1971

УДК 519.21

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ

А. А. Миталаускас

Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

с функцией распределения $F(x)$. Пусть $G_\alpha(x, \lambda)$ – функция распределения устойчивого закона с характеристическим показателем α и параметром λ. Введем „псевдомоменты"

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \, d[F(x) - G_\alpha(x, 1)]$$

для целых неотрицательных i и „абсолютные псевдомоменты"

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r \, |d[F(x) - G_\alpha(x, 1)]|$$

для любых $r \geqslant 0$.

Если $\nu_\varkappa < \infty$, где $\varkappa = 1 + [\alpha]$, а $[\alpha]$ – целая часть α, то $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона.

В случае нормального предельного закона В. Паулаускасом [1] получена оценка

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant c_0 \frac{\max\left(\nu_3, \nu_3^{\frac{1}{4}}\right)}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

для всех n. Здесь $F_n(x)$ – функция распределения нормированной суммы случайных величин, $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона, c_0 – абсолютная константа.

Целью данной работы является получение аналогичной оценки для случая устойчивого предельного закона.

В дальнейшем исключим из рассмотрения особый случай $\alpha = 1$. Будем считать, что для последовательности (1) $\nu_\varkappa < \infty$. Нетрудно добиться, чтобы $\mu_i = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant [\alpha]$. Тогда для (1) интегральная предельная теорема имеет место при нормирующих константах $A_n = 0$, $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Обозначим

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{ n^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i < x \right\}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Для всех натуральных n имеет место оценка*

$$R_n = \sup_x |F_n(x) - G_\alpha(x, 1)| \leqslant c \frac{\max\left(\nu_\varkappa, \nu_\varkappa^{\frac{1}{1+\varkappa}}\right)}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}. \tag{3}$$

Здесь $c = c(\alpha)$ — константа, зависящая только от показателя предельного закона α.

В дальнейшем буквой c с индексами будем обозначать константу, зависящую только от α. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Для устойчивой функции распределения имеют место следующие соотношения:*

а) *для натуральных k*

$$\left| \frac{d^k G_\alpha(x, \lambda)}{dx^k} \right| \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{k}{\alpha}}, \tag{4}$$

б) *для $h > 0$*

$$\sup_x \int_x^{x+h} dG_\alpha(x, \lambda) \leqslant h \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{5}$$

в)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^{\varkappa+1} G_\alpha(x, \lambda)}{dx^{\varkappa+1}} \right| dx \leqslant c_1 \lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}. \tag{6}$$

Доказательство.

а) Имеем

$$\left| \frac{d^k G_\alpha(x, \lambda)}{dx^k} = \frac{(-i)^{k-1}}{2\pi} \right| \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} e^{-itx} g_\alpha(t, \lambda)\, dt.$$

Отсюда

$$\left| \frac{d^k G_\alpha(x, \lambda)}{dx^k} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{k-1} e^{-\lambda|t|^\alpha} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

Отсюда, в частности,

$$\left| \frac{dG_\alpha(x, \lambda)}{dx} \right| = \frac{dG_\alpha(x, \lambda)}{dx} \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

б) По теореме о среднем значении

$$\sup_x \int_x^{x+h} dG_\alpha(x, \lambda) = h \sup_x \frac{dG_\alpha(x, \lambda)}{dx} \leqslant h \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

в) Для $\alpha \neq 1$

$$G_\alpha(x, \lambda) = G_\alpha(x\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}, 1)$$

(см., напр., [2]). Обозначив $x\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}=y$ для натуральных k имеем

$$\frac{d^k G_\alpha(x, \lambda)}{dx^k}=\lambda^{-\frac{k}{\alpha}} \frac{d^k G_\alpha(y, 1)}{dy^k}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{\varkappa+1} G_\alpha(x, \lambda)}{dx^{\varkappa+1}}\right| dx=\lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{\varkappa+1} G_\alpha(y, 1)}{dy^{\varkappa+1}}\right| dy\leqslant c_1 \lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{\varkappa+1} G_\alpha(y, 1)}{dy^{\varkappa+1}}\right| dy\leqslant c_1<\infty,$$

что нетрудно выводится из асимптотики плотностей и их производных (см. [3], § 4).

Лемма 2. *Для* $\lambda>0$ *и* $0<\alpha<2$ *имеет место неравенство*

$$\sup_x |F(x)-G_\alpha(x, 1)|\leqslant c_2\sup_x |[F(x)-G_\alpha(x, 1)] * G_\alpha(x, \lambda)|+c_3\lambda^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим

$$\Omega(x)=F(x)-G_\alpha(x, 1),$$

$$\delta=\sup_x|\Omega(x)|, \quad \delta'=\sup_x|\Omega(x) * G_\alpha(x, \lambda)|.$$

Пусть для определенности $\delta=\sup\limits_x\left(-\Omega(x)\right)$ (случай $\delta=\sup\limits_x \Omega(x)$ доказывается аналогично). Введем некоторое $0<\varepsilon<\frac{\delta}{2}$ и обозначим

$$E_\varepsilon=\{x:\Omega(x)\leqslant-\delta+\varepsilon\},$$

$$E_\varepsilon^h=\{x:x\pm h\in E_\varepsilon\}.$$

Тогда для любого $|z|<h$, $h>0$ можем писать

$$\int_{x\in E_\varepsilon^h} d\Omega(x-z)=\int_{x\in E_\varepsilon^h} dF(x-z)-\int_{x\in E_\varepsilon^h} dG_\alpha(x-z, 1)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x\in E_\varepsilon} d\Omega(x)+\int_{x\in E_\varepsilon} dG_\alpha(x, 1)-\int_{x\in E_\varepsilon^h} dG_\alpha(x-z, 1)\leqslant$$

$$\leqslant-\delta+\varepsilon+\sup_x\int_x^{x+2h} dG_\alpha(x, 1)\leqslant-\delta+\varepsilon+2h\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}<0,$$

если только

$$h\leqslant\delta\,\frac{\pi\alpha}{4\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Далее имеем

$$\delta' \geqslant \sup_{x \in E_\varepsilon^h} |\Omega(x) * G_\alpha(x, \lambda)| =$$

$$= \sup_{x \in E_\varepsilon^h} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(x-z)\, dG_\alpha(z, \lambda) \right| \geqslant \inf_{x \in E_\varepsilon^h} \left| \int_{|z|<h} \Omega(x-z)\, dG_\alpha(z, \lambda) \right| -$$

$$- \sup_{x \in E_\varepsilon^h} \left| \int_{|z| \geqslant h} \Omega(x-z)\, dG_\alpha(z, \lambda) \right| \geqslant \inf_{x \in E_\varepsilon^h} \int_{|z|<h} |\Omega(x-z)|\, dG_\alpha(z, \lambda) -$$

$$- \sup_{x \in E_\varepsilon^h} \int_{|z| \geqslant h} |\Omega(x-z)|\, dG_\alpha(z, \lambda) \geqslant \inf_{x \in E_\varepsilon^h} |\Omega(x-z)| \int_{|z|<h} dG_\alpha(z, \lambda) -$$

$$- \sup_{x \in E_\varepsilon^h} |\Omega(x-z)| \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda) \geqslant$$

$$\geqslant \left| -\frac{\delta}{2} + \varepsilon \right| \left(1 - \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda) \right) - \delta \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda) =$$

$$= \frac{\delta}{2} - \varepsilon - \left(\frac{3}{2}\,\delta - \varepsilon \right) \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda).$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, в пределе получаем

$$\delta' \geqslant \frac{\delta}{2} - \frac{3}{2}\,\delta \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda),$$

откуда

$$\delta \leqslant 2\delta' + 3\delta \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda). \tag{8}$$

Пусть $\lambda^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{h}{N_0}$, где N_0 достаточно большое число. Тогда

$$\int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda) = \int_{|z| \geqslant \frac{h}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}} dG_\alpha(z, 1) \leqslant \frac{c_0'}{\left(\frac{h}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^\alpha} \leqslant \frac{c_0'}{N_0^\alpha} \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

Поэтому

$$\delta \leqslant 2\,\delta' + 3\,\delta \cdot \frac{1}{4}\,,$$

откуда $\delta \leqslant 8\,\delta'$. Если же

$$\lambda^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \frac{h}{N_0}\,,$$

тогда положив

$$h = \delta\, \frac{\pi\alpha}{4\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\,, \text{ получаем}$$

$$\delta \leqslant 2\delta' + 3 \cdot \frac{4\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\, h \int_{|z| \geqslant h} dG_\alpha(z, \lambda) \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta' + \frac{12\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) h}{\pi\alpha} \leqslant 2\delta' + \frac{12\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha}\, N_0\, \lambda^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда видим, что лемма всегда справедлива при $c_2=8$,

$$c_3=\frac{12\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)N_0}{\pi\alpha}.$$

Для упрощения записи введем еще следующее обозначение:

$$\rho=\rho(\nu_\varkappa)=\begin{cases}1 & \text{при } \nu_\varkappa\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{1+\varkappa} & \text{при } \nu_\varkappa<1.\end{cases} \tag{9}$$

В этих обозначениях утверждение теоремы (3) принимает вид:

$$R_n\leqslant\frac{c\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}. \tag{10}$$

Введем еще

$$i_0=c^{\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}}\,\nu_\varkappa^{\frac{\alpha\rho}{\varkappa-\alpha}}.$$

Лемма 3. *При*

$$n\geqslant 2,\ 0<\lambda<\frac{1}{2}\ \text{ и }\ n_0=\min\{i_0,\ n-1\}$$

справедливы оценки

$$S_1=\sum_{1\leqslant i\leqslant n_0}\frac{1}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant c_4n+c_5\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+c_6\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}, \tag{11}$$

$$S_2=\sum_{n_0<i\leqslant n-1}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant c_7\frac{n}{c\nu_\varkappa^\rho}+c_8\frac{n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+c_9\frac{n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства (11) рассмотрим два случая: 1) $n_0+1\leqslant\frac{3}{4}n$ и 2) $n_0+1>\frac{3}{4}n$.

1) $$S_1\leqslant\int_0^{i_0}\frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\frac{n}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\frac{n}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}<4^{\frac{\varkappa}{\alpha}}c_{10}(n+1),$$

где

$$c_{10}=\max\left(1, \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\right).$$

Так как $n+1<2n$, то

$$S_1\leqslant c_4 n,$$

где

$$c_4=4^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\cdot 2c_{10}.$$

2) $$S_1\leqslant\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\frac{n}{\left(1-\frac{n_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{n_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\frac{n}{\lambda^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\frac{1}{\lambda^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}=\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\frac{c\nu_\varkappa^\rho n}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\lambda^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\frac{n\cdot n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant$$

$$\leqslant c_5\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+c_6\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}},$$

где

$$c_5=\frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}},\quad c_6=4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}.$$

Отсюда уже следует (11).

Очевидно, что $S_2=0$ при $i_0\geqslant n-1$. Рассмотрим случай $i_0<n-1$.

$$S_2=\sum_{i_0<i\leqslant\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}+$$

$$+\sum_{\frac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-1}\frac{1}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}=S_{21}+S_{22}.$$

Для S_{21} имеем

$$S_{21}\leqslant\int\limits_{i_0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{dx}{x^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}+\frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left(1-\frac{i_0+1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}+$$

$$+\frac{2^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{(n-1)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\lambda\right]^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}=I_1+I_2+I_3.$$

Оценим I_1:

$$I_1 \leqslant \frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \int\limits_{i_0}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha} \frac{n}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\lambda\right]^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha} \frac{2^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} n}{c\nu_\varkappa^\rho \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \leqslant \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha} \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} n}{c\nu_\varkappa^\rho}.$$

Далее, для I_2 получаем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \left(1-\frac{i_0+1}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}{c\nu_\varkappa^\rho} \quad \text{при} \quad i_0+1 \leqslant \frac{3}{4} n,$$

$$I_2 \leqslant \frac{1}{i_0^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \lambda^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \quad \text{при} \quad i_0+1 > \frac{3}{4} n.$$

Наконец

$$I_3 \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \lambda^{\frac{\varkappa}{\alpha}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{\varkappa}{\alpha}} n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}},$$

Оценим сумму S_{22}:

$$S_{22} \leqslant \frac{2^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{(n-1)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \sum_{\frac{1}{2}(n-1)<i\leqslant n-1} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{i}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \int\limits_{\frac{1}{2}(n-1)}^{n-1} \frac{dx}{\left(1-\frac{1}{n}+\lambda-\frac{x}{n}\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} + \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \lambda^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha} \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} + \frac{4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}.$$

Отсюда окончательно придем к (12), если обозначим

$$c_7 = \left(4 + \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha}\right) 4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}},$$

$$c_8 = \frac{\alpha}{\varkappa-\alpha} \cdot 4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}},$$

$$c_9 = (2^{\frac{\varkappa}{\alpha}}+2)\, 4^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}.$$

Доказательство теоремы. Введем

$$\bar{F}_n(x) = \mathbf{P}\left\{ \xi_k n^{-\frac{1}{\alpha}} < x \right\}.$$

Тогда, если i-кратную свертку функции $F(x)$ обозначить $F^i(x)$, следуя [1], имеем

$$[F_n(x) - G_\alpha(x, 1)] * G_\alpha(x, \lambda) = \left[\bar{F}_n^n(x) - G_\alpha^n\left(x, \frac{1}{n}\right)\right] * G_\alpha(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{F}_n^i(x) * G_\alpha^{n-i-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) * G_\alpha(x, \lambda) * \left[\bar{F}_n(x) - G_\alpha\left(x, \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\bar{F}_n^i(x) - G_\alpha^i\left(x, \frac{1}{n}\right)\right) * G_\alpha^{n-i-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) * G_\alpha(x, \lambda) + \right.$$

$$\left. + n\, G_\alpha^{n-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) * G_\alpha(x, \lambda)\right] * \left[\bar{F}_n(x) - G_\alpha\left(x, \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n-1} V_i(x) + n\, V_0(x)\right] * \left[\bar{F}_n(x) - G_\alpha\left(x, \frac{1}{n}\right)\right],$$

где обозначили

$$V_0(x) = G_\alpha^{n-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) * G_\alpha(x, \lambda),$$

$$V_i(x) = \left[\bar{F}_n^i(x) - G_\alpha^i\left(x, \frac{1}{n}\right)\right] * G_\alpha^{n-i-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) * G_\alpha(x, \lambda)$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. Сначала покажем, что теорема справедлива при $n = 1$, т. е.

$$R_1 = \sup_x |F_1(x) - G_\alpha(x, 1)| \leqslant c\, \nu_\varkappa^\rho. \tag{13}$$

Очевидно, при $\nu_\varkappa \geqslant 1$ это неравенство тривиальным образом выполняется для всех $c \geqslant 1$, поэтому займемся случаем $\nu_\varkappa < 1$. Ввиду того, что $\mu_i = 0$

для всех $0 \leqslant i \leqslant \varkappa - 1$, разложение $G_\alpha(x, \lambda)$ в ряд Тейлора и применение (4) дает

$$\sup_x | G_\alpha(x, \lambda) * [F_1(x) - G_\alpha(x, 1)]| =$$

$$= \sup_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(x-y, \lambda)\, d[F_1(y) - G_\alpha(y, 1)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa!} \sup_x \left| \frac{d^\varkappa (G_\alpha(x, \lambda)}{dx^\varkappa} \right| \int_{-\infty}^{\infty} |y|^\varkappa \, |\, d\, [F_1(y) - G_\alpha(y, 1)] \,| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu_\varkappa}{\varkappa!} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}.$$

Поэтому, применив лемму 2, получаем

$$R_1 \leqslant \frac{c_2 \nu_\varkappa}{\varkappa!} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}} + c_3 \lambda^{\frac{1}{\alpha}} = c_{11} \nu_\varkappa \lambda^{-\frac{\varkappa}{\alpha}} + c_3 \lambda^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{14}$$

Выбрав $\lambda^{\frac{1}{\alpha}} = c_{12} \nu_\varkappa^{\frac{1}{1+\varkappa}}$ имеем

$$R_1 \leqslant (c_{11} c_{12}^{-\varkappa} + c_3 c_{12}) \nu_\varkappa^{\frac{1}{1+\varkappa}} \leqslant c \nu_\varkappa^{\frac{1}{1+\varkappa}}$$

для всех $c \geqslant c_{11} c_{12}^{-\varkappa} + c_3 c_{12}$. Случай $n=1$ доказан.

Предположим, что наше утверждение верно для всех $i \leqslant n-1$, и покажем, что оно верно и для $i=n$. Итак, по предположению

$$R_i \leqslant \frac{c \nu_\varkappa^\rho}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{15}$$

Разложение функции $V_i(x)$ в ряд Тейлора дает

$$\sup_x \left| V_i(x) * \left[\tilde{F}_n(x) - G_\alpha\left(x, \frac{1}{n}\right)\right] \right| =$$

$$= \sup_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_i(x-y)\, d\left[\tilde{F}_n(y) - G_\alpha\left(y, \frac{1}{n}\right)\right] \right| =$$

$$= \sup_x \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_i\left(x - yn^{-\frac{1}{\alpha}}\right) d[F(y) - G_\alpha(y, 1)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu_\varkappa}{\varkappa!} n^{-\frac{\varkappa}{\alpha}} \sup_x \left| \frac{d^\varkappa V_i(x)}{dx^\varkappa} \right|. \tag{16}$$

Далее,

$$V_i(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{F}_n^i(y)-G_\alpha^i\left(y,\ \frac{1}{n}\right)\right]d\left[G_\alpha^{n-i-1}\left(x-y,\ \frac{1}{n}\right)*G_\alpha(x-y,\ \lambda)\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{F}_n^i(y)-G_\alpha^i\left(y,\ \frac{1}{n}\right)\right]dG_\alpha\left(x-y,\ \frac{n-i-1}{n}+\lambda\right).$$

Ввиду (6)

$$\sup_x\left|\frac{d^\varkappa V_i(x)}{dx^\varkappa}\right|=$$

$$=\sup_x\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{F}_n^i(y)-G_\alpha^i\left(y,\ \frac{1}{n}\right)\right]\frac{d^{\varkappa+1}}{dx^{\varkappa+1}}G_\alpha\left(x-y,\ \frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_x\left|\tilde{F}_n^i(x)-G_\alpha^i\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^{\varkappa+1}}{dx^{\varkappa+1}}G_\alpha\left(x-y,\ \frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_1}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\sup_x\left|\tilde{F}_n^i(x)-G_\alpha^i\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right|=\frac{c_1R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}},$$

так как

$$\sup_x\left|\tilde{F}_n^i(x)-G_\alpha^i\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right|=\sup_x\left|F_i\left[\left(\frac{n}{i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x\right]-G_\alpha\left[\left(\frac{n}{i}\right)^{\frac{1}{\alpha}}x,\ 1\right]\right|=$$

$$=\sup_x|F_i(x)-G_\alpha(x,\ 1)|=R_i.$$

Поэтому

$$\sup_x\left|V_i(x)*\left[\tilde{F}_n(x)-G_\alpha\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right]\right|\leqslant\frac{c_{13}\nu_\varkappa R_i}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}},\tag{17}$$

где обозначили $c_{13}=\frac{c_1}{\varkappa!}$. Нетрудно получить также

$$n\cdot\sup_x\left|V_0(x)*\left[\tilde{F}_n(x)-G_\alpha\left(x,\ \frac{1}{n}\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant n\frac{\nu_\varkappa}{\varkappa!}n^{-\frac{\varkappa}{\alpha}}\frac{c_1}{\left(\frac{n-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\leqslant\frac{2^{\frac{\varkappa}{\alpha}}c_1\nu_\varkappa}{\varkappa!\,n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}=c_{14}\frac{\nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\tag{18}$$

(для $n \geqslant 2$). Поэтому

$$R_n \leqslant \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} + c_2 c_{14} \frac{\nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} + c_3 \lambda^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{19}$$

Покажем, что соответствующим подбором λ мы можем получить неравенство (10), причем константу $c = c(\alpha)$ можем выбрать одну и ту же для всех n. Из этого по методу математической индукции будет следовать утверждение теоремы.

Оценим первое из трех слагаемых правой части неравенства (19). Разложим сумму в первом слагаемом на две суммы:

$$\frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} = \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n_0} \frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} +$$

$$+ \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{n_0 < i \leqslant n-1} \frac{R_i}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n_0} \frac{1}{\left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} +$$

$$+ \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \sum_{n_0 < i \leqslant n-1} \frac{c \nu_\varkappa^\rho}{i^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}} \left(\frac{n-i-1}{n}+\lambda\right)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}.$$

Как видно, в первой из этих сумм мы воспользовались тривиальной оценкой $R_i \leqslant 1$, а во второй — индукционной предпосылкой (15). Для оценки этих сумм мы вправе применять лемму 3. В обозначениях этой леммы имеем

$$R_n \leqslant \frac{c \nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \left[\frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa^{1-\rho}}{cn} S_1 + \frac{c_2 c_{13} \nu_\varkappa}{n} S_2 + \frac{c_2 c_{14} \nu_\varkappa^{1-\rho}}{c}\right] + c_3 \lambda^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Выберем

$$\lambda^{\frac{1}{\alpha}} = c_{15} \frac{\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}. \tag{20}$$

Ясно, что утверждение теоремы

$$R_n \leqslant \frac{c \nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} = \frac{c}{c_{15}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$$

нетривиально лишь тогда, когда $\frac{c}{c_{15}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} < 1$, т. е. при

$$\lambda < \left(\frac{c_{15}}{c}\right)^\alpha. \tag{21}$$

В дальнейшем мы будем выбирать константы c_{15} и c такими, чтобы соблюдалось условие $\lambda < \frac{1}{2}$, при котором доказана лемма 3. Будем считать также выполненным неравенство

$$\frac{c\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} < 1, \tag{22}$$

так как в противном случае утверждение теоремы тривиально. Итак,

$$R_n \leqslant \frac{c\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{c_3c_{13}\nu_\varkappa^{1-\rho}}{cn}\left(c_4n + c_5\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} + c_6\frac{cn\nu_\varkappa^\rho}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{c_3c_{13}\nu_\varkappa}{n}\left(c_7\frac{n}{c\nu_\varkappa^\rho} + c_8\frac{n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} + c_9\frac{n}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}}\right) + \frac{c_3c_{14}\nu_\varkappa^{1-\rho}}{c} + \frac{c_3c_{15}}{c}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{c_3c_{13}(c_4+c_7)\nu_\varkappa^{1-\rho}}{c} + \frac{c_3c_{13}(c_5+c_8)\nu_\varkappa}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_3c_{13}(c_6+c_9)\nu_\varkappa}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} + \frac{c_3c_{14}\nu_\varkappa^{1-\rho}}{c} + \frac{c_3c_{15}}{c}\right]. \tag{23}$$

Воспользуемся тем, что всегда $\nu_\varkappa \leqslant \nu_\varkappa^\rho$, а также соотношениями (20) и (22). Имеем:

$$\frac{c_3c_{13}(c_4+c_7)\,\nu_\varkappa^{1-\rho}}{c} \leqslant \frac{c_3c_{13}(c_4+c_7)}{c}, \tag{24}$$

$$\frac{c_3c_{13}(c_5+c_8)\nu_\varkappa}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}} \leqslant \frac{c_3c_{13}(c_5+c_8)\nu_\varkappa^\rho n^{\frac{(\varkappa-\alpha)^2}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}c_{15}^{\varkappa-\alpha}\nu_\varkappa^{\rho(\varkappa-\alpha)}} =$$

$$= \frac{c_3c_{13}(c_5+c_8)}{c_{15}^{\varkappa-\alpha}}\left(\frac{\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}}\right)^{1+\alpha-\varkappa} < \frac{c_3c_{13}(c_5+c_8)}{c_{15}^{\varkappa-\alpha}c^{1+\alpha-\varkappa}}, \tag{25}$$

$$\frac{c_3c_{13}(c_6+c_9)\nu_\varkappa}{(n\lambda)^{\frac{\varkappa}{\alpha}}} \leqslant \frac{c_2c_{13}(c_6+c_9)\nu_\varkappa n^{\frac{\varkappa(\varkappa-\alpha)}{\alpha}}}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}}c_{15}^\varkappa\nu_\varkappa^{\rho\varkappa}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_3c_{13}(c_6+c_9)}{c_{15}^\varkappa}\frac{\nu_\varkappa^{1-\rho\varkappa}}{n^{\frac{\varkappa}{\alpha}(1+\alpha-\varkappa)}} < \frac{c_3c_{13}(c_6+c_9)}{c_{15}^\varkappa}, \tag{26}$$

$$\frac{c_3c_{14}\nu_\varkappa^{1-\rho}}{c} \leqslant \frac{c_3c_{14}}{c}. \tag{27}$$

Собирая вместе неравенства (24)–(27) видим, что мы всегда можем выбрать c_{15} и c столь большими, чтобы выражение в квадратных скобках формулы (23) было меньше единицы. Но тогда

$$R_n < \frac{c\,\nu_\varkappa^\rho}{n^{\frac{\varkappa-\alpha}{\alpha}}},$$

что и требовалось доказать.

В заключение выражаю свою признательность В. Статулявичусу за ценные советы при выполнении данной работы.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
8. XII. 1970

Литература

1. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Лит. матем. сб., IX, 2 (1969), 323–328.
2. В. М Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджвота–Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Труды VI Всесоюзн. совещ. по теории вероят. и матем. статист., Вильнюс, 1962, 49–50.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Москва, 1965.

LIEKAMOJO NARIO ĮVERTINIMAS INTEGRALINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE KONVERGAVIMO Į STABILŲ DĖSNĮ ATVEJU

A. Mitalauskas

(Reziumė)

Darbe gautas liekamojo nario įvertinimas integralinėje ribinėje teoremoje nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms stabilaus ribinio dėsnio atveju.

AN ESTIMATE OF THE REMAINDER TERM IN THE INTEGRAL LIMIT THEOREM IN THE CASE OF CONVERGENCE TO THE STABLE LAW

A. Mitalauskas

(Summary)

In the present paper is given an estimate of the remainder term in the integral limit theorem for sums of independent random variables in the case of stable limit distribution.