$$

$P(t)=\left(p_{ik}(t)\right)$ — непрерывная и ограниченная матрица n-го порядка и ε — комплексный параметр.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть в системе* (1) *элементы матриц* P_0 и $P(t)$ *удовлетворяют соответственно условиям* (2) *и*

$$\int_0^t p_{kk}dt=a_kt+F_k(t) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$\int_0^t |p_{ik}|\,dt=F_{ik}(t) \qquad (i>k;\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

где a_k *— постоянные, а* $F_k(t)$ *и* $F_{ik}(t)$ *— ограниченные функции.*

Тогда система (1) *приводима в некотором круге* $|\varepsilon|<r$. *При этом, в частности, она приводима, если*

$$|\varepsilon|\leqslant\frac{R}{2^{n-2}}=\frac{1}{2^{n-2}h(\sqrt{S}+\sqrt{s})^2} \qquad (n\geqslant 3),$$

где

$$h=\frac{1}{\min\limits_{\substack{1\leqslant i,\,k\leqslant n\\ i\neq k}}|\lambda_i-\lambda_k|},\quad s=\max_{1\leqslant i,\,k\leqslant n}\ \sup_t|p_{ik}(t)|,\quad S=\|P(t)\|,$$

причем норма определяется следующим образом:

$$\|P(t)\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\sup_t|p_{ik}(t)|.$$

Ввиду громоздкости вычислений, доказательство теоремы проведем для системы четвертого порядка

$$\frac{dx}{dt}=x\,[P_0+\varepsilon P(t)],\tag{4}$$

где

$$x=[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4],\ P_0=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4),\ P(t)=\left(p_{ik}(t)\right)$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Для доказательства теоремы воспользуемся методом Л. Я. Адриановой [2], причем, фундаментальную систему решений системы (4) построим другим способом.

Запишем систему (4) в виде

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1(\lambda_1+\varepsilon p_{11})+\varepsilon\tilde{x}P_{21},$$
$$\frac{d\tilde{x}}{dt}=\tilde{x}(P_{01}+\varepsilon P_{11})+\varepsilon x_1P_{12},\tag{5}$$

где

$$\tilde{x}=[x_2,\ x_3,\ x_4],\ P_{21}=\operatorname{colon}(p_{21},\ p_{31},\ p_{41}),$$
$$P_{12}=[p_{12},\ p_{13},\ p_{14}],\ P_{01}=\operatorname{diag}(\lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4),$$
$$P_{11}=(p_{ik})\qquad(i,\ k=2,\ 3,\ 4).$$

Следуя [2], подстановкой

$$x_1=x_1,\ \tilde{x}=y+x_1\tau_1,\tag{6}$$

где

$$y=[y_2,\ y_3,\ y_4],\ \tau_1=[\tau_{12},\ \tau_{13},\ \tau_{14}],$$

систему (5) заменим следующей:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1(\lambda_1+\varepsilon p_{11}+\varepsilon\tau_1P_{21})+\varepsilon yP_{21},$$
$$\frac{dy}{dt}=y\,[P_{01}+\varepsilon(P_{11}-P_{21}\tau_1)]+$$
$$+x_1\left[\varepsilon P_{12}+\tau_1(P_{01}-\lambda_1)+\varepsilon\tau_1(P_{11}-p_{11})-\varepsilon\tau_1P_{21}\tau_1-\frac{d\tau_1}{dt}\right].\tag{7}$$

Определим теперь вектор τ_1 как ограниченное решение матрично-векторного уравнения

$$\frac{d\tau_1}{dt}+\tau_1(\lambda_1-P_{01})=\varepsilon P_{12}+\varepsilon\tau_1(P_{11}-p_{11})-\varepsilon\tau_1P_{21}\tau_1.\tag{8}$$

Замечание 1. На основании результатов [3], [4] и [5] такое решение (с нормой $\|\tau_1\|<1$) уравнения (8), как нетрудно видеть, существует при $|\varepsilon|<R$, где

$$R=\frac{1}{h(\sqrt{S}+\sqrt{s})^2},\tag{*}$$

причем h, s и S определены выше.

Тогда система (7) принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1(\lambda_1+\varepsilon p_{11}+\varepsilon\tau_1P_{21})+\varepsilon yP_{21},$$

$$\frac{dy}{dt}=y\,[P_{01}+\varepsilon(P_{11}-P_{21}\tau_1)]. \tag{9}$$

Очевидно, что эта система имеет следующее частное решение

$$y=0,\quad x_1=\exp\left[\int_0^t(\lambda_1+\varepsilon p_{11}+\varepsilon\tau_1P_{21})\,dt\right].$$

Отсюда по формулам (6) находим первое частное решение системы (5), а тем самым и системы (4)

$$x_1=\exp\left[\int_0^t(\lambda_1+\varepsilon p_{11}+\varepsilon\tau_1P_{21})\,dt\right],$$

$$\tilde{x}=x_1\tau_1=x_1\,[\tau_{12}\ \ \tau_{13},\ \tau_{14}],$$

или

$$x=x_1\,[1,\ \tau_{12},\ \tau_{13},\ \tau_{14}]. \tag{I}$$

Рассмотрим далее второе уравнение системы (9), т. е.

$$\frac{dy}{dt}=y\,[P_{01}+\varepsilon Q(t,\ \varepsilon)], \tag{10}$$

где, согласно замечанию 1, матрица

$$Q(t,\ \varepsilon)=P_{11}-P_{21}\tau_1=\begin{Vmatrix} p_{22}-\tau_{12}p_{21}, & p_{23}-\tau_{13}p_{21}, & p_{24}-\tau_{14}p_{21}\\ p_{32}-\tau_{12}p_{31}, & p_{33}-\tau_{13}p_{31}, & p_{34}-\tau_{14}p_{31}\\ p_{42}-\tau_{12}p_{41}, & p_{43}-\tau_{13}p_{41}, & p_{44}-\tau_{14}p_{41}\end{Vmatrix}$$

ограниченная при $|\varepsilon|<R$. Запишем систему (10) в виде

$$\frac{dy_2}{dt}=y_2(\lambda_2+\varepsilon q_{11})+\varepsilon\tilde{y}Q_{21},$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\tilde{y}(P_{02}+\varepsilon Q_{11})+\varepsilon y_2Q_{12}, \tag{11}$$

где

$$\tilde{y}=[y_3,\ y_4],\ Q_{21}=\mathrm{colon}\,(q_{21},\ q_{31}),\ Q_{12}=[q_{12},\ q_{13}],$$

$$P_{02}=\mathrm{diag}\,(\lambda_3,\ \lambda_4),\ Q_{11}=(q_{ik})\qquad (i,\ k=2,\ 3).$$

Подстановкой

$$y_2=y_2,\ \ \tilde{y}=z+y_2\tau_2, \tag{12}$$

где

$$z=[z_3,\ z_4],\ \tau_2=[\tau_{23},\ \tau_{24}],$$

систему (11) заменим следующей:

$$\frac{dy_2}{dt}=y_2(\lambda_2+\varepsilon q_{11}+\varepsilon\tau_2Q_{21})+\varepsilon zQ_{21},$$

$$\frac{dz}{dt}=z\,[P_{02}+\varepsilon(Q_{11}-Q_{21}\tau_2)]+$$

$$+y_2\left[\varepsilon Q_{12}+\tau_2(P_{02}-\lambda_2)+\varepsilon\tau_2(Q_{11}-q_{11})-\varepsilon\tau_2Q_{21}\tau_2-\frac{d\tau_2}{dt}\right].$$

Определив вектор τ_2 как ограниченное решение уравнения

$$\frac{d\tau_2}{dt}+\tau_2(\lambda_2-P_{02})=\varepsilon Q_{12}+\varepsilon\tau_2(Q_{11}-q_{11})-\varepsilon\tau_2 Q_{21}\tau_2, \tag{13}$$

эту систему запишем так:

$$\frac{dy_2}{dt}=y_2(\lambda_2+\varepsilon q_{11}+\varepsilon\tau_2 Q_{21})+\varepsilon z Q_{21},$$

$$\frac{dz}{dt}=z\,[P_{02}+\varepsilon(Q_{11}-Q_{21}\tau_2)]. \tag{14}$$

Легко видеть, что она имеет частное решение вида

$$z=0,\ y_2=\exp\left[\int_0^t(\lambda_2+\varepsilon q_{11}+\varepsilon\tau_2 Q_{21})\,dt\right].$$

На основании (12) отсюда получаем частное решение системы (10)

$$y=y_2\,[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}].$$

Тогда второе частное решение системы (9) можно записать следующим образом:

$$x_1=y_2 f_{21}(t,\ \varepsilon,\ c_{21})$$

$$y=y_2\,[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}],$$

где

$$f_{21}(t,\ \varepsilon,\ c_{21})=\exp\left[\int_0^t\omega_{21}(t,\ \varepsilon)\,dt\right]\times$$

$$\times\left\{c_{21}+\varepsilon\int_0^t[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}]\,P_{21}\exp\left[-\int_0^t\omega_{21}(u,\ \varepsilon)\,du\right]dt\right\},$$

причем

$$\omega_{21}(t,\ \varepsilon)=\lambda_1-\lambda_2+\varepsilon(p_{11}-q_{11})+\varepsilon(\tau_1 P_{21}-\tau_2 Q_{21}),$$

а постоянная c_{21} определяется соответствующим образом в дальнейшем.

Подставив полученные выражения для x_1 и y в (6), находим второе частное решение системы (4):

$$x_1=y_2 f_{21}(t,\ \varepsilon,\ c_{21}),$$

$$\tilde{x}=y_2\,[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}]+y_2 f_{21}\,[\tau_{12},\ \tau_{13},\ \tau_{14}],$$

или

$$x=y_2\,[f_{21},\ 1+\tau_{12}f_{21},\ \tau_{23}+\tau_{13}f_{21},\ \tau_{24}+\tau_{14}f_{21}]. \tag{II}$$

Замечание 2. Уравнение (13) (а также и (8)) имеет ограниченное решение (с нормой $\|\tau_2\|<1$) при $\varepsilon<r_1=\min(R,\ R_1)$, где

$$R_1=\frac{1}{h(\sqrt{S_1}+\sqrt{s_1})^2}, \tag{15}$$

причем

$$s_1=\max_{1\leqslant i,\,k\leqslant 3}\ \sup_t|q_{ik}(t,\ \varepsilon)|,\qquad S_1=\|Q(t,\ \varepsilon)\|,$$

при любом $|\varepsilon| < R$, где R дано формулой (*). Из вида матрицы $Q(t, \varepsilon)$ и замечания 1 следует, что при $|\varepsilon| < R$ имеем

$$R_1 > \frac{R}{2}.$$

Таким образом, ограниченные решения уравнений (8) и (13) в частности будут существовать при $|\varepsilon| \leqslant \frac{R}{2}$.

Далее, будем рассматривать второе уравнение системы (14)

$$\frac{dz}{dt} = z\,[P_{02} + \varepsilon R(t, \varepsilon)], \tag{16}$$

где матрица

$$R(t, \varepsilon) = Q_{11} - Q_{21}\tau_2 =$$

$$= \begin{Vmatrix} p_{33} - p_{31}\tau_{13} - (p_{32} - p_{31}\tau_{12})\,\tau_{23}, & p_{34} - p_{31}\tau_{14} - (p_{32} - p_{31}\tau_{12})\,\tau_{24} \\ p_{43} - p_{41}\tau_{13} - (p_{42} - p_{41}\tau_{12})\,\tau_{23}, & p_{44} - p_{41}\tau_{14} - (p_{42} - p_{41}\tau_{12})\,\tau_{24} \end{Vmatrix}$$

ограниченная при $|\varepsilon| < r_1$ $\left(\text{в частности при } |\varepsilon| \leqslant \frac{R}{2}\right)$. Запишем систему (16) в виде

$$\frac{dz_3}{dt} = z_3(\lambda_3 + \varepsilon r_{11}) + \varepsilon z_4 r_{21},$$

$$\frac{dz_4}{dt} = z_4(\lambda_4 + \varepsilon r_{22}) + \varepsilon z_3 r_{12}, \tag{17}$$

где r_{ik} — элементы матрицы $R(t, \varepsilon)$. Подстановкой

$$z_3 = z_3, \quad z_4 = u_4 + z_3\tau_3 \tag{18}$$

систему (17) приведем к виду

$$\frac{dz_3}{dt} = z_3(\lambda_3 + \varepsilon r_{11} + \varepsilon\tau_3 r_{21}) + \varepsilon u_4 r_{21},$$

$$\frac{du_4}{dt} = u_4(\lambda_4 + \varepsilon r_{22} - \varepsilon\tau_3 r_{21}) +$$

$$+ z_3\left[\varepsilon r_{12} + \tau_3(\lambda_4 - \lambda_3) + \varepsilon\tau_3(r_{22} - r_{11}) - \varepsilon\tau_3^2 r_{21} - \frac{d\tau_3}{dt}\right].$$

Определив τ_3 как ограниченное решение уравнения

$$\frac{d\tau_3}{dt} + \tau_3(\lambda_3 - \lambda_4) = \varepsilon r_{12} + \varepsilon\tau_3(r_{22} - r_{11}) - \varepsilon\tau_3^2 r_{21}, \tag{19}$$

получим

$$\frac{dz_3}{dt} = z_3(\lambda_3 + \varepsilon r_{11} + \varepsilon\tau_3 r_{21}) + \varepsilon u_4 r_{21},$$

$$\frac{du_4}{dt} = u_4(\lambda_4 + \varepsilon r_{22} - \varepsilon r_{21}\tau_3). \tag{20}$$

Частным решением этой системы будет

$$u_4 = 0, \quad z_3 = \exp\left[\int_0^t (\lambda_3 + \varepsilon r_{11} + \varepsilon\tau_3 r_{21})\,dt\right].$$

Согласно (18) отсюда получаем частное решение системы (16):

$$z_3 = \exp\left[\int_0^t (\lambda_3 + \varepsilon r_{11} + \varepsilon\tau_3 r_{21})\,dt\right],$$

$$z_4 = z_3\tau_3,$$

или

$$z = z_3[1,\ \tau_3].$$

При этом второе частное решение системы (14) можно записать так:

$$y_2 = z_3 f_{32}(t,\ \varepsilon,\ c_{32}),$$

$$z = z_3[1,\ \tau_3],$$

где

$$f_{32}(t,\ \varepsilon,\ c_{32}) = \exp\left[\int_0^t \omega_{32}(t,\ \varepsilon)\,dt\right]\times$$

$$\times\left\{c_{32} + \varepsilon\int_0^t [1,\ \tau_3]\,Q_{21}\exp\left[-\int_0^t \omega_{32}(u,\ \varepsilon)\,du\right]dt\right\},$$

причем

$$\omega_{32}(t,\ \varepsilon) = \lambda_2 - \lambda_3 + \varepsilon(q_{11} - r_{11}) + \varepsilon(\tau_2 Q_{21} - \tau_3 r_{21}),$$

а постоянная c_{32}, как и c_{31}, будет определена в дальнейшем. На основе подстановок (12) отсюда находим второе частное решение системы (10)

$$y = z_3[f_{32},\ 1 + \tau_{23}f_{32},\ \tau_3 + \tau_{24}f_{32}].$$

Тогда третье частное решение системы (9) будет вида

$$x_1 = z_3 f_{31}(t,\ \varepsilon,\ c_{31}),$$

$$y = z_3[f_{32},\ 1 + \tau_{23}f_{32},\ \tau_3 + \tau_{24}f_{32}],$$

где

$$f_{31}(t,\ \varepsilon,\ c_{31}) = \exp\left[\int_0^t \omega_{31}(t,\ \varepsilon)\,dt\right]\left\{c_{31} +\right.$$

$$\left. + \varepsilon\int_0^t [f_{32},\ 1 + \tau_{23},f_{32},\ \tau_3 + \tau_{24}f_{32}]\,P_{21}\exp\left[-\int_0^t \omega_{31}(u,\ \varepsilon)\,du\right]dt\right\},$$

причем

$$\omega_{31}(t,\ \varepsilon) = \lambda_1 - \lambda_3 + \varepsilon(p_{11} - r_{11}) + \varepsilon(\tau_1 P_{21} - \tau_3 r_{21}),$$

а постоянная c_{31} подлежит определению.

Отсюда по формулам (6) находим третье частное решение системы (4)

$$x = z_3[f_{31},\ f_{32} + \tau_{12}f_{31},\ 1 + \tau_{23}f_{32} + \tau_{13}f_{31},\ \tau_3 + \tau_{24}f_{32} + \tau_{14}f_{31}]. \qquad \text{(III)}$$

Замечание 3. Отметим, что уравнение (19) (а также (13) и (8)) будет иметь ограниченное решение (с нормой $\|\tau_3\| < 1$) при

$$|\varepsilon| < r = \min(r_1,\ R_2) = \min(R,\ R_1,\ R_2),$$

где

$$R_2 = \frac{1}{4hs_3},$$

причем $s_2 = \max\limits_{1 \leqslant i, k \leqslant 2} \sup\limits_t |r_{ik}|$ при $|\varepsilon| < r_1$. В частности, как нетрудно заметить, ограниченные решения уравнений (8), (13) и (19) будут существовать при $|\varepsilon| < \frac{R}{2^2}$.

Далее, заметим, что второе частное решение системы (20) можно записать так:

$$u_4 = \exp\left[\int\limits_0^t (\lambda_4 + \varepsilon r_{22} - \varepsilon r_{21}\tau_3)\, dt\right],$$

$$z_3 = u_4 f_{43}(t,\ \varepsilon,\ c_{43}),$$

где $f_{43}(t,\ \varepsilon,\ c_{43})$ легко получается из первого уравнения (20). Имея в виду подстановку (18), второе решение системы (16) запишем в виде

$$z = u_4 [f_{43},\ 1 + \tau_3 f_{43}].$$

При этом третье частное решение системы (14) будет

$$y_2 = u_4 f_{42}(t,\ \varepsilon,\ c_{42}),$$

$$z = u_4 [f_{43},\ 1 + \tau_3 f_{43}],$$

где $f_{42}(t, \varepsilon, c_{42})$ легко написать из первого уравнения системы (14), причем постоянная c_{42}, как и c_{43}, будет определена в дальнейшем. Согласно (12), третье частное решение системы (10) запишем так:

$$y = u_4 [f_{42},\ f_{43} + \tau_{23} f_{42},\ 1 + \tau_3 f_{43} + \tau_{24} f_{42}].$$

Тогда четвертое частное решение системы (9) будет

$$x_1 = u_4 f_{41}(t,\ \varepsilon,\ c_{41}),$$

$$y = u_4 [f_{42},\ f_{43} + \tau_{23} f_{42},\ 1 + \tau_3 f_{43} + \tau_{24} f_{42}],$$

где $f_{41}(t,\ \varepsilon,\ c_{41})$ получается из первого уравнения системы (9). На основе этих выражений по формулам (6) находим четвертое частное решение системы (4)

$$x = u_4 [f_{41},\ f_{42} + \tau_{12} f_{41},\ f_{43} + \tau_{23} f_{42} + \tau_{13} f_{41},$$
$$1 + \tau_3 f_{43} + \tau_{24} f_{42} + \tau_{14} f_{41}]. \tag{IV}$$

Нетрудно проверить, что полученная система решений ((I), (II), (III), (IV)) фундаментальная. В самом деле, вронскиан этой системы

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1\tau_{12} & x_1\tau_{13} & x_1\tau_{14} \\ y_2 f_{21} & y_2(1 + \tau_{12} f_{21}) & y_2(\tau_{23} + \tau_{13} f_{21}) & y_2(\tau_{24} + \tau_{14} f_{21}) \\ z_3 f_{31} & z_3(f_{32} + \tau_{12} f_{31}) & z_3(1 + \tau_{23} f_{32} + \tau_{13} f_{31}) & z_3(\tau_3 + \tau_{24} f_{32} + \tau_{14} f_{31}) \\ u_4 f_{41} & u_4(f_{42} + \tau_{12} f_{41}) & u_4(f_{43} + \tau_{23} f_{42} + \tau_{13} f_{41}) & u_4(1 + \tau_3 f_{43} + \tau_{24} f_{42} + \tau_{14} f_{41}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} \\ 0 & 1 & \tau_{23} & \tau_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как ни один из этих определителей не равен нулю.

Покажем, далее, что при выполнении условий (3) интегральная матрица рассматриваемой системы (4) может быть записана в виде

$$X=\exp\left(B(\varepsilon)\,t\right)\cdot Z(t,\ \varepsilon), \tag{21}$$

где матрица $B(\varepsilon)$ — постоянная относительно t, а $Z(t,\ \varepsilon)$ и $Z^{-1}(t,\ \varepsilon)$ — ограниченные матрицы. Имеем

$$X=\underbrace{\begin{Vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{Vmatrix}}_{X_1}\cdot\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{Vmatrix}}_{Z_2}\cdot\underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} \\ 0 & 1 & \tau_{23} & \tau_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}}_{Z_3}. \tag{22}$$

Во-первых, заметим, что матрица Z_3 ограниченная при $|\varepsilon|<r$ $\left(\text{в частности при } |\varepsilon|\leqslant\frac{R}{2^2}\right)$. Далее, в выражения x_1, y_2, z_3, u_4 и f_{ik}, как нетрудно заметить, явно входят только элементы p_{ik}, где $i\geqslant k$. Для x_1 это очевидно, а для остальных утверждение следует из вида матриц $Q(t,\ \varepsilon)$ и $R(t,\ \varepsilon)$.

Пусть, теперь, элементы $p_{ik}\,(i\geqslant k)$ матрицы $P(t)$ системы (4), кроме непрерывности и ограниченности, удовлетворяют условиям (3). Тогда при $|\varepsilon|<r$ имеем

$$\int_0^t(\lambda_1+\varepsilon p_{11}+\varepsilon\tau_1 P_{21})\,dt=(\lambda_1+\varepsilon a_1)\,t+\Theta_1(t,\ \varepsilon),$$

$$\int_0^t(\lambda_2+\varepsilon q_{11}+\varepsilon\tau_2 Q_{21})\,dt=(\lambda_2+\varepsilon a_2)\,t+\Theta_2(t,\ \varepsilon),$$

$$\int_0^t(\lambda_3+\varepsilon r_{11}+\varepsilon\tau_3 r_{21})\,dt=(\lambda_3+\varepsilon a_3)\,t+\Theta_3(t,\ \varepsilon),$$

$$\int_0^t(\lambda_4+\varepsilon r_{22}-\varepsilon\tau_3 r_{21})\,dt=(\lambda_4+\varepsilon a_4)\,t+\Theta_4(t,\ \varepsilon),$$

где $\Theta_k(t,\ \varepsilon)\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — ограниченная функция.

При этом, как следует из выражений x_1, y_2, z_3, и u_4, матрицу X_1 можно записать в виде

$$X_1=\exp(At)\cdot\exp Z_1,$$

где $A=\operatorname{diag}(\lambda_1+\varepsilon a_1,\ \lambda_2+\varepsilon a_2,\ \lambda_3+\varepsilon a_3,\ \lambda_4+\varepsilon a_4)$, а Z_1 — диагональная ограниченная матрица.

Чтобы доказать ограниченность Z_2, нужно доказать, что при $|\varepsilon|<r$

$$\lambda_i-\lambda_k+\varepsilon(a_i-a_k)\neq 0 \tag{23}$$

или

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varepsilon(p_{ii}-p_{kk})\,dt\neq\lambda_k-\lambda_i \qquad (i\neq k).$$

Это будет доказано, если мы покажем, что в круге $|\varepsilon|<r$

$$|\varepsilon| \sup_t |p_{ii}-p_{kk}|<|\lambda_k-\lambda_i|.$$

Согласно (*), имеем

$$|\varepsilon| \sup_t |p_{ii}-p_{kk}|<2sr\leqslant 2sR=\frac{2s}{h(\sqrt{S}+\sqrt{s})^2}\leqslant\frac{1}{2h}<|\lambda_i-\lambda_k|.$$

В случае выполнения (23) и имея в виду (3), при соответствующем подборе постоянных c_{ik} (в зависимости от знаков $\lambda_i-\lambda_k$) выражения f_{ik}, а тем самым и Z_2, при $|\varepsilon|<r$ будут ограниченными. Напр., если $\lambda_1-\lambda_2<0$, то в выражении f_{21}

$$c_{21}=\varepsilon\int_{-\infty}^{0}[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}]P_{21}\exp\left[-\int_0^t\omega_{21}(u,\ \varepsilon)\,du\right]dt,$$

а в случае $\lambda_1-\lambda_2>0$

$$c_{21}=-\varepsilon\int_{0}^{\infty}[1,\ \tau_{23},\ \tau_{24}]P_{21}\exp\left[-\int_0^t\omega_{21}(u,\ \varepsilon)\,du\right]dt.$$

Следовательно, при выполнении условий (2) и (3) интегральная матрица (22) системы (4) может быть представлена в виде (21), если $|\varepsilon|<r$ или, в частности, при $|\varepsilon|\leqslant\frac{R}{2^2}$, где R дано формулой (*). Отсюда по теореме Н. П. Еругина [6] и следует приводимость системы (4).

Пример. Пусть в системе третьего порядка вида (1) матрица

$$P_0=\operatorname{diag}(-1,\ 2e,\ -8),$$

а

$$P(t)=\begin{Vmatrix}\sin^2(\alpha_1 t)\cos^2(\alpha_2 t) & \exp[\sin(\beta_1 t)+\cos(\beta_2 t)] & \exp[\sin^2(\gamma t)]\\ \dfrac{\cos(\alpha t)}{t^2+1} & 2e\cos^2 t & \sin(\delta_1 t)\exp[\cos(\delta_2 t)]\\ 0 & \dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}\,(t+1)} & \sin^2(\omega t)\end{Vmatrix}.$$

В этом случае

$$h=\frac{1}{2e+1},\qquad s=\max\sup_t|p_{ik}|\leqslant e^2,$$

$$S=\|P(t)\|<(e+1)^2$$

и, таким образом.

$$R=\frac{1}{h(\sqrt{S}+\sqrt{s})^2}>\frac{1}{2e+1}.$$

Далее, как следует из вида матрицы $Q(t,\ \varepsilon)$, при $|\varepsilon|\leqslant\frac{1}{2e+1}$ имеем

$$s_1=\max\sup_t|q_{ik}|<2e+1<e^2,$$

$$S_1=\|Q(t,\ \varepsilon)\|<2(e+1)<(e+1)^2.$$

Следовательно, рассматриваемая система приводима в круге

$$|\varepsilon|\leqslant\frac{1}{2e+1}\approx 0{,}155.$$

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 16.X.1970

Литература

1. В. М. Меркис, Лит. матем. сб., IX, 4 (1969), 755–760.
2. Л. Я. Адрианова, Вестник ЛГУ, 7(1962), 14–24.
3. А. Е. Гельман, Известия ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), вып. XXXIX, (1959), 285–291.
4. И. Н. Блинов, Дифференциальные уравнения, I, 7(1965), 880–895.
5. И. Н. Блинов, Дифференциальные уравнения, I, 8 (1965), 1042–1053.
6. Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, XIII, 1946.

VIENOS n-MATĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS REDUKAVIMAS

V. Merkys

(*Reziumė*)

Tiriama tiesinių homogeninių diferencialinių lygčių sistema

$$\frac{dx}{dt} = x\,[P_0 + \varepsilon P(t)]; \qquad (1)$$

čia $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – vektorius eilutė, $P_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – diagonalinė matrica su pastoviais realiais elementais, tenkinančiais sąlygą

$$\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \qquad (i \neq k),$$

$P(t) = (p_{ik}(t))$ – tolydinė ir aprėžta n-tos eilės matrica ir ε-kompleksinis parametras.

Darbe gautos (1) sistemos redukavimo sąlygos.

ÜBER DIE REDUZIERBARKEIT EINES n-DIMENSIONALEN SYSTEMS DER DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

V. Merkys

(*Zusammenfassung*)

Es wird folgendes System der homogenen Differenzialgleichungen untersucht:

$$\frac{dx}{dt} = x\,[P_0 + \varepsilon P(t)].$$

Hier bedeutet $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – einen n-dimensionalen Vektor, $P_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – eine diagonale Matrix mit konstanten realen Elementen, die folgende Bedingung erfüllen

$$\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \qquad (i \neq k),$$

$P(t) = (p_{ik}(t))$ – stete und beschränkte n-dimensionale Matrix und ε – ein komplexer Parameter.

In der Abhandlung sind die Bedingungen für die Reduzierbarkeit des Gleichungsystems (1) festgestellt.