1971

УДК 517.537

О ДВОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Л. И. Трушина

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка с одной неизвестной функцией $F(z)$:

$$A(D)F(z)=G(z), \qquad B(D)F(z)=H(z), \tag{1}$$

где

$$A(D)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k, \qquad B(D)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k D^k, \qquad \left(DF(z)=\left(\frac{dF}{dz}\right)\right)$$

— дифференциальные операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами, а $G(z)$ и $H(z)$ — целые функции.

Систему (1) будем рассматривать только в случае, когда ее характеристические функции

$$A(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad B(t)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

являются целыми функциями экспоненциального типа.

Кроме того, предположим, что существует конечное число попарно непересекающихся углов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ с вершиной в начале координат, имеющих следующие свойства: а) раствор каждого из углов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ меньше π; б) все нули (за исключением их конечного числа) одной из характеристических функций, для определенности, функции $A(t)$, лежат внутри углов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а все нули (за исключением их конечного числа) другой функции $B(t)$ лежат вне этих углов; в) существуют такие постоянные C и R_0, что на сторонах всех углов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ при $|t|>R_0$ выполнено неравенство $|A(t)|>\exp(-C|t|)$, а $|B(t)|>\exp(-C|t|)$ при $|t|>R_0$, как на сторонах этих углов, так и внутри них.

Систему (1), для которой выполнены все указанные выше условия, назовем **регулярной**. Действуя оператором $A(D)$ на второе из уравнений системы (1) и оператором $B(D)$ на первое из этих уравнений, приходим к необходимому условию совместности

$$A(D)H(z)\equiv B(D)G(z). \tag{2}$$

Ниже сформулируем одну теорему о целых решениях регулярной системы (1), но прежде приведем следующее.

Определение. *Пусть $\varphi(z)$ — целая функция, порядок которой равен ρ, а тип σ. Пару чисел (ρ, σ) назовем ростом функции $\varphi(z)$. Условимся считать, что рост (ρ_1, σ_1) равен росту (ρ_2, σ_2), если $\rho_1=\rho_2$ и $\sigma_1=\sigma_2$. Если*

$\rho_1 > \rho_2$, *или при* $\rho_1 = \rho_2$ *выполняется неравенство* $\sigma_1 > \sigma_2$, *то рост* (ρ_1, σ_1) *будем считать большим роста* (ρ_2, σ_2). *Рост пары функций* $g(z)$ *и* $h(z)$ *равен наибольшему из ростов функций* $g(z)$ *и* $h(z)$.

Теорема 1. *Пусть* $G(z)$ *и* $H(z)$ — *целые функции. Если характеристические функции* $A(t)$ *и* $B(t)$ *не имеют общих нулей и выполнено условие совместности* (2), *то регулярная система* (1) *имеет единственное целое решение* $F(z)$, *рост которого равен росту пары* $\big(G(z),\ H(z)\big)$.

В работе рассматривается также случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ имеют общие нули.

§ 1. Нормальные операторы

1. Дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} D^n$$

назовем нормальным, если его характеристическая функция

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

— целая функция экспоненциального типа.

Отметим некоторые свойства нормального оператора $P(D)$.

а) Если $\Phi(z)$ — целая функция и $M(r) = \max|\Phi(z)|$ при $|z| = r$, то $|P(D) \times \Phi(z)| \leqslant C(\sigma_1) M(r + \sigma_1)$, где σ_1 — произвольное число большее типа функции $P(t)$ и $C(\sigma_1)$ — постоянная, зависящая только от σ_1 (см. [1], стр. 346).

б) Если $F_k(z)$ — целая функция и ряд

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)$$

сходится равномерно на любом ограниченном множестве, то

$$P(D) F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(D) F_k(z),$$

причем последний ряд также равномерно сходится на любом ограниченном множестве.

Это утверждение нетрудно доказать, пользуясь сказанным о свойстве *а*. Нетрудно доказывается и свойство.

в) Если $P(D)$ и $Q(D)$ — нормальные операторы, то $P(D)Q(D)$ — нормальный оператор и для любой целой функции $F(z)$

$$P(D)\,Q(D)\,F(z) = P(D)\,[Q(D)\,F(z)] = Q(D)\,[P(D)\,F(z)].$$

2. Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая и функция $g(\zeta, t)$ — непрерывна на множестве (ζ, t), $\zeta \in \Gamma$ и t — любое комплексное число. Если $g(\zeta, t)$

является целой по t при любом $\zeta\in\Gamma$, то функция

$$G(t)=\int\limits_{\Gamma} g(\zeta,\ t)\,d\zeta$$

является целой функцией.

По определению положим

$$G(D)=\int\limits_{\Gamma} g(\zeta,\ D)\,d\zeta,$$

где $G(D)$ — дифференциальный оператор с характеристической функцией $G(t)$.

Произвольно зафиксируем комплексное число α и рассмотрим дифференциальные операторы

$$K(D,\ \zeta,\ \alpha)=\frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\ \frac{\exp(\alpha D)}{\exp(\alpha\zeta)} \tag{3}$$

и

$$I(D,\ \alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\psi(\zeta)K(D,\ \zeta,\ \alpha)\,d\zeta, \tag{3a}$$

где $A(\zeta)$ — целая функция экспоненциального типа, Γ — спрямляемая жардановая кривая и $\psi(\zeta)$ — функция непрерывная на Γ.

Лемма 1. *Каковы бы ни были целая функция $H(z)$ и комплексное число α, функция $K(D,\ \zeta,\ \alpha)H(z)$ является целой по обеим переменным ζ и z. Если σ — тип функции $A(\zeta)$, то для любого $\tau>\sigma$ имеется такая постоянная C, зависящая только от τ и функции $A(\zeta)$, что в круге $|z|\leqslant r$ выполнено неравенство $|K(D,\ \zeta,\ \alpha)H(z)|<Ce^{(\tau|\zeta|-\alpha\zeta)}M(r+|\alpha|+\tau)$, где $M(r)$ — максимум модуля функции $H(z)$:*

$$M(r)=\max|H(z)|. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $a_n=A^{(n)}(0)$. Так как тип функции $A(\zeta)$ равен σ, то

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n,$$

где

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\sigma, \tag{5}$$

и

$$\varphi(t,\ \zeta)=\frac{A(t)-A(\zeta)}{t-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\ \frac{t^n-\zeta^n}{t-\zeta}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\left(t^{n-1}+t^{n-2}\zeta+\ \cdots\ +\zeta^{n-1}\right). \tag{6}$$

Поэтому

$$|\varphi(t,\ \zeta)|<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n!}\left(|t|+|\zeta|\right)^n$$

и $|a_n| < C_1\sigma_1^n$, где $\sigma < \sigma_1 < \tau$, а C_1 — постоянная, зависящая только от σ_1 и функции $A(t)$. Из этих двух неравенств следует

$$|\varphi(t, \zeta)| \leqslant C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_1{}^n}{n!} (|t|+|\zeta|)^n = C_1 \exp(\sigma_1|t|)\exp(\sigma_1|\zeta|)\,(\sigma_1 < \tau). \quad (7)$$

Функция $\varphi(t, \zeta)$ является целой функцией от обеих переменных ζ и t. Поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора

$$\varphi(t, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{k!} t^k, \quad (8)$$

где $f_k(\zeta)$ — целые функции.

Пользуясь неравенствами Коши для коэффициентов степенного ряда и оценкой (7), находим, что при любом $r > 0$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{f_k(\zeta)}{k!}\right| \leqslant \frac{\max\limits_{|t|=r} |\varphi(t, \zeta)|}{r^k} \leqslant \frac{C_1 \exp(\sigma_1 r)}{r^k} \exp(\sigma_1|\zeta|).$$

Положив в этом неравенстве $r = k/\sigma_1$, мы получаем

$$|f_k(\zeta)| \leqslant C_1 \frac{k! \exp(k)}{k^k} \sigma_1^k \exp(\sigma_1|\zeta|).$$

Следовательно, имеются такие постоянные C_2 и σ_2, $\sigma_1 < \sigma_2 < \tau$, что

$$|f_k(\zeta)| < C_2\sigma_2^k \exp(\sigma_2|\zeta|), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (9)$$

По известным оценкам для производных имеем (см. (4))

$$|H^{(k)}(z+\alpha)| \leqslant \frac{k!\, M(r+|\alpha|+\tau)}{\tau^k}. \quad (10)$$

Из $\sigma_2 < \tau$ и из неравенств (9) и (10) следует, что в круге $|z| < r$ для ряда

$$K(D, \zeta, \alpha) H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha\zeta) \frac{f^k(\zeta)}{k!} H^{(k)}(z+\alpha) \quad (11)$$

верна оценка

$$|K(D, \zeta, \alpha) H(z)| \leqslant C_2 \exp(\sigma_2|\zeta| -$$

$$-\alpha\zeta) M(r+|\alpha|+\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_2^k}{\tau^k} \leqslant C \exp(\tau|\zeta| - \alpha\zeta) M(r+|\alpha|+\tau). \quad (12)$$

Заодно мы установили и равномерную сходимость ряда (11) на любом ограниченном множестве переменных ζ и z, откуда следует, что функция $K(D, \zeta, \alpha) H(z)$ будет целой по обеим этим переменным.

Лемма 2. *Оператор* $I(D, \alpha)$ (см. (3а)) *является нормальным и для любой целой функции* $H(z)$ *выполнено равенство*

$$I(D, \alpha) H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \psi(\zeta) K(D, \zeta, \alpha) H(z)\, d\zeta. \quad (13)$$

Если σ — *тип функции* $A(\zeta)$, *то для любого* $\tau > \sigma$ *имеется такая постоянная* C, *зависящая только от* τ *и функции* $A(\zeta)$, *что в круге* $|z| \leqslant r$ *целая функция* $I(D, \alpha) H(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|I(D, \alpha) H(z)| \leqslant C\lambda M(r+|\alpha|+\tau), \quad (14)$$

где

$$\lambda=\frac{\text{длина }\Gamma}{2\pi}\max_{\zeta\in\Gamma}\left|\psi(\zeta)\frac{\exp(\tau|\zeta|)}{\exp(\alpha\zeta)}\right| \tag{15}$$

и $M(r)$ — *максимум модуля функции* $H(z)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I(t,\ \alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\zeta)K(t,\ \zeta,\ \alpha)\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\zeta)\varphi(t,\ \zeta)\frac{\exp(\alpha t)}{\exp(\alpha\zeta)}\,d\zeta,$$

где $\varphi(t,\ \zeta)$ — функция (6). Функция, стоящая под знаком последнего интеграла является целой по t при любом $\zeta\in\Gamma$ и непрерывной на множестве (ζ, t), $\zeta\in\Gamma$ и t — любое комплексное число. Поэтому $I(t,\ \alpha)$ также является целой функцией от t. Из неравенства (7) следует, что целая функция $I(t,\ \alpha)$ удовлетворяет еще неравенству

$$|I(t,\ \alpha)|\leqslant\frac{\text{длина }\Gamma}{2\pi}C_1\exp(\tau|t|+|\alpha||t|)\max\left|\psi(\zeta)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\exp(\tau|\zeta|)}{\exp(\alpha\zeta)}\right|=C_1\lambda\exp(\tau|t|+|\alpha||t|),$$

значит $I(t,\ \alpha)$ — целая функция экспоненциального типа и оператор $I(D,\ \alpha)$ — нормальный.

Как было показано, ряд (8) сходится равномерно на любом ограниченном множестве переменных ζ и t. Поэтому на кривой Γ равномерно сходится по ζ и ряд

$$\psi(\zeta)K(t,\ \zeta,\ \alpha)=\psi(\zeta)\exp(\alpha t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(\zeta)}{k!}\exp(-\alpha\zeta)t^k.$$

Следовательно,

$$I(t,\ \alpha)=\exp(\alpha t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k t^k}{k!},$$

где

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\zeta)\frac{f_k(\zeta)}{\exp(\alpha\zeta)}\,d\zeta \tag{16}$$

и

$$I(D,\ \alpha)H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}H^{(k)}(z+\alpha). \tag{17}$$

Рассмотрим теперь интеграл в правой части (13). Функцию, стоящую под знаком этого интеграла, можно пользуясь (8), записать в виде

$$\psi(\zeta)K(D,\ \zeta,\ \alpha)H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(\zeta)\frac{f_k(\zeta)}{k!}\exp(-\alpha\zeta)H^{(k)}(z+\alpha). \tag{18}$$

Из оценок (9) и (10) следует, что последний ряд сходится равномерно по ζ на кривой Γ, поэтому (см. (16) и (17))

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\zeta)K(D,\ \zeta,\ \alpha)H(z)\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H^{(k)}(z+\alpha)}{k!}\int_\Gamma \psi(\zeta)\exp(-\alpha\zeta)f_k(\zeta)\,d\zeta=I(D,\ \alpha)H(z).$$

Кроме того, из (12) легко следует

$$|I(D,\ \alpha)H(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \psi(\zeta)K(D,\ \zeta,\ \alpha)H(z)\,d\zeta\right|\leqslant C\lambda M(r+|\alpha|+\tau),$$

где C – постоянная зависящая только от τ и $A(\zeta)$, а λ – число (15).

3. Пусть $C(z)$ – целая функция и

$$K(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z\zeta}\psi(\zeta)\,\frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\,C(0)\,d\zeta, \tag{19}$$

где

$\dfrac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\,C(0)$ – значение функции $\dfrac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\,C(z)$

при $z=0$.

Лемма 3. *Пусть Γ – замкнутый жордановый контур, $A(\zeta)$ – целая функция экспоненциального типа, не равная нулю на Γ, и*

$$\psi(\zeta)=\frac{g(\zeta)}{A(\zeta)}, \tag{20}$$

где $g(\zeta)$ – функция аналитическая в замкнутой области ограниченной кривой Γ. Если $C(z)$ – целая функция и удовлетворяет уравнению

$$A(D)C(z)=0, \tag{21}$$

то

$$I(D,\ \alpha)C(z)=I(D,\ 0)C(z)=K(z), \tag{22}$$

где $I(D,\ \alpha)$ – оператор (3a) *и $K(z)$ – функция* (19).

Доказательство. Рассмотрим разность

$$I(t,\ \alpha)-I(t,\ 0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{A(\zeta)}\,\frac{A(t)-A(\zeta)}{t-\zeta}\,\frac{e^{\alpha t}-e^{\alpha\zeta}}{e^{\alpha\zeta}}\,d\zeta=I_1(t)A(t)-I_2(t),$$

где

$$I_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{A(\zeta)e^{\alpha\zeta}}\,\frac{e^{\alpha t}-e^{\alpha\zeta}}{t-\zeta}\,d\zeta,$$

$$I_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{e^{\alpha\zeta}}\,\frac{e^{\alpha t}-e^{\alpha\zeta}}{t-\zeta}\,d\zeta.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла $I_2(t)$ аналитична по ζ в замкнутой области, ограниченной кривой Γ. Поэтому $I_2(t)\equiv 0$. Так как функция

$$\psi_1(\zeta)=\frac{g(\zeta)}{A(\zeta)e^{\alpha\zeta}}$$

непрерывна на Γ и функция $e^{\alpha\zeta}$ — целая экспоненциального типа, то по лемме 2 оператор $I_1(D)$ является нормальным.

Из всего сказанного следует

$$I(D, \alpha)-I(D, 0)=I_1(D)A(D).$$

Значит (см. (21))

$$[I(D, \alpha)-I(D, 0)]C(z)=I_1(D)A(D)C(z)\equiv 0.$$

Таким образом,

$$I(D, \alpha)C(z)\equiv I(D, 0)C(z). \tag{24}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\eta, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{A(\zeta)}e^{(z-\eta)\zeta}\frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}C(\eta)\,d\zeta, \tag{25}$$

где D в этой формуле означает оператор дифференцирования по η, а не по z, как это было во всем предыдущем.

Из леммы 1 следует, что подынтегральная функция аналитична по со вокупности обеих переменных ζ и η, где $\zeta\in\Gamma$ и η — любое комплексное число. Поэтому (25) можно дифференцировать под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi(\eta, z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{g(\zeta)}{A(\zeta)}e^{(z-\eta)\zeta}\frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}DC(\eta)-\right.$$

$$\left.-\frac{g(z)}{A(\zeta)}e^{(z-\eta)\zeta}\frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\zeta C(\eta)\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{A(\zeta)}e^{(z-\eta)\zeta}A(D)C(\eta)\,d\zeta-\int_{\Gamma}g(\zeta)e^{(z-\eta)\zeta}C(\eta)\,d\zeta\right].$$

Первый из полученных интегралов равен нулю в силу (21), а второй равен нулю, так как его подынтегральная функция аналитична по η на контуре Γ и внутри эго.

Таким образом, функция $\Phi(\eta, z)$ не зависит от η и

$$\Phi(z, z)=\Phi(0, z).$$

Отсюда, пользуясь леммой 2 и равенством (19), получаем

$$I(D, 0)C(z)=K(z),$$

откуда с учетом (24) следуют равенства (22).

4. Пусть по-прежнему $A(t)$ — целая функция экспоненциального типа, $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — ее нули, имеющие соответственно кратности $s_1, s_2, \ldots$ и Γ_k — круг с центром в точке μ_k. Радиус этого круга возьмем настолько малым, чтобы все $\mu_l\,(l\neq k)$ лежали вне этого круга. По лемме 2 функция

$$A_k(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{1}{A(\zeta)}\frac{A(t)-A(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta, \tag{26}$$

где γ_k — граница круга Γ_k, является целой функцией экспоненциального типа.

Лемма 4. *Функция $A_k(t)$ в точке μ_l, $l \neq k$ имеет нуль, кратность которого не меньше S_l. Точка же μ_k является нулем, по меньшей мере кратности S_k, для функции $A_k(t)-1$.*

Доказательство. Функцию $A_k(t)$ представим в виде

$$A_k(t) = A(t) I_1(t) - I_2(t), \tag{27}$$

где

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{A(\zeta)(t-\zeta)} d\zeta,$$

$$I_2(t) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{t-\zeta} d\zeta.$$

Если точка t лежит вне круга Γ_k, то $I_2(t)=0$ и интеграл типа Коши $I_1(t)$ является аналитической функцией от t вне окружности γ_k. В частности, $I_1(t)$ аналитична в окрестности точки μ_l. Поэтому $A_k(t)=A(t)I_1(t)$ имеет в точке μ_l нуль, кратность которого не меньше S_l.

Разложим теперь функцию $A_k(t)$ по степеням $t-\mu_k$. Так как эта функция целая, то ее разложение достаточно получить для t, лежащих вне круга Γ_k. Поэтому по-прежнему $I_2(t)=0$. Для вычисления $I_1(t)$ функции $1:A(\zeta)$ и $1:(t-\zeta)$ разложим в ряды Лорана по степеням $\zeta-\mu_k$. Мы получим ряд Лорана

$$\frac{1}{A(\zeta)} = p(\zeta) + a(\zeta) = \frac{c_{-S_k}}{(\zeta-\mu_k)^{S_k}} +$$

$$+ \frac{c_{-S_k+1}}{(\zeta-\mu_k)^{S_k-1}} + \cdots C_0 + c_1(\zeta-\mu_k) + c_2(\zeta-\mu_k)^2 + \cdots \tag{28}$$

с главной частью $p(\zeta)$ и правильной часть $a(\zeta)$. Кроме того, для t, лежащих вне круга Γ_k, и $\zeta \in \gamma_k$ имеем

$$\frac{1}{t-\zeta} = \frac{1}{t-\mu_k} + \frac{\zeta-\mu_k}{(t-\mu_k)^2} + \frac{(\zeta-\mu_k)^2}{(t-\mu_k)^3} + \cdots \tag{29}$$

Перемножая ряды (28) и (29), легко убедиться, что вычет функции $1/A(\zeta)(t-\zeta)$ в точке $\zeta=\mu_k$ равен

$$p(t) = \frac{c_{-S_k}}{(t-\mu_k)^{S_k}} + \frac{c_{-S_k+1}}{(t-\mu_k)^{S_k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{t-\mu_k}.$$

Следовательно, (см. (27))

$$A_k(t) = A(t) I_1(t) = A(t) p(t) = A(t)\left[\frac{1}{A(t)} - a(t)\right] = 1 - a(t) A(t).$$

Чтобы закончить доказательство леммы, остается напомнить, что μ_k нуль кратности S_k для функции $A(t)$.

Следствие. *Пусть дифференциальный оператор*

$$A_k(D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{1}{A(\zeta)} \frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta} d\zeta \tag{30}$$

и $P_l(z)$, $l=1, 2, 3, \ldots$ — многочлен, степень которого меньше S_l. Тогда

$$A_k(D) P_k(z) e^{\mu_k z} = P_k(z) e^{\mu_k z}$$

и

$$A_k(D) P_l(z) e^{\mu_l z} = 0, \text{ если } l \neq k. \tag{31}$$

§ 2. Решение регулярной системы

1. В этом пункте докажем теорему 1 для случая регулярной системы

$$A(D)\Phi(z) = 0, \qquad B(D)\Phi(z) = C(z), \tag{32}$$

где $C(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условию совместности $A(D)C(z) \equiv 0$.

Так как $A(t)$ — целая функция экспоненциального типа, то (см. [1], стр. 210) можно выбрать неограниченно возрастающую последовательность $R_1, R_2, \ldots$ так, чтобы на окружностях $|t| = R_k$ выполнялось неравенство

$$|A(t)| > \exp(-C|t|),$$

где C — некоторая постоянная, независящая от t и k.

Такую последовательность назовем в дальнейшем A-последовательностью.

Как видно из условия совместности, целая функция $C(z)$ является решением однородного дифференциального уравнения бесконечного порядка $A(D)F(z) = 0$, где $A(D)$ — нормальный оператор. Поэтому функцию $C(z)$ можно, как показал А. О. Гельфонд (см. [1], стр. 246) представить в виде ряда многочленов Тейлора — Дирихле. Чтобы записать этот ряд, обозначим нули функции $A(t)$ через μ_l, их кратности s_l и положим, что $R_1, R_2, \ldots$ является A-последовательностью. Тогда функцию $C(z)$ можно представить равномерно сходящимся на любом ограниченном множестве комплексной плоскости рядом*

$$C(z) = Q_0(z) + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l(z), \tag{33}$$

$$Q_0(z) = \sum_{|\mu_k| < R_1} P_k(z) e^{\mu_k z}, \qquad Q_l(z) = \sum_{R_l < |\mu_k| < R_{l+1}} P_k(z) e^{\mu_k z}$$

и $P_l(z)$ — многочлен, степень которого меньше s_l. Подействуем на этот ряд нормальным оператором $A_k(D)$ (см. (30)). Пользуясь, приведенным в предыдущем параграфе, следствием, легко убедиться, что

$$A_k(D) C(z) = P_k(z) e^{\mu_k z}.$$

Применяя лемму 3 для случая $\Gamma = \gamma_k$ и $g(z) \equiv 1$, получаем

$$P_k(z) e^{\mu_k z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{e^{z\zeta}}{A(\zeta)} \frac{A(D) - A(\zeta)}{D - \zeta} C(0)\, d\zeta. \tag{34}$$

* Если $C(z)$ — функция экспоненциального типа, то $C(z)$ представляется конечной суммой функции $Q_l(z)$.

Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — ранее выбранная A-последовательность и P_{kl} область, ограниченная сторонами угла u_l и окружностями $|\zeta|=R_k$, $|\zeta|=R_{k+1}$, а p_{kl} — граница этой области. Тогда общий член $Q_k(z)$ ряда (33) можно представить в виде

$$Q_k(z)=\sum_{l=1}^{n} Q_{kl}(z), \tag{35}$$

где

$$Q_{kl}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_{kl}} \frac{e^{z\zeta}}{A(\zeta)}\, \frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\, C(0)\, d\zeta. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь ряд

$$F(z)=E_0(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} E_{kl}(z), \tag{37}$$

где

$$E_0(z)=\sum_{|\gamma_k|<R_1} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} \frac{e^{z\zeta}}{A(\zeta)B(\zeta)}\, \frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\, C(0)\, d\zeta, \tag{38}$$

$$E_{kl}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_{kl}} \frac{e^{z\zeta}}{A(\zeta)B(\zeta)}\, \frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\, C(0)\, d\zeta. \tag{39}$$

Применяя лемму 3 для случая $\Gamma=p_{kl}$ и $g(\zeta)\equiv 1/B(\zeta)$, общий член $E_{kl}(z)$ ряда (37) представим в виде

$$E_{kl}(z)=\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p_{kl}} \frac{1}{A(\zeta)B(\zeta)}\, \frac{A(D)-A(\zeta)}{D-\zeta}\, \frac{\exp(\alpha_l D)}{\exp(\alpha_l \zeta)}\, d\zeta\right\} C(z),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольно зафиксированные комплексные числа.

Заметим, что $E_{kl}(z)$ — целые функции и займемся оценкой их модуля.

В силу того, что $\{R_k\}$ является A-последовательностью и система (32) — регулярной, на кривой p_{kl} выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{A(\zeta)B(\zeta)}\right| < e^{C_1 R_{k+1}},$$

где C_1 — некоторая постоянная, независящая от k.

Кроме того, длина

$$p_{kl} \leqslant C_2 R_{k+1}, \qquad C_2 \leqslant 4\pi+2.$$

Пользуясь этими неравенствами и применяя лемму 2 $\Big($в которой берем $\alpha=\alpha_l$, $\psi(\zeta)=1/A(\zeta)B(\zeta)$ и $H(z)=C(z)\Big)$, получаем, что в круге $|z|<r$

$$\begin{aligned} |E_{kl}(z)| &\leqslant C_3 R_{k+1} \exp\left[(C_1+|\tau|)\, R_{k+1}\right] \times \\ &\times M(r+|\alpha_l|+\tau) \max_{\zeta\in p_{kl}} |\exp(-\alpha_l \zeta)|, \end{aligned} \tag{40}$$

где τ — зафиксированное число большее типа функции $A(\zeta)$, постоянная C_3 от k и R не зависит и $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|C(z)|$. Заметим, что A-последовательность $\{R_k\}$ можно (см. [1], стр. 210) выбрать так, чтобы $0<R_{k+1}-R_k<1$. Кроме того, напомним, что кривая p_{kl} лежит в замкнутом угле u_l, раствор которого меньше π.

Из последних неравенств и (40) легко заключить, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можно зафиксировать так, чтобы в круге $|z| \leqslant r$

$$|E_{kl}(z)| < \exp(-R_k) M(r + |\alpha_l| + \tau). \tag{41}$$

По этой же лемме 2 нетрудно усмотреть, что в круге $|z| \leqslant r$

$$E_0(z) < C_4 M(r + \tau), \tag{42}$$

где C_4 не зависит от R.

Заметим, что если в кольце $R_k < |z| < R_{k+1}$ не лежит ни один нуль функции $A(t)$, то соответствующие такому значению k члены $E_{kl}(z)$, $l = 1, 2, \ldots, n$ ряда (37) равны тождественно нулю. Поэтому можно считать, что ряд (37) суммируется только по натуральным k, для которых в кольце $R_k < |z| < R_{k+1}$ попадает хотя бы один нуль функции $A(t)$. Так как функция $A(t)$ — целая экспоненциального типа, то для указанных k последовательность соответствующих $\{R_k\}$ имеет показатель сходимости не больше единицы и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-R_k) < \infty. \tag{43}$$

Из оценок (41), (42) и (43) следует, что в круге $|z| \leqslant r$ ряд (37) равномерно сходится и

$$|F(z)| < C_5 M(r + |\alpha| + \tau), \tag{44}$$

где постоянная C_5 не зависит от r и

$$|\alpha| = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|).$$

Таким образом $F(z)$ — целая функция, рост которой не больше роста функции $C(z)$.

Покажем теперь, что сумма $F(z)$ ряда (37) является решением системы (4). Нетрудно проверить, что действуя некоторым нормальным оператором $N(D)$ на функцию вида

$$\chi(z) = \int\limits_{\Gamma} e^{z\zeta} \psi(\zeta)\, d\zeta,$$

где Γ — жордановая кривая и $\psi(\zeta)$ непрерывная Γ функция, получаем

$$N(D)\chi(z) = \int\limits_{\Gamma} N(\zeta) e^{z\zeta} \psi(\zeta)\, d\zeta.$$

Поэтому (см. (36) и (39))

$$A(D) E_{kl}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p_{kl}} \frac{e^{z\zeta}}{B(\zeta)} \frac{A(D) - A(\zeta)}{D - \zeta} C(0)\, d\zeta \tag{45}$$

и

$$B(D) E_{kl}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p_{kl}} \frac{e^{z\zeta}}{A(\zeta)} \frac{A(D) - A(\zeta)}{D - \zeta} C(0)\, d\zeta = Q_{kl}(z).$$

Из леммы 1 и условия $B(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in p_{kl}$, следует, что подынтегральная функция в (45) аналитична по ζ в замкнутой области P_{kl}. Следовательно,

$$A(D) E_{kl}(z) \equiv 0.$$

Аналогично показываем, что

$$A(D)E_0(z)=0, \qquad B(D)E_0(z)=Q_0(z).$$

Из всего сказанного следует (см. (33) и (35)), что $F(z)$ – решение системы (32).

Заметим еще (см. [1], стр. 345), что рост $C(z)=B(D)F(z)$ не больше роста функции $F(z)$, но раньше мы доказали, что рост $F(z)$ не больше роста $C(z)$. Значит рост $F(z)$ равен росту функции $C(z)$.

Нам осталось еще показать, что $F(z)$ – единственное целое решение системы (32). Это следует из того, что характеристические функции $A(t)$ и $B(t)$ не имеют общих нулей и поэтому (см. [1], стр. 364) однородная система

$$A(D)F(z)=0, \qquad B(D)F(z)=0$$

помимо тривиального решения $F(z)\equiv 0$ других целых решений не имеет.

2. Рассмотрим совместную регулярную систему (1) с целыми правыми частями $G(z)$ и $H(z)$.

Первое из уравнений этой системы

$$A(D)F(z)=G(z)$$

имеет (см. [1], стр. 359) целое решение $F(z)=F_0(z)$, рост которого равен росту целой функции $G(z)$.

Заменой $F(z)=F_0(z)+\Phi(z)$ система (1) сводится к изученной нами ранее совместной регулярной системе (32), где

$$C(z)=H(z)-B(D)F_0(z).$$

Используя результаты предыдущего пункта, несложным рассуждением убедимся в справедливости теоремы 1.

3. В теореме 1 мы предполагали, что пара характеристических функций не имеет общих нулей. Откажемся частично от этого ограничения и заметим, что пара функций $A(t)$ и $B(t)$, в силу регулярности системы (1), может иметь только конечное число общих нулей. Поэтому наибольший общий делитель $K(t)$ пары $\big(A(t),\ B(t)\big)$ является многочленом.

Теорема 2. *Пусть* $\big(A(t),\ B(t)\big)$ – *пара характеристических функций регулярной системы* (1), $K(t)$ – *наибольший общий делитель этой пары, а*

$$A_1(t)=\frac{A(t)}{K(t)}, \qquad B_1(t)=\frac{B(t)}{K(t)}.$$

Для того, чтобы регулярная совместная система (1) *с целыми правыми частями* $G(z)$ *и* $H(z)$ *имела хотя бы одно целое решение* $F_0(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$A_1(D)H(z)\equiv B_1(D)G(z). \tag{46}$$

Если это условие выполнено, то общее целое решение системы (1) *имеет вид*

$$F(z)=F_0(z)+F_1(z),$$

где $F_1(z)$ – *любое целое решение дифференциального уравнения конечного порядка* $K(D)F(z)=0$. *Если рост пары* $\big(G(z),\ H(z)\big)$ *не меньше роста* $(1,\ \infty)$, *то рост любого целого решения $F(z)$ системы* (1) *равен росту пары* $\left(G(z),\ H(z)\right)$.

Доказательство. Замена $K(D)F(z)=\Phi(z)$ переводит систему (1) в

$$A_1(D)\Phi(z)=G(z), \qquad B_1(D)\Phi(z)=H(z).$$

Нетрудно проверить, что последняя система удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и имеет поэтому единственное целое решение $\Phi(z)=\Phi_0(z)$, рост которого равен росту пары $\left(G(z),\ H(z)\right)$. Учитывая сделанную замену, приходим к дифференциальному уравнению конечного порядка с постоянными коэффициентами

$$K(D)F(z)=\Phi_0(z),$$

имеющему те же решения, что и система (1) а отсюда уже легко следует справедливость теоремы 2.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
29.X.1970

Литература

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.–Л., 1967.
2. Л. И. Трушина, О двойной неоднородной системе разностных уравнений, Лит. матем. сб., XI, 2(1971), 151–163.

BEGALINĖS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ DVILYPĖS SISTEMOS

L. Trušina

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjama dvilypės diferencialinių lygčių sistemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F^{(k)}(z)=G(z), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k F^{(k)}(z)=H(z)$$

sveiki sprendiniai $F(z)$. Tarkime, kad a_k, b_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, yra kompleksiniai skaičiai ir $G(z)$, $H(z)$ – bet kurios sveikos funkcijos.

Tas atvejis, kai $G(z)$ ir $H(z)$ yra sveikos eksponentinio tipo funkcijos, buvo anksčiau nagrinėtas [2] darbe.

ÜBER ZWEIFACHE INHOMOGENE SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UNENDLICHER ORDNUNG

L. Truschina

(*Zusammenfassung*)

In dieser Arbeit untersuchen wir die ganzen Lösungen F (z) des zweifachen Systems von Differentialgleichungen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F^{(k)}(z)=G(z), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k F^{(k)}(z)=H(z),$$

wo a_k, b_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, komplexe Zahlen und $G(z)$, $H(z)$ beliebige ganze Funktionen bedeuten.

Den Fall, wenn die ganze Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ vom Exponentialtypus sind, haben wir chon früher in der Arbeit [2] untersucht.