1971

УДК 519.21

# О СХОДИМОСТИ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА МНОГОМЕРНЫХ СТУПЕНЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ К ОБОБЩЕННЫМ ПУАССОНОВСКИМ

Р. Т. Банис

**1.** Поток однородных случайных событий описывается случайным процессом $X(t)$, являющимся числом случайных событий, происшедших в интервале времени $[0, t)$. Если же имеется поток неоднородных случайных событий $N$ типов, то приходится рассматривать $N$-мерный случайный процесс $X(t)=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$, где компонента $X^{(k)}(t)$, $k=1, 2, \ldots, N$ означает число случайных событий $k$-го типа, происшедших в интервале времени $[0, t)$.

В теории массового обслуживания и теории надежности часто встречаются потоки событий, являющиеся суммами большого числа независимых потоков малой интенсивности. Б. Григелионисом найдены необходимые и достаточные условия сходимости суммарных потоков к пуассоновским в одномерном и многомерном случаях (см. [5] и [1]). Б. Фрайер [2] исследовал случай, когда суммарный поток является суммой случайного числа независимых одномерных потоков событий.

Настоящая работа является обобщением результатов Б. Фрайера на многомерный случай. В работе найдены необходимые и достаточные условия сходимости сумм независимых бесконечно малых многомерных ступенчатых случайных процессов к пуассоновским в случае, когда число слагаемых в каждой сумме случайно, и достаточные условия сходимости таких сумм к обобщенным пуассоновским процессам, когда число слагаемых в каждой сумме при определенной нормировке имеет предельное распределение. Так же рассматривается случай, когда слагаемые процессы являются марковскими процессами восстановления. Сходимость сумм фиксированного числа марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона рассмотрена И. Сапаговасом [4].

**2. Определение 1.** *Случайный процесс*

$$\mathbf{X}(t)=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{N}(t)\right), \quad t\geqslant 0,$$

*называется ступенчатым, если приращения* $X^{(m)}(t)-X^{(m)}(s)$, $s<t$, $m=1, \ldots, N$, *принимают лишь целые неотрицательные значения и* $\mathbf{P}\{X^{(m)}(0)=0\}=1$, $m=1, \ldots, N$.

**Определение 2.** *Ступенчатый случайный процесс* $\mathbf{X}(t)$ *называется пуассоновским с ведущей функцией*

$$\Lambda(t)=\left(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)\right),$$

*если компоненты $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)$ взаимно независимы и $X^{(m)}(t)$ является пуассоновским процессом со средним*

$$\mathbf{M}\, X^{(m)}(t) = \lambda_m(t), \quad m = 1, \ldots, N.$$

**Определение 3.** *Последовательность ступенчатых случайных процессов $\mathbf{X}_n(t)$, $n \geqslant 1$, сходится к процессу $\mathbf{X}(t)$, если любые конечномерные распределения процессов $\mathbf{X}_n(t)$ слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса $\mathbf{X}(t)$.*

Говорим, что процессы $\mathbf{X}_{nr}(t)$, $r = 1, \ldots, k_n$, *бесконечно малы*, если при любом фиксированном $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant r \leqslant k_n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t) > 0 \right\} = 0.$$

Пусть

$$\mathbf{Y}_{nk}(t) = \sum_{r=1}^{k} \mathbf{X}_{nr}(t),$$

где $\mathbf{X}_{nr}(t)$ для каждого $n$ — последовательность независимых $N$-мерных ступенчатых случайных процессов.

Пусть $\nu_n$ обозначают неотрицательные целочисленные случайные величины.

**Теорема 1.** *Пусть существуют постоянные $k_n$, такие что*

$$\frac{\nu_n}{k_n} \xrightarrow[\mathbf{P}]{} 1 \quad (\text{при } n\to\infty \text{ по вероятности}), \tag{1}$$

$$\lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{|r-k_n|<ck_n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t) > 0 \right\} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant r \leqslant k_n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t) > 0 \right\} = 0 \tag{3}$$

*для всех $t > 0$.*

*Процессы $\mathbf{Y}_{n\nu_n}(t)$ сходятся при $n\to\infty$ к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\Lambda(t)$ тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\{ X_{nr}^{(m)}(t) > 0 \} = \lambda_m(t), \quad m = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{ \sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t) > 1 \right\} = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{T} = (t_0, t_1, \ldots, t_s), \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_s,$$

любой набор моментов времени. Построим вектор

$$\mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})=\left(\mathbf{Y}_{nk_n}(t_1)-\mathbf{Y}_{nk_n}(t_0),\ \ldots,\ \mathbf{Y}_{nk_n}(t_s)-\mathbf{Y}_{nk_n}(t_{s-1})\right).$$

Аналогично построим вектор $\mathbf{Y}_{n\nu_n}(\mathbf{T})$ из процесса $\mathbf{Y}_{n\nu_n}(t)$. Эти случайные векторы порождают меры

$$\mu_{k_n}^{(n)}(A)=\mathbf{P}\{\mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})\in A\},$$

$$\mu_{\nu_n}^{(n)}(A)=\mathbf{P}\{\mathbf{Y}_{n\nu_n}(\mathbf{T})\in A\},$$

где $A$ — борелевское множество в пространстве

$$\mathbf{R}^{+}_{N\times s}=\{x_1^{(1)},\ \ldots,\ x_1^{(N)},\ \ldots,\ x_s^{(1)},\ \ldots,\ x_s^{(N)},\ x_q^{(m)}\geqslant 0,\ q=1,\ \ldots,\ s,\ m=1,\ \ldots,\ N\}.$$

Через $\mu(A)$ обозначим соответственную меру пуассоновского процесса $\mathbf{Y}(t)$ с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Б. Григелионис [1] доказал, что при условии (3) соотношения (4) эквивалентны тому, что меры $\mu_{k_n}^{(n)}$ слабо сходятся к мере $\mu$. Поэтому достаточно доказать, что при условиях (1), (2) из слабой сходимости мер $\mu_{k_n}^{(n)}$ к мере $\mu$ следует слабая сходимость мер $\mu_{\nu_n}^{n}$ к мере $\mu$ и обратное.

Пусть случайные элементы $\mathbf{Y}_{nk_n}$ и $\mathbf{Y}$ принимают значения в метрическом пространстве $\{\mathbf{M},\ \rho,\ \mathcal{L}_M\}$ и порождают на борелевской алгебре $\mathcal{L}_M$ меры $\mu_{k_n}^{(n)}$ и $\mu$. Тогда имеет место следующая.

**Лемма** (см. [2]). *Пусть существуют числа $k_n$, $k_n\to\infty$, такие, что при $n\to\infty$ по вероятности*

$$\frac{\nu_n}{k_n}\xrightarrow[\mathbf{P}]{}1 \tag{5}$$

*и для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\max_{|k-k_n|<ck_n}\rho(\mathbf{Y}_{nk},\ \mathbf{Y}_{nk_n})>\varepsilon\}=0. \tag{6}$$

*Тогда при $n\to\infty$ следующие соотношения эквивалентны:*

$$\mu_{k_n}^{(n)}\Rightarrow\mu, \tag{7}$$

$$\mu_{\nu_n}^{(n)}\Rightarrow\mu. \tag{8}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при условии (2) соотношения (6) выполняются для $\mathbf{Y}_{nk}(\mathbf{T})$, $\mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{+}_{N\times s}$ с обычной метрикой.

$$\max_{|k-k_n|<ck_n}\|\mathbf{Y}_{nk}(\mathbf{T})-\mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})\|=$$

$$=\left\{\max_{|k-k_n|\, ck_n}\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}[Y_{nk}^{(m)}(t_q)-Y_{nk}^{(m)}(t_{q-1})-Y_{nk_n}^{(m)}(t_q)+Y_{nk_n}^{(m)}(t_{q-1})]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\left[\sum_{|r-k_n|<ck_n}\left(X_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})\right)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует соотношение (6), так как

$$\mathbf{P}\{\max_{|k-k_n|<ck_n} \|\mathbf{Y}_{nk}(\mathbf{T})-\mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})\|>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\Big[\sum_{|r-k_n|<ck_n}\Big(X_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})\Big)\Big]^2>\varepsilon^2\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|r-k_n|<ck_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N}X_{nr}^{(m)}(t_s)>0\right\}.$$

Теорема доказана.

При тех же обозначениях сформулируем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Пусть величины $\nu_n$ не зависят от процессов $\mathbf{X}_{nr}(t)$ и пусть существуют числа $k_n$, такие что при $n\to\infty$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_n}{k_n}<x\right\}\to A(x) \text{ и } k_n\to\infty \tag{9}$$

*в точках непрерывности функции $A(x)$.*

*Пусть выполняется по $\boldsymbol{y}$ равномерно для каждого конечного интервала и всех $t>0$*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{yk_n}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t)>0\}=\lambda_m(\boldsymbol{y},t),\ m=1,\ \dots,\ N, \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{yk_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N}X_{nr}^{(m)}(t)>1\right\}=0, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant yk_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N}X_{nr}^{(m)}(t)>0\right\}=0 \tag{12}$$

*и функции $A(\boldsymbol{y})$ и $\lambda_m(\boldsymbol{y},t)$, $m=1,\ \dots,\ N$, не имеют совпадающих разрывов по $\boldsymbol{y}$.*

*Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{Y_{n\nu_n}(\mathbf{T})=\mathbf{K}\}=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\prod_{q=1}^{s}\prod_{m=1}^{N}\frac{[\lambda_m(y,t_q)-\lambda_m(y,t_{q-1})]^{k_q^{(m)}}}{k_q^{(m)}!}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-[\lambda_m(y,t_q)-\lambda_m(y,t_{q-1})]}\right\}dA(\boldsymbol{y}), \tag{13}$$

*где $\mathbf{K}=(k_1^{(1)},\ \dots,\ k_1^{(N)},\ \dots,\ k_s^{(1)},\ \dots,\ k_s^{(N)})$, $k_q^{(m)}=0,\ 1,\ 2,\dots,q=1,\dots,s$, $m=1,\ \dots,\ N$.*

Доказательство. Обозначим

$$f_{k_n}^{(n)}(\alpha)=\int_{\zeta\in\mathbf{R}_{N\times s}^{+}}e^{i(\alpha,\zeta)}\mu_{k_n}^{(n)}(d\zeta),$$

$$\psi_{\nu_n}^{(n)}(\alpha)=\int_{\zeta\in\mathbf{R}_{N\times s}^{+}}e^{i(\alpha,\zeta)}\mu_{\nu_n}^{(n)}(d\zeta),$$

где $\alpha\in\mathbf{R}_{N\times s}$.

Найдем

$$f_{k_n}^{(n)}(\alpha)=\mathbf{M}\exp\left\{i\left(\alpha,\ \mathbf{Y}_{nk_n}(\mathbf{T})\right)\right\}.$$

Обозначим

$$f_{nr}(\alpha)=\mathbf{M}\exp\left\{i\left(\alpha,\ \mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})\right)\right\}.$$

Так как процессы $\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})$, $r=1, \ldots, k_n$, независимы, то

$$f_{k_n}^{(n)}(\alpha)=\prod_{r=1}^{k_n} f_{nr}(\alpha). \tag{14}$$

Но

$$f_{nr}(\alpha)=\sum_{\mathbf{l}} e^{i(\alpha,\ \mathbf{l})}\,\mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\},$$

где символ $\sum\limits_{\mathbf{l}}$ означает суммирование по всевозможным векторам

$$\mathbf{l}=(l_1^{(1)}, \ldots, l_1^{(N)}, \ldots, l_s^{(1)}, \ldots, l_s^{(N)}),$$

$$l_q^{(m)}=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ q=1, \ldots, s,\ m=1, \ldots, N.$$

Обозначим

$$\mathbf{0}=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N\times s})\text{ — нулевой вектор и}$$

$$\mathbf{l}_{qm}=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N\times(q-1)+m-1},\ 1,\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{N\times(s-q)+N-m})$$

— вектор, все координаты которого равны нулю, кроме координаты $l_q^{(m)}$, равной единице.

$$f_{nr}(\alpha)=1+\sum_{\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr},\ (\mathbf{T})=\mathbf{l}\}(e^{i(\alpha,\ \mathbf{l})}-1)=$$

$$=\exp\left\{\sum_{\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}(e^{i(\alpha,\ \mathbf{l})}-1)+\right.$$

$$\left.+O\left[\left(\sum_{\mathbf{l}\neq\mathbf{0}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}\right)^2\right]\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}_{qm}\right\}(e^{i\,\alpha_q^{(m)}}-1)+$$

$$\left.+O\left[\sum_{\mathbf{l}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{l}_{qm}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}+\left(\sum_{\neq\mathbf{0}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}\right)^2\right]\right\}. \tag{15}$$

Очевидны следующие неравенства:

$$\sum_{\mathbf{l}\neq 0} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}\leqslant P\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>0\right\}, \tag{16}$$

$$\sum_{\mathbf{l}\neq 0,\ \mathbf{l}_{qm}} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}\leqslant \mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>1\right\}, \tag{17}$$

$$\sum_{\mathbf{l}\neq 0} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}\}\leqslant \sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}_{qm}\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>1\right\}. \tag{18}$$

Оценим разность

$$\mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})=1\}-\mathbf{P}\{\mathbf{X}_{nr}(\mathbf{T})=\mathbf{l}_{qm}\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>1\right\}. \tag{19}$$

Из соотношений (15)–(19) находим

$$f_{nr}(\alpha)=\exp\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})=1\}(e^{i\alpha_q^{(m)}}-1)+\right.$$

$$+O\left[\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>1\right\}+\right.$$

$$\left.\left.+\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>0\right\}\cdot\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})=1\}\right]\right\}.$$

Из (14)

$$f_{k_n}^{(n)}(\alpha)=\exp\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t_q)-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})=1\}(e^{i\alpha_q^{(m)}}-1)+\right.$$

$$+O\left[\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>1\right\}+\right.$$

$$+\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t_s)>0\right\}\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t_q)-$$

$$\left.\left.-X_{nr}^{(m)}(t_{q-1})=1\}\right]\right\}.$$

Из результатов Б. Григелиониса (см. [3]) следует, что при условиях (3), (4) теоремы 1

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{P}\{X_{nr}^{(m)}(t)-X_{nr}^{(m)}(s)=1\}=\lambda_m(t)-\lambda_m(s), \tag{20}$$

$s<t,\ m=1,\ \ldots,\ N.$

Отсюда и из соотношений (10)–(12) заключаем, что равномерно по $y$

$$\lim_{n\to\infty} f_{yk_n}^{(n)}(\alpha)=\exp\left\{\sum_{q=1}^{s}\sum_{m=1}^{N}[\lambda_m(y, t_q)-\lambda_m(y, t_{q-1})](e^{i\alpha_q^{(m)}}-1)\right\}. \tag{21}$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма** (см. [2]). *Если последовательность измеримых функций $\varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ ограничена одной постоянной и на каждом компакте равномерно сходится к функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$, а последовательность функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_m)$ слабо сходится к функции $F_0(x_1, \ldots, x_m)$ и функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$ и $F_0(x_1, \ldots, x_m)$ не имеют совпадающих разрывов, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_m}\varphi_n(x_1, \ldots, x_m)\,dF_n(x_1, \ldots, x_m)=$$

$$=\int_{R_m}\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)\,dF_0(x_1, \ldots, x_m). \tag{22}$$

По соотношению (21)

$$\lim_{n\to\infty} f_{yk_n}^{(n)}(\alpha)=\prod_{q=1}^{s}\prod_{m=1}^{N}\exp\{[\lambda_m(y, t_q)-\lambda_m(y, t_{q-1})](e^{i\alpha_q^{(m)}}-1)\}=$$

$$=\varphi(y, \alpha).$$

Используя лемму, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\psi_{\nu_n}^{(n)}(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_{yk_n}^{(n)}(\alpha)\,d\mathbf{P}\{\nu_n<yk_n\}=\int_0^\infty\varphi(y, \alpha)\,dA(y).$$

Формула обращения дает соотношение (13).

Теорема доказана.

3. Рассмотрим случай, когда слагаемые процессы являются марковскими процессами восстановления.

Пусть $\{I_n, n\geqslant 0)$ – цепь Маркова с конечным множеством состояний $E=\{1, 2, \ldots, N\}$, задаваемая начальным распределением $a_i=\mathbf{P}\{I_0=i\}$ и матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$. Рассмотрим случайные процессы $X(t)$ и $X^{(j)}(t\geqslant 0, j=1, \ldots, N)$, определенные следующим образом:

$$X(t)=\max\left\{n:\sum_{k=0}^{n}\xi_k<t\right\},$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – неотрицательные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P}\{\xi_0=0\}=1,$$

$$\mathbf{P}\{I_1=k, \xi_1<t\mid I_0\}=p_{I_0 k}\hat{F}_{I_0 k}(t),$$

$$\mathbf{P}\{I_{n+1}=k, \xi_{n+1}<t\mid(I_0, \xi_0), \ldots, (I_n, \xi_n)\}=p_{I_n k}F_{I_n k}(t), n\geqslant 1,$$

для всех $t \geqslant 0$ и $k \in E$; $\hat{F}_{ik}(t)$, $F_{ik}(t)$ — заданные функции распределения;

$$X^{(j)}(t)=\sum_{k=1}^{X(t)} \delta_{jI_k},$$

где

$$\delta_{ik}=\begin{cases} 1, & \text{при} \quad i=k, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$X(t)=\sum_{j=1}^{N} X^{(j)}(t).$$

Многомерный случайный процесс $\mathbf{X}(t)=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(N)}(t)\right)$ называется *марковским процессом восстановления* (см. [4]).

Пусть

$$\mathbf{Y}_{n\nu_n}(t)=\sum_{r=1}^{\nu_n} \mathbf{X}_{nr}(t),$$

где $\mathbf{X}_{nr}(t)$ — взаимно независимые при каждом $n$ бесконечно малы марковские процессы восстановления, определенные следующими параметрами:

$$a_i^{(n,r)}, \ p_{ij}^{(n,r)}, \ \hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t), \ F_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Для сокращения записей введем обозначения:

$$\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=p_{ij}^{(n,r)} \hat{F}_{ij}^{(n,r)}(t),$$

$$Q_{ij}^{(n,r)}(t)=p_{ij}^{(n,r)} F_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Условие бесконечной малости процессов $\mathbf{X}_{nr}(t)$, $r=1, \ldots, k_n$, эквивалентно условию

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant k_n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0,$$

где суммирование, как и в дальнейшем, производится по множеству

$$E=(1, \ldots, N).$$

В самом деле,

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{m=1}^{N} X_{nr}^{(m)}(t)>0\right\}=\mathbf{P}\{\xi_1^{(n,r)}<t\}=\sum_i a_i^{(n,r)} \mathbf{P}\{\xi_1^{(n,r)}<t \mid I_0^{(n,r)}=i\}=$$

$$=\sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \mathbf{P}\{I_1^{(n,r)}=j, \ \xi_1^{(n,r)}<t \mid I_0^{(n,r)}=i\}=$$

$$=\sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t).$$

Условие (2) теоремы 1 эквивалентно условию

$$\lim_{c\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{|r-k_n|<ck_n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0$$

для всех $t>0$.

И. Сапаговас [4] показал, что для сходимости процессов

$$\mathbf{Y}_{nk_n}(t)=\sum_{r=1}^{k_n}\mathbf{X}_{nr}(t)$$

к многомерному процессу Пуассона с ведущей функцией

$$\Lambda(t)=\Big(\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_N(t)\Big)$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом фиксированном $t>0$ выполнялись условия

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{i}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\lambda_k(t),\ k=1,\ \ldots,\ N,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\Big\{\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)\ *\ Q_{jk}^{(n,r)}(t)\Big\}=0,$$

где символ $*$ означает свертку.

Отсюда и из теоремы 1 следует такое утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть существуют постоянные $k_n$, такие что*

$$\frac{\nu_n}{k_n}\xrightarrow[\mathbf{P}]{}1\quad(\textit{при } n\to\infty \textit{ по вероятности})$$

$$\lim_{c\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{|r-k_n|<ck_n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant r\leqslant k_n}\sum_{i,j}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)=0$$

*для всех $t>0$.*

*Процессы $\mathbf{Y}_{n\nu_n}(t)$ сходятся при $n\to\infty$ к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\Lambda(t)$ тогда и только тогда, когда при любом фиксированном $t>0$*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\sum_{i}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t)=\lambda_k(t),\quad k=1,\ \ldots,\ N,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{k_n}\Big\{\sum_{i,j,k}a_i^{(n,r)}\hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t)\ *\ Q_{jk}^{(n,r)}(t)\Big\}=0.$$

Из теоремы 2 следует такое утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть величины $\nu_n$ не зависят от процессов $\mathbf{X}_{nr}(t)$ и пусть существуют числа $k_n$, такие что при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_n}{k_n} < x \right\} \to A(x) \quad u k_n \to \infty$$

*в точках непрерывности функции $A(x)$. Пусть выполняется по $y$ равномерно для каждого конечного интервала и всех $t > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{yk_n} \sum_i a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ik}^{(n,r)}(t) = \lambda_k(t), \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{yk_n} \left\{ \sum_{i,j,k} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t) * Q_{jk}^{(n,r)}(t) \right\} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leq r \leq yk_n} \sum_{i,j} a_i^{(n,r)} \hat{Q}_{ij}^{(n,r)}(t) = 0$$

*и функции $A(y)$ и $\lambda_k(y, t)$, $k = 1, \ldots, N$, не итеют совпадающих разрывов по $y$.*

*Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{ \mathbf{Y}_{n\nu_n}(\mathbf{T}) = \mathbf{K} \} =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \prod_{q=1}^{s} \prod_{m=1}^{N} \frac{[\lambda_m(y, t_q) - \lambda_m(y, t_{q-1})]^{k_q^{(m)}}}{k_q^{(m)}!} e^{-[\lambda_m(y, t_q) - \lambda_m(y, t_{q-1})]} \right\} dA(y),$$

*где*

$$\mathbf{K} = (k_1^{(1)}, \ldots, k_1^{(N)}, \ldots, k_s^{(1)}, \ldots, k_s^{(N)}),$$

$$k_q^{(m)} = 0, 1, 2, \ldots, \; q = 1, \ldots, s, \quad m = 1, \ldots, N.$$

В заключение хочу выразить благодарность Б. Григелионису за постановку задачи и внимание к работе.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Поступило в редакцию
1.IX.1970

**Литература**

1. Б. Григелионис, Предельные теоремы для сумм многомерных ступенчатых случайных процессов, Лит. матем. сб., X, 1(1970), 29–49.
2. Б. Фрайер, Задачи теории суммирования и их применения в теории массового обслуживания и теории надежности, М., 1969., канд. диссерт.
3. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Лит. матем. сб., VI, 2(1966), 241–244.
4. И. Сапаговас, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона, Лит. матем., сб., IX, 4(1969), 817–826.
5. Б. Григелионис, О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Теория вероятн. и ее применен., VIII, 2(1963), 189–194.

**APIE ATSITIKTINIO SKAIČIAUS DAUGIAMAČIŲ LAIPTUOTŲ ATSITIKTINIŲ PROCESŲ SUMŲ KONVERGENCIJĄ Į APIBENDRINTUS PUASONO PROCESUS**

R. Banys

*Reziu nė)*

Darbe gautos būtinos ir pakankamos sąlygos atsitiktinio skaičiaus daugiamačių laiptuotų atsitiktinių procesų sumų konvergencijai į daugiamatį Puasono procesą ir pakankamos sąlygos tokių sumų konvergencijai į apibendrintus Puasono procesus tuo atveju, kai dėmenų skaičius, tam tikru būdu normuotas, turi ribinį pasiskirstymą. Taip pat šios sąlygos gautos Markovo atstatymo procesų sumoms.

**ON THE CONVERGENCE OF THE SUMS OF MULTIDIMENSIONAL STOCHASTIC STEP PROCESSES OF RANDOM NUMBER TO GENERALIZED POISSON PROCESSES**

R. Banys

(*Summary*)

In the paper are proved both necessary and sufficient conditions for convergence of the sums of multidimensional stochastic step processes of random number to the Poisson process as well as sufficient conditions for convergence of such sums to generalized Poisson processes in the case when limit distribution exists of a number of components normalized in a certain way. The same conditions for sums of Markov renewal processes are given.