XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 3
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 533.59

ТРИНАДЦАТИМОМЕНТНАЯ СИСТЕМА ПРИБЛИЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ АЭРОМЕХАНИКИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

В. И. Скакаускас

В работе [1] предложен общий метод для получения приближенных уравнений аэромеханики разреженных газов. В настоящей заметке, используя конкретное представление функции f^*, введенной в [1], получена замкнутая система приближенных интегральных уравнений для плотности n, скорости $\mathbf{v}$, температуры θ, тензора напряжений P и вектора потока тепла $\mathbf{q}$.

В интегральном представлении функции распределения

$$f(\mathbf{r},\mathbf{u})=\begin{cases}\dfrac{\tilde{\Phi}^*}{|u_n|}\,e^{-\sigma_0\int\limits_{\tau_s}^{0} n(\mathbf{r}+\tau\mathbf{u})\,d\tau}+\int\limits_{\tau_s}^{0}\Phi^*(\mathbf{r}+\tau\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,e^{-\sigma_0\int\limits_{\tau}^{0} n(\mathbf{r}+\xi\mathbf{u})\,d\xi}\,d\tau, & \mathbf{u}\in\Omega,\\[2ex] \int\limits_{-\infty}^{0}\Phi^*(\mathbf{r}+\tau\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,e^{-\sigma_0\int\limits_{\tau}^{0} n(\mathbf{r}+\xi\mathbf{u})\,d\xi}\,d\tau, & \mathbf{u}\,\bar{\in}\,\Omega,\end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}^*=\int\limits_{u_{1n}\leqslant 0}|u_{1n}|\,\tilde{T}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\Phi^*(\mathbf{r}_s+\tau\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_1)\,e^{-\sigma_0\int\limits_{\tau}^{0} n(\mathbf{r}_s+\xi\mathbf{u}_1)\,d\xi}\,d\tau\right)d\xi,$$

$$\Phi^*(\mathbf{r},\,\mathbf{u})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int gb\,db\,d\varepsilon f_1^{*\prime}f^{*\prime}\,d\mathbf{u}_1, \tag{1}$$

взятом из [1], в качестве f^* возьмем функцию

$$f^*=f^{(0)}\left\{1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\left(C^2-\frac{5}{2}\right)+B:\mathbf{C}^0\mathbf{C}\right\},$$

$$f^{(0)}=n\left(\frac{m}{2\pi k\theta}\right)^{3/2}e^{-C^2},\quad C^2=\frac{m}{2k\theta}(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2,$$

где: n, θ, $\mathbf{v}$, $\mathbf{A}$, B – тринадцать неизвестных скалярных функций (n, θ – скаляры, $\mathbf{v}$, $\mathbf{A}$ – векторы, B – симметричный бездивергентный тензор); обозначения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^0\mathbf{C}$, $B:\mathbf{C}^0\mathbf{C}$ заимствованы из [2] и означают скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, бездивергентный тензор, двойное произведение тензоров B, $\mathbf{C}^0\mathbf{C}$.

Подставляя (1) в уравнение Больцмана, умножая результат подстановки на некоторую функцию Ψ, интегрируя по всему пространству скоростей и проводя некоторые преобразования, как показано в [1], получим уравнение

$$\int gb\,db\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f_1^*f^*\int\limits_{0}^{2\pi}\Psi'\,d\varepsilon\,d\mathbf{u}_1\,d\mathbf{u}=$$

$$=\int gb\,db\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f_1 f\int\limits_{0}^{2\pi}\Psi'\,d\varepsilon\,d\mathbf{u}_1\,d\mathbf{u}. \tag{2}$$

Полагая в (2) $\Psi=1$, $\mathbf{u}$, u^2, как и в [1], получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^* d\mathbf{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u} f^* d\mathbf{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u} f d\mathbf{u}, \tag{4}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 f^* d\mathbf{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 f d\mathbf{u}. \tag{5}$$

Полагая в (2) $\Psi=\mathbf{C}\mathbf{C}$, $C^2\mathbf{C}$ и используя для вычислений интегралов равенства:

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}' = \mathbf{g}\cos\chi + g\sin\chi\,(\mathbf{h}\cos\varepsilon + \mathbf{i}\sin\varepsilon),\\ &\frac{\mathbf{g}\mathbf{g}}{g^2} + \mathbf{h}\mathbf{h} + \mathbf{i}\mathbf{i} = U,\\ &\mathbf{h}\wedge\mathbf{i} = \frac{\mathbf{g}}{g}, \end{aligned} \tag{6}$$

заимствованные из [2] вместе с обозначениями, получим уравнения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{C} f^* d\mathbf{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{C} f d\mathbf{u}, \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C^2\mathbf{C} f^* d\mathbf{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C^2\mathbf{C} f d\mathbf{u}. \tag{8}$$

В системе (3), (4), (5), (7), (8) число независимых уравнений (уравнение (5) является следствием уравнений (7), (3), (4)) равно числу неизвестных функций, следовательно система замкнута.

Используя равенства (6) и основные теоремы о диадах и тензорах, приведенные в [2], после громоздких вычислений, получим

$$\Phi^* = f^{(0)} F, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} F = {} & 2\pi_0\sigma_0 n + \frac{\pi}{2}(4\sigma_0 - 3\sigma_1) n B : \mathbf{C}^0\mathbf{C} + \pi(2\sigma_0 - \sigma_1) n \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\left(C^2 - \frac{5}{2}\right) + \\ & + \frac{\pi n}{4}\left\{ \sigma_1\left[-\frac{1}{2} B:B - (B:\mathbf{C}^0\mathbf{C})^2 + 2(\mathbf{C}\cdot B)^2\right] + \right.\\ & + \sigma_2\left[-\frac{7}{16} C^2 B:B + \frac{35}{16}(B:\mathbf{C}^0\mathbf{C})^2 + \left(\frac{7}{8} - C^2\right)(\mathbf{C}\cdot B)^2 + \right.\\ & \left.\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{2} + C^2\right)\mathbf{C}\mathbf{C}:E\right]\right\} + \\ & + \frac{\pi n}{8}\left\{ \sigma_1[\mathbf{A}\mathbf{C}:B(2C^2 - 7) + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\mathbf{C}^0\mathbf{C}: B(9 - 2C^2)] + \right.\\ & \left. + \sigma_2\left[\mathbf{A}\mathbf{C}:B(9 - 2C^2)C^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\mathbf{C}^0\mathbf{C}:B\,5\left(C^2 - \frac{9}{2}\right)\right]\right\} + \\ & + \frac{\pi n}{8}\left\{ \sigma_1[-A^2 C^6] + \sigma_2\left[A^2\left(-\frac{63}{8}C^2 + \frac{9}{2}C^4 + \frac{5}{4}C^6\right) + \right.\right.\\ & \left.\left. + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})^2\left(\frac{189}{8} - \frac{27}{2}C^2 + \frac{3}{2}C^4\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

где:

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\, v_*^2 \left(\frac{2\varkappa}{m}\right)^{1/2}, \quad \sigma_1=\int\limits_0^{v_*} \sin^2\chi\, v_0\, dv_0 \left(\frac{2\varkappa}{m}\right)^{1/2},$$

$$\sigma_2=\int\limits_0^{v_*} \sin^4\chi\, v_0\, dv_0 \left(\frac{2\varkappa}{m}\right)^{1/2},$$

в которых m — масса частицы, $\varkappa$ — постоянная, определяющая потенциал взаимодействия частиц, v_* при фиксированном χ_* определяется из уравнений

$$\chi_*=\pi-2\int\limits_0^{v_{00}} \left\{1-v^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{v_*}\right)^4\right\}^{-1/2} dv,$$

$$1-v_{00}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v_{00}}{v_*}\right)^4=0;$$

$$E=\begin{pmatrix} B_{yz}^2-B_{yy}B_{zz} & B_{xy}B_{zz}-B_{xz}B_{zy} & B_{xz}B_{yy}-B_{xy}B_{yz} \\ B_{xy}B_{zz}-B_{xz}B_{zy} & B_{xz}^2-B_{xx}B_{zz} & B_{xx}B_{yz}-B_{xz}B_{yx} \\ B_{xz}B_{yy}-B_{xy}B_{yz} & B_{xx}B_{yz}-B_{xz}B_{yx} & B_{xy}^2-B_{xx}B_{yy} \end{pmatrix}.$$

После очевидных вычислений уравнения (3), (4), (5), (7), (8) запишем в виде

$$\begin{cases} n=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\, d\mathbf{u}, \\ n\mathbf{v}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u} f\, d\mathbf{u}, \\ n\left(\frac{3k}{m}\,\theta+v^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2 f\, d\mathbf{u}, \\ \frac{1}{2}\, n\,(U+B)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{C} f\, d\mathbf{u}, \\ \frac{5}{4}\, n\mathbf{A}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} C^2\mathbf{C} f\, d\mathbf{u}, \end{cases} \tag{11}$$

где f записана формулами (1), (9), (10), а U — единичный тензор.

Тензор напряжений P и вектор теплового потока $\mathbf{q}$ связан с $\mathbf{A}$ и B соотношениями

$$\begin{cases} P=p\,(U+B), \\ \mathbf{q}=\frac{5}{4}\, p\left(\frac{2k}{m}\,\theta\right)^{1/2}\mathbf{A}, \end{cases} \tag{12}$$

где p гидростатическое давление. Поэтому для практических целей, используя (12), можно исключить $\mathbf{A}$, B, а систему (11) и функцию Φ^* записать относительно P, $\mathbf{q}$.

Примечание 1. Шесть уравнений (7) и три уравнения (8) получены для произвольной f^* и независимо друг от друга, однако с использованием уравнений (3), (4), (5). Поэтому в представлении f^* можно произвольно опускать некоторые компоненты вектора $\mathbf{A}$ и тензора B, а для оставленных компонент вместе с n, $\mathbf{v}$, θ получить замкнутую систему уравнений.

Примечание 2. Полагая в (9), (10)

$$\mathbf{A}=\frac{4}{5}\,\frac{1}{p}\left(\frac{m}{2k\theta}\right)^{1/2}\mathbf{q},\quad B=-\frac{2\mu}{p}\,\overset{0}{\overline{\overline{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}}}},\quad \mathbf{q}=-\lambda\,\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{r}},$$

получим точное выражение интеграла обратных столкновений, в котором подставлена функция второго приближения по методу Чепмена — Энскога. Используя последнее, мы можем выписать точные пять интегродифференциальных уравнений, предложенных в [3], в которых выброшены члены порядка числа kn^2.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
5.X.1970

Литература

1. В. И. Скакаускас, Использование интегральных представлений функции распределения для получения приближенных уравнений аэродинамики разреженных газов, Вестник ЛГУ, № 7, 1971.
2. С. Чепмен и Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ М., 1960.
3. В. И. Скакаускас, Приближенный метод решения задач аэромеханики разреженных газов, Вестник ЛГУ, № 19, 1970.

PRARETINTŲ DUJŲ AEROMECHANIKOS 13 MOMENTŲ ARTUTINIŲ LYGČIŲ SISTEMA

V. Skakauskas

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje, naudojant artutinę integralinę pasiskirstymo funkcijos išraišką, gauta uždara artutinių integralinių lygčių sistema Maksvelo dujoms tankiui, greičiui, temperatūrai, įtempimų tenzoriui ir šilumos laidumo vektoriui.

THE SYSTEM OF 13-MOMENT APPROXIMATE EQUATIONS THE RAREFIED GAS AERODYNAMICS

V. Skakauskas

Su mmary)

Applying approximate integro-differential expression of the distribution function for the Maxwell gas, a closed system of the approximate integral equations is proposed for density, velocity temperature, stress tensor and vector of heat conduction.