1971

УДК 519.21

О ПОКАЗАТЕЛЬНОМ УБЫВАНИИ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Н. Б. Калинаускайте

Рассмотрим s-мерное невырожденное устойчивое распределение, характеристическая функция которого имеет вид

$$\exp\left\{-\rho^{\alpha}\left(C_1(\varphi)+i\,C_2(\varphi)\right)\right\},\quad 0<\alpha<2,\quad \alpha\neq 1,$$

где

$$\rho=|t|,\quad t\in R_s,\quad \varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})$$

$$[0\leqslant\varphi_1\leqslant\pi,\ldots,0\leqslant\varphi_{s-2}\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi_{s-1}\leqslant 2\pi],$$

$$C_1(\varphi)=C\int\limits_S\left|\left(\frac{t}{\rho},\,u\right)\right|^{\alpha}\mu(dS),$$

$$C_2(\varphi)=-C\int\limits_S\left|\left(\frac{t}{\rho},\,u\right)\right|^{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(\frac{t}{\rho},\,u\right)\mu(dS),$$

$\mu(\cdot)$ – нормированная мера на единичной s-мерной сфере,

u – единичный вектор, конец которого лежит в dS.

Далее будем рассматривать подкласс s-мерных невырожденных устойчивых распределений, для которых мера $\mu(\cdot)$ сконцентрирована на пересечении S_1 сферы S с выпуклым конусом K с вершиной в начале координат, лежащем в одном из октантов пространства R_s. Поворотом координатных осей можно достич октанта с углами

$$0\leqslant\varphi_j\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad 1\leqslant j\leqslant s-1.$$

Для таких устойчивых распределений существует лапласовская трансформация

$$M\exp\{(z,x)\}=\exp\{\psi(z)\}=$$

$$=\exp\left\{C\cos^{-1}\frac{\alpha\pi}{2}\int\limits_{S_1}(z,u)^{\alpha}\mu(dS)\right\}$$

в некоторой выпуклой неограниченной открытой области G.

Теорема. *Плотность $g_{\alpha}(x)$, $\alpha\in(0,\,2]$, $\alpha\neq 1$, s-мерного невырожденного устойчивого распределения с конечной лапласовой трансформацией* (1) *при $x\in G_1\subset R_s$ и $\rho_0=|x|^{\frac{1}{\alpha-1}}\to\infty$ имеет асимптотику*

$$g_{\alpha}(x)=$$

$$=\frac{\exp\{\psi(z_0)-(z_0x)\}}{(\sqrt{2\pi})^s D^{-\frac{1}{2}}(z_0)}\left(1+O\left(|x|^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\right),$$

где z_0 — единственное решение уравнения

$$\operatorname{grad}_z \Big(\psi(z) - (z, x)\Big) = 0, \tag{3}$$

G_1 — отображение области G в R_s, задаваемсе уравнением (3), *а $D(z_0)$ — — определитель вторых частных производных функции в точке $z = z_0$.*

Доказательство. Имеем

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi i)^s} \int\limits_{c_j - i\infty}^{c_j + i\infty} \overset{(s)}{\ldots} \int e^{-(z, x) + \psi(z)} dz, \tag{2}$$

где c принадлежит области аналитичности функции $\psi(z)$. Остается удобно подобрать вектор $c = (c_1 \ldots c_s)$ в интеграле (2). Для этого достаточно решить уравнение (3) „стационарной точки" или, что то же самое, решить систему уравнений

$$C \cos^{-1} \frac{\alpha\pi}{2} \int\limits_{S_1} \alpha\rho^{\alpha-1} (v, u)^{\alpha-1} u_j \mu(dS) = r w, \quad 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{4}$$

где $|v| = 1$, $z = \rho v$, $v = \{v_1, \ldots, v_s\}$,

$$v_j = \prod_{k=1}^{j-1} \sin\varphi_k \cos\varphi_j \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1, \qquad v_s = \prod_{j=1}^{s-1} \sin\varphi_j$$

и

$$|x| = r, \quad x = rw,$$

$$w_j = \prod_{k=1}^{j-1} \sin\psi_k \cos\psi_j \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant s-1,$$

$$w_s = \prod_{j=1}^{s-1} \sin\psi_j.$$

Так как $x \in R_s$, то достаточно ограничиться векторами c с чисто действительными координатами. Вследствие выпуклости функции $\psi(z)$ при всех z с положительными координатами система (4) имеет только одно решение.

Если положить $\rho_0 = r^{\frac{1}{\alpha-1}}$, то решение системы (4) определит угловые координаты вектора z_0. Их обозначим

$$\varphi_0 = \{\varphi_1^{(0)} \ldots \varphi_{s-1}^{(0)}\}.$$

Проводим путь интегрирования вдоль

$$z = z_0 + it, \quad -\infty < t_j < \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ как угодно мало. Тогда

$$g_\alpha(x) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \overset{(s)}{\ldots} \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\{\psi(z_0 + it) - (z_0 + it, x)\} dt + I_2,$$

где I_2 — интеграл по остальной области. Разложим $\psi(z_0+it)-(z_0+it,\ x)$ вдоль $z=z_0+it$ в ряд Тейлора по степеням координат t_j. В силу (3) имеем

$$\psi(z_0+it)-(z_0+it,\ x)=\psi(z_0)-(z_0 x)-$$

$$-\sum_{k,j=1}^{s} t_k t_j \frac{\psi''_{z_k z_j}(z_0)}{2}-\sum_{m,k,j=1}^{s} t_m t_k t_j \frac{\psi'''_{z_m z_k z_j}(z_0)}{3!}+\dots$$

Следовательно,

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^s}\exp\{\psi(z_0)-(z_0 x)\}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\overset{(s)}{\dots}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left\{-\sum_{k,j=1}^{s} t_k t_j \frac{\psi''_{z_k z_j}(z_0)}{2}-\right.$$

$$\left.-i\sum_{m,k,j=1}^{k} t_m t_k t_j \frac{\psi'''_{z_m z_k z_j}(z_0)}{3!}+\dots\right\}dt.$$

Так как

$$\psi(z)=C\cos^{-1}\frac{\alpha\pi}{2}\int_{S_1}(z,u)^{\alpha}\mu(dS),$$

то

$$\frac{\partial^m\psi(z)}{\partial z_1^{j_1}\dots\partial z_s^{j_s}}=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)\,|z|^{\alpha}\varkappa^{(m)}_{j_1\dots j_s}(z),\ j_1+\dots+j_s=m,$$

где

$$\varkappa^{(m)}_{j_1\dots j_s}(z)=|z|^{-m}\int_{S_1}\left(\frac{z}{|z|},u\right)^{\alpha-m}\prod_{k=1}^{s}u_k^{j_k}\mu(dS).\qquad j_1+\dots+j_s=m$$

Очевидно, что при $|z|\to\infty$ имеет место соотношение

$$\varkappa^{(m)}_{j_1\dots j_s}(z)=o(|z|^{-m}),\ z\in G. \tag{5}$$

Заменой переменных $\hat{t}_j=\rho^{\frac{\alpha}{2}}t_j$, $1\leqslant j\leqslant s$, интеграл I_1 приводится к виду

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^s}\exp\{\psi(z_0)-(z_0 x)\}\times$$

$$\times\int_{-\varepsilon\rho_0^{\alpha}}^{+\varepsilon\rho_0^{\alpha}}\overset{(s)}{\dots}\int_{-\varepsilon\rho_0^{\alpha}}^{\varepsilon\rho_0^{\alpha}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q_2(t)\right\}\cdot\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{iQ_p(t)}{p!\,\rho_0^{\frac{\alpha(p-2)}{2}}}-\frac{1}{2!}\left(\frac{Q_p(t)}{\rho_0^{\frac{\alpha(p-2)}{2}}p!}\right)^2+\dots\right\}\rho_0^{-\frac{\alpha s}{2}}dt.$$

Здесь

$$Q_2(t)=\sum_{k,j=1}^{s} t_k t_j \varkappa^{(2)}_{k,j}(z_0)$$

положительно определенная квадратическая форма, определитель которой $\Delta(z_0)$ положителен при нашем подборе точки z_0. Далее, при $p\geqslant 3$

$$Q_p(t)=\sum_{\substack{k_j=1,\\ j=1,2,\dots,p,}}^{s} t_{k_1}\dots t_{k_p}\varkappa^{(p)}_{k_1\dots k_p}(z_0).$$

Конечные границы интегрирования можно заменить бесконечными с ошибкой порядка $o(\rho^{-\alpha})$. При интегрировании исчезают все члены с нечетным числом переменнных. Следовательно,

$$I_1 = \frac{e^{\psi(z_0)-(z_0 x)}}{(2\pi)^s \rho_0^{\frac{\alpha s}{2}}} \int\limits_{R_S} e^{-\frac{1}{2} Q_2(t)} \Biggl(1 -$$

$$- \frac{1}{\rho_0^\alpha}\left(\frac{1}{4!} Q_4(t) - \left(\frac{1}{3!} Q_3(t)\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)\Biggr\} dt =$$

$$= \frac{\exp\{\psi(z_0) - (z_0, x)\}}{(\sqrt{2\pi})^s \rho_0^{\frac{\alpha s}{2}} \sqrt{\Delta(z_0)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)\right).$$

Так как $\exp\left\{\psi\left(\frac{z}{\rho_0} + it\right)\right\}$ — лапласовская трансформация абсолютно непрерывного распределения, то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma > 0$ такое, что для всех $z_0 = \{z_0^{(1)} \dots z_0^{(s)}\}$ с $z_0^{(j)} > 0$ и всех $|t| \geqslant \varepsilon$ имеет место оценка

$$\exp\{\psi(z_0 + i\rho_0 t)\} \leqslant e^{-\gamma\rho_0^\alpha} e^{\psi(z_0)}.$$

Поэтому

$$|I_2| \leqslant \exp\{\psi(z_0) - (z_0 x)\} e^{-\gamma\rho_0^\alpha} \delta,$$

где $\delta > 0$ некоторая постоянная. Следовательно,

$$I = \frac{\exp\{\psi(z_0) - (z_0 x)\}}{(\sqrt{2\pi})^s \sqrt{D(z_0)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho_0^\alpha}\right)\right)$$

при $\rho_0 \to \infty$, где $D(z_0)$ — определитель вторых производных $\psi''_{z_k z_j}(z_0)$.

Пример. Пусть $\{\xi_\alpha(s), \xi_\alpha(t)\}$, $t > s$, $\alpha \neq 1$, двумерный случайный вектор с

$$\psi(z) = \begin{cases} \left(u + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} v\right)^\alpha + v^\alpha \left(1 - \frac{s}{t}\right) & \text{при } 1 < \alpha \leqslant 2, \\ -\left(u + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} v\right)^\alpha - v^\alpha \left(1 - \frac{s}{t}\right) & \text{при } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

в области

$z = (u, v)$

$\mathrm{Re}\,(v + u) > 0,$

$\mathrm{Re}\,u > 0.$

Решая уравнение (3), т.е.

$$\begin{cases} \alpha\left(u + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} v\right)^{\alpha-1} = (-1)^{[\alpha]+1} x_1, \\ \alpha\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(u + \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} v\right)^{\alpha-1} + \alpha\left(1 - \frac{s}{t}\right) v^{\alpha-1} = (-1)^{[\alpha]+1} x_2, \end{cases}$$

получаем $z_0=(z_1, z_2)$ с

$$z_1=\left(\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{s}{t}\right)}\left(|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$z_2=\left(\frac{|x_1|}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\left(\frac{|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|}{\alpha\left(1-\frac{s}{t}\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Если ограничиться только действительными $z=(u, v)$, то область G_1 задается неравенствами

$$|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}|x_1|\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{\alpha\left(1-\frac{s}{t}\right)}\left(|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|\right)\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(1-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)>0$$

с $x_i>0$, $i=1,2$ при $1<\alpha\leqslant 2$,
с $x_i<0$, $i=1,2$ при $0<\alpha<1$.

Плотность же в данном случае равна

$$g_\alpha(x)=$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{|\alpha-1|}{\alpha}\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}}\left(|x_1|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\left(1-\left(\frac{s}{t}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\left(|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\right\}}{2\pi\sqrt{\alpha|\alpha-1|\left(1-\frac{s}{t}\right)\left(\left(\frac{|x_1|}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}\left(\alpha^{-1}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{-1}\left(|x_2|-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}|x_1|\right)\right)\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}}}\times$$

$$\times\left(1+O\left(|x|^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)\right)$$

при $|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\to\infty$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
4.XI.1970

Литература

1. В. Рихтер, Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее прим., **3**, в. 1 (1958), 107–114.
2. Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Ученые записки Львовского Гос. унив., 29, (1954), 5–44.
3. А. А. Боровков, Б. А. Рогозин, О центральной предельной теореме в многомерном случае, Теория вероят. и ее прим., **10**, в. 1(1965), 61–69.

DAUGIAMAČIŲ STABILIŲ TANKIŲ EKSPONENTINIO GESIMO KLAUSIMU

N. Kalinauskaitė

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjami neišsigimę s-mačiai stabilūs pasiskirstymo tankiai, kuriems matas $\mu(\cdot)$, įeinantis į charakteringosios funkcijos logaritmo P. Lévy formulę, yra sukoncentruotas vienetinės sferos piūvyje su vienu iš erdvės R_s oktantų. Gauta asimptotinė formulė tankiui $g_\alpha(x)$, kai $|x|^{\frac{1}{\alpha-1}}\to\infty$, $\alpha\neq 1$, $0<\alpha<2$, ir visos vektoriaus x komponentės priklauso sričiai S_1.

ON THE EXPONENTIAL GROWTH OF SOME MULTIDIMENSIONAL STABLE DENSITIES

N. Kalinauskaitė

(*Summary*)

Let $g_\alpha(x)$ be a nondegenerate s-dimensional stable density with the measure μ on the unit sphere in the P. Lévy canonical formula concentrated in the first octant of the space R_s. Then if $\alpha\neq 1$ $0<\alpha<2$ and $|x|^{\frac{1}{\alpha-1}}\to\infty$, $x\in S_1$, the following relation holds

$$g_\alpha(x)=\frac{\exp\{\psi(c_0)-(c_0 x)\}}{(\sqrt{2\pi})^s\sqrt{D(c_0)}}\left(1+O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\right)\right),$$

where

$$\psi(z)=\log\int_{R_s} e^{(z\,x)}g_\alpha(x)\,dx,$$

c_0 is the solution of the equation

$$\mathrm{grad}_z\,(\psi(z)-(zx))=0$$

and
$D(c_0)$ is the determinant of the second derivatives of the function $\psi(z)$ at the point $z=c_0$.