IX LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 2
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 517.537

О ДВОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. И. Трушина

В настоящей работе изучаются целые и мероморфные решения $f(z)$ двойной неоднородной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{L}[f(z)] = \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z), \quad a_1 = 1,\ a_m \neq 0,\ \alpha_1 = 0, \\ \mathbf{M}[f(z)] = \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z), \quad b_1 = 1,\ b_n \neq 0,\ \beta_1 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a_k, α_k и b_i, β_i, $k=1, 2, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, n$ — заданные комплексные числа, а $g(z)$ и $h(z)$ — заданные целые функции экспоненциального типа. Мы предполагаем, что $\alpha_k = t_k\alpha$, $\beta_k = \tau_k\beta$, где

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1, \quad 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = 1, \quad \operatorname{Im}(\alpha : \beta) \neq 0.$$

Таким образом, все точки α_k лежат на отрезке, соединяющем точки $z=0$ и $z=\alpha$, а все точки β_k — на отрезке (неколлинеарном с первым), соединяющем точки $z=0$ и $z=\beta$.

Однородную систему

$$\begin{cases} \mathbf{L}[f(z)] = 0, \\ \mathbf{M}[f(z)] = 0 \end{cases} \tag{2}$$

при таких же условиях изучал А. Г. Нафталевич в работе [2].

Система (1) является сверхопределенной: в ней только одна неизвестная функция $f(z)$ и два уравнения. Действуя на первое из этих уравнений оператором $\mathbf{M}$, а на второе оператором $\mathbf{L}$, мы приходим к необходимому условию совместности системы (1):

$$\mathbf{L}[h(z)] = \mathbf{M}[g(z)].$$

В работе показано, что это условие является и достаточным для существования мероморфных решений системы (1). Кроме того, мы изучили полюсы и главные части этих мероморфных решений и целые решения системы (1).

Следуя работе [2], полузамкнутый параллелограмм П,

$$\Pi : z = u\alpha + v\beta, \quad 0 \leqslant u < 1, \quad 0 \leqslant v < 1$$

назовем *фундаментальным параллелограммом* системы (1), а функции

$$L(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{\alpha_k t}, \quad M(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i e^{\beta_i t} -$$

парой характеристических функций системы (1). Обсобенно просто полученные в работе результаты звучат в случае, когда характеристические функции не имеют общих нулей. В этом случае система (1) имеет единственное целое решение и единственное мероморфное решение с наперед заданными полюсами и главными частями в фундаментальном параллелограмме.

В работе разобран также случай, когда характеристические функции $L(t)$ и $M(t)$ имеют общие нули.

§ 1. Целые решения

Если $f(z)$ – целая функция, то

$$f(z+\gamma)=f(z)+\frac{\gamma}{1!}f'(z)+\frac{\gamma^2}{2!}f''(z)+\ldots$$

Обозначим через D оператор дифференцирования

$$\left(Df(z)=f'(z)\right).$$

Предыдущее разложение запишем в виде

$$f(z+\alpha)=\left[1+1\frac{\gamma}{1!}D+\frac{\gamma^2}{2!}D^2+\ldots\right]f(z)=e^{\gamma D}f(z),$$

а оператор $\mathbf{L}[f(z)]$ в виде $L(D)f(z)$, где

$$L(D)=\sum_{k=1}^{m}a_k e^{\alpha_k D}. \tag{3}$$

Аналогично, оператор $\mathbf{M}[f(z)]$ перепишется как $M(D)f(z)$, где

$$M(D)=\sum_{i=1}^{n}b_i e^{\beta_i D}, \tag{4}$$

и система (1) в виде

$$\begin{cases} L(D)f(z)=g(z), \\ M(D)f(z)=h(z). \end{cases} \tag{5}$$

При изучении целых решений системы (1) мы не будем использовать разностный характер операторов $L(D)$ и $M(D)$, и все исследования проведем предполагая, что $L(t)$ и $M(t)$ – любые целые функции экспоненциального типа, общие нули которых подчинены следующему единственному ограничению. Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ общие нули функций $L(t)$ и $M(t)$, то существует целая функция $K(t)$ экспоненциального типа, имеющая нули в точках λ_1, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ и только в них. При этом, если λ_i нуль кратности k_{i1} для функции $L(t)$ и кратности k_{i2} для функции $M(t)$, то считаем, что λ_i является нулем кратности

$$k_i=\min(k_{i1}, k_{i2}) \tag{6}$$

для функции $K(t)$. Если функции $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей, то полагаем $K(t)=1$.

Пару операторов $L(D)$ и $M(D)$, характеристические функции которых удовлетворяют указанным условиям, назовем **нормальной** парой дифференциальных операторов. Оператор $K(D)$ назовем **общим делителем** этой пары $L(D)$, $M(D)$.

Теорема 1. *Пусть $L(D)$ и $M(D)$ нормальная пара дифференциальных операторов, $K(D)$ их общий делитель, а $g(z)$ и $h(z)$ — целые функции экспоненциального типа. Для того, чтобы система* (5) *имела целое решение $f_0(z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{L(D)}{K(D)} h(z) = \frac{M(D)}{K(D)} g(z). \tag{7}$$

Если это условие выполнено, то общее целое решение системы (1) *имеет вид*

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z), \tag{8}$$

где $f_1(z)$ — любое целое решение уравнения

$$K(D) f(z) = 0.$$

В частности, если $K(D) \equiv 1$, то система (1) *имеет единственное целое решение.*

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала частный случай, когда $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей. В этом случае $K(D) \equiv 1$ и условие (7) переходит в

$$L(D) h(z) = M(D) g(z). \tag{9}$$

Необходимость этого условия нами уже была отмечена во введении.

Предположим теперь, что условие (9) выполнено. Рассмотрим второе уравнение системы (5):

$$M(D) f(z) = h(z).$$

Это уравнение имеет целое решение $f_1(z)$, являющееся целой функцией экспоненциального типа (см. [1], стр. 359).

Следовательно,

$$M(D) f_1(z) \equiv h(z). \tag{10}$$

Заменим в системе (1)

$$f(z) = f_1(z) + \varphi(z), \tag{11}$$

мы получим:

$$\begin{cases} L(D)[f_1(z) + \varphi(z)] = g(z), \\ M(D)[f_1(z) + \varphi(z)] = h(z), \end{cases}$$

или учитывая (10),

$$\begin{cases} L(D)\varphi(z) = E(z), \\ M(D)\varphi(z) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$E(z) = g(z) - L(D) f_1(z) - \tag{13}$$

целая функция экспоненциального типа.

Заметим, что согласно (9) и (10)

$$M(D)\,E(z)=M(D)\,[g(z)-L(D)\,f_1(z)]=M(D)\,g(z)-$$
$$-L(D)\,M(D)f_1(z)=M(D)\,g(z)-L(D)\,h(z)\equiv 0.$$

Тогда (см. [1], стр. 346)

$$E(z)=\sum_{i=1}^{t} P_i(z)\,e^{\lambda_i z}\,, \tag{14}$$

где λ_i, $i=1, 2, 3, \ldots t$ — нули кратности k_i функции $M(t)$ и $P_i(z)$ — многочлены, степень которых строго меньше k_i.

Таким образом, система (12) перепишется в виде

$$\begin{cases} L(D)\,\varphi(z)=\sum\limits_{i=1}^{t} P_i(z)\,e^{\lambda_i z}\,, \\ M(D)\,\varphi(z)=0. \end{cases} \tag{15}$$

Так как по условию функции $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей, то при всех i —

$$L(\lambda_i)\neq 0. \tag{16}$$

Поэтому существует такой многочлен $P_i^*(z)$, степень которого совпадает со степенью многочлена $P_i(z)$, что

$$L(D)\,P_i^*(z)\,e^{\lambda_i z}=P_i(z)\,e^{\lambda_i z}\,. \tag{17}$$

При этом

$$M(D)\,P_i^*(z)\,e^{\lambda_i z}=0$$

и целая функция

$$\varphi(z)=\sum_{i=1}^{t} P_i^*(z)\,e^{\lambda_i z}\, - \tag{18}$$

является решением системы (15). Следовательно $\big($см. (11)$\big)$, функция

$$f(z)=f_1(z)+\sum_{i=1}^{t} P_i^*(z)\,e^{\lambda_i z}\, - \tag{19}$$

является целым решением системы (5).

Это решение единственно, так как однородная система

$$\begin{cases} L(D)\,f(z)=0, \\ M(D)\,f(z)=0 \end{cases} \tag{20}$$

имеет в этом случае (см. [1], стр. 363) только тривиальное целое решение $f(z)\equiv 0$.

1. Обозначим через

$$L_1(D)=\frac{L(D)}{K(D)}\,, \qquad M_1(D)=\frac{M(D)}{K(D)}\,. \tag{21}$$

Систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} L_1(D)\, K(D) f(z) = g(z), \\ M_1(D)\, K(D) f(z) = h(z). \end{cases} \tag{22}$$

Замена

$$F(z) = K(D) f(z) \tag{23}$$

переводит систему (22) в

$$\begin{cases} L_1(D)\, F(z) = g(z), \\ M_1(D)\, F(z) = h(z). \end{cases} \tag{24}$$

По условиям теоремы $L_1(t)$ и $M_1(t)$ — функции экспоненциального типа и не имеют общих нулей. Поэтому система (24) полностью соответствует предыдущему случаю, и условие

$$L_1(D)\, h(z) = M_1(D)\, g(z) \ -$$

необходимо и достаточно для существования целого решения $F_0(z)$ системы (24). При этом $F_0(z)$ — единственное целое решение этой системы. Учитывая замену (23), приходим к дифференциальному уравнению бесконечного порядка

$$K(D) f(z) = F_0(z), \tag{25}$$

имеющему те же целые решения, что и система (1). Так как $K(t)$ — функция экспоненциального типа, то (см. [1], стр. 359) это уравнение имеет целое решение $f_0(z)$. Общее решение этого уравнения, а вместе с тем и общее решение системы (1), имеет, очевидно, указанный в теореме вид.

2. Обратимся к изучению роста целых решений системы (1). Условимся о некоторых терминах.

Определение. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция, порядок которой равен ρ, а тип σ. Пару чисел (ρ, σ) назовем ростом функции $\varphi(z)$. Условимся считать, что рост (ρ_1, σ_1) равен росту (ρ_2, σ_2), если $\rho_1 = \rho_2$ и $\sigma_1 = \sigma_2$. Если $\rho_1 > \rho_2$, или при $\rho_1 = \rho_2$ выполняется неравенство $\sigma_1 > \sigma_2$, то рост (ρ_1, σ_1) будем считать больше роста (ρ_2, σ_2). Рост пары функций $g(z)$ и $h(z)$ равен наибольшему из ростов функций $g(z)$ и $h(z)$.

Пусть $M(D)$ — нормальный оператор (оператор $M(D)$ называем нормальным, если $M(t)$ — функция экспоненциального типа). Как показано в [1], рост функции $M(D) f(z)$ не больше роста функции $f_1(z)$. Там же показано, что уравнение

$$M(D) f(z) = h(z),$$

где $h(z)$ — целая функция имеет хотя бы одно решение $f(z)$, рост которого совпадает с ростом функции $h(z)$.

Лемма 1. *Пусть $L(D)$ и $M(D)$ — нормальная пара дифференциальных операторов, характеристические функции которых не имеют общих нулей, а $g(z)$ и $h(z)$ — функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию*

$$L(D)\, h(z) = M(D)\, g(z).$$

Тогда рост целого решения системы (1) *равен росту пары функций* $\big(g(z), h(z)\big)$.

Доказательство. Из сказанного выше следует, что рост решения $f(z)$ системы (1) не меньше роста пары $\left(g, (z), h(z)\right)$.

Нам осталось показать, что рост решения $f(z)$ не больше роста этой пары. Для этого проследим ход доказательства теоремы (1) в частном случае, когда $L(t)$ и $M(t)$ не имеют общих нулей.

Целое решение системы (1) мы представили в виде

$$f(z)=f_1(z)+\varphi(z), \tag{11}$$

где $f_1(z)$ — произвольное целое решение уравнения $M(D)f(z)=h(z)$, а $\varphi(z)$ — решение системы (12), свободный член $E(z)$ которой задан равенством (14). Решение $f_1(z)$ можем выбрать так, чтобы его рост совпадал с ростом функции $h(z)$. Из (14) следует, что рост функции $E(z)$ не больше роста пары $\left(g(z),\right.$ $\left.h(z)\right)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть рост пары $(g(z), h(z))$ не больше $(1,0)$. Тогда рост $E(z)$ также не больше $(1, 0)$, следовательно, $E(z)$ — полином и, очевидно, решение $\varphi(z)$ системы (12) также полином. Таким образом, единственное целое решение $f(z)=f_1(z)+\varphi(z)$ системы (1) в этом случае имеет рост не больше роста пары $\left(g(z), h(z)\right)$.

2. Пусть рост пары $\left(g(z), h(z)\right)$ равен $(1, \sigma)$, $\sigma>0$. Тогда, как уже отмечали, рост функции $E(z)$ не больше $(1, \sigma)$. Следовательно, показатели λ_i $\left(\text{из равенства (14)}\right)$ удовлетворяют неравенство $|\lambda_i|\leqslant\sigma$. Нами было показано, что решение $\varphi(z)$ системы (12) имеет вид

$$\varphi(z)=\sum_{i=1}^{t} P_i^*(z)\,e^{\lambda_i z}, \tag{18}$$

где $P_i^*(z)$ многочлены. Следовательно, рост $\varphi(z)$ не больше $(1, \sigma)$. То же самое верно и для единственного целого решения системы (1). То есть и в этом случае $f(z)=f_1(z)+\varphi(z)$ имеет рост не больше роста пары $\left(g(z), h(z)\right)$.

В общем случае верна

Теорема 2. *Пусть $L(D)$ и $M(D)$ нормальная пара операторов и $g(z)$, $h(z)$ — целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию совместности* (9). *Система дифференциальных уравнений* (1) *имеет хотя бы одно решение, рост которого совпадает с ростом пары* $\left(g(z), h(z)\right)$.

В частном случае, когда $L(D)$ и $M(D)$ разностные операторы (3) *и* (4), *любое целое решение системы* (1) *принадлежат к экспоненциальному типу.*

Доказательство. Рассмотрим построенные нами ранее $\left(\text{см. формулы (22)}-\text{(25)}\right)$ целые решения системы (1). По лемме 1 рост целого решения $F(z)=$ $=F_0(z)$ системы (24) равен росту пары $\left(g(z), h(z)\right)$.

Уравнение (25) (см. [1]), а вместе с ним и система (1), имеют хотя бы одно целое решение, рост которого такой же, как рост $F_0(z)$. В том случае, когда $L(D)$ и $M(D)$ разностные операторы, функции $L(t)$ и $M(t)$ имеют только конечное число общих нулей (см. [2]). Следовательно, уравнение (25) – дифференциальное уравнение конечного порядка и любое его решение $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа.

§ 2. Мероморфные решения

1. При изучении мероморфных решений системы (1) нам придется учесть разностный характер операторов $L(D)$ и $M(D)$. Мы предположим, что $L(D)$ и $M(D)$ – операторы (3) и (4), удовлетворяющие всем условиям, указанным во введении. Прежде чем разыскивать мероморфное решение системы (1) в общем случае, докажем лемму.

Лемма 2. *Пусть имеем две функции вида*

$$q(z)=\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i z}\,\Theta_i(z) \quad p(z)=\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i z} P_i(z), \tag{26}$$

где μ_i – некоторые различные комплексные числа, а $\Theta_i(z)$ и $P_i(z)$ – полиномы, причем степень полинома $\Theta_i(z)$ не больше чем степень полинома $P_i(z)$. Существует такой дифференциальный оператор конечного порядка $S(D)$, что

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i z}\,\Theta_i(z)=S(D)\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i z} P_i(z). \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда

$$q(z)=\Theta(z),\ p(z)=P(z) \ -$$

полиномы:

$$P(z)=\sum_{i=0}^{n} a_k z^k, \quad \Theta(z)=\sum_{l=0}^{m} bl\, z^l, \tag{28}$$

$$(b_m\neq 0,\ a_n\neq 0,\ n\geqslant m).$$

Покажем, что найдется зависящий от полиномов $P(z)$ и $\Theta(z)$ оператор $S(D)=$ $=S(D,P,\Theta)$, для которого

$$\Theta(z)=S(D,P,\Theta)\,P(z). \tag{29}$$

Если $m=0$, то $\Theta(z)=b_0$ и в этом случае

$$S(D)=\frac{b_0}{n!\,a_n}\,D^n. \tag{30}$$

Действительно,

$$b_0=\frac{b_0}{n!\,a_n}\,D^n P(z).$$

Пользуясь методом индукции, предположим, что для полинома $\tilde{\Theta}(z)$ степени $m-1$ существует оператор $\tilde{S}(D)$ такой, что

$$\tilde{\Theta}(z)=\tilde{S}(D)\,P(z),$$

и заметим, что

$$\tilde{\Theta}(z) \equiv \frac{b_m}{n(n-1)\ldots(m-1)a_n} D^{n-m} P(z) - \Theta(z)$$

является полиномом степени $m-1$. Тогда

$$\Theta(z) = S(D) P(z),$$

где

$$S(D) = \frac{b_m}{n(n-1)\ldots(m-1)a_n} D^{n-m} - \tilde{S}(D). \tag{31}$$

Укажем еще на следующее свойство только что построенного оператора $S(D, P, \Theta)$:

$$S(D-\mu, P, \Theta)\, e^{\mu z} P(z) \equiv e^{\mu z}\, \Theta(z). \tag{32}$$

В самом деле,

$$D\left(e^{\mu z} P(z)\right) \equiv e^{\mu z} (D+\mu) P(z),$$

и поэтому

$$S(D-\mu, P, \Theta)\,[e^{\mu z} P(z)] \equiv e^{\mu z} S(D, P, \Theta) P(z) \equiv e^{\mu z}\, \Theta(z). \tag{33}$$

Теперь нетрудно закончить доказательство леммы. Пусть k_i – степень многочлена $P_i(z)$ (см. правую часть (26)). Тогда

$$(D-\mu_i)^{k_i+1} e^{\mu_i z} P_i(z) = e^{\mu_i z} D^{k_i+1} P_i(z) \equiv 0 \tag{34}$$

и

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (D-\mu_j)^{k_j+1} p(z) = e^{\mu_i z} P_i^*(z), \tag{35}$$

где

$$P_i^*(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (D-\mu_j+\mu_i) P_i(z) - \tag{36}$$

полином той же степени k_i, что и $P_i(z)$.

Нетрудно проверить, что оператор

$$S(D) = \frac{\varphi(D) \sum\limits_{i=1}^{n} S(D-\mu_i, P_i^*, \Theta_i)}{(D-\mu_i)^{k_i+1}}, \tag{37}$$

где

$$\varphi(D) = \prod_{i=1}^{n} (D-\mu_i)^{k_i+1} \tag{38}$$

имеет все требуемые в лемме 2 свойства. В самом деле, i-ый член этой суммы –

$$S_i(D) = \frac{\varphi(D)\, S(D-\mu_i, P_i^*, \Theta_i)}{(D-\mu_i)^{k_i+1}} \tag{39}$$

из-за наличия множителя

$$\frac{\varphi(D)}{(D-\mu_i)^{k_i+1}} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (D-\mu_j)^{k_j+1} \tag{40}$$

уничтожает все слагаемые $e^{\mu_j z} P_j(z)$ суммы $p(z)$, кроме слагаемого $e^{\mu_i z} P_i(z)$. Это слагаемое оператор $S_i(D)$ переводит в $e^{\mu_i z} \Theta_i(z)$.

2. Пусть μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — общие нули характеристических функций $L(t)$ и $M(t)$, k_{i1} (k_{i2}) — кратность нуля μ_i по отношению к функции.

$L(t)$ $\big(M(t)\big)$ и $k_i = \min(k_{i1}, k_{i2})$.

В работе [2] показано, что существует мороморфная функция $H(z)$, имеющая такие свойства:

1) $H(z)$ имеет в фундаментальном параллелограмме единственный простой полюс $z=0$ с вычетом равным единице;

$$2)\ L(D)\,H(z) = \sum_{i=1}^{p} \delta_i P_i(z)\, e^{\mu_i z},$$

$$M(D)\,H(z) = \sum_{i=1}^{p} (1-\delta_i) P_i(z)\, e^{\mu_i z}, \tag{41}$$

где $P_i(z)$ — полином, степень которого равна

$k_i - 1$ и $\delta_i = 1$,

если $k_i = k_{i2}$, и $\delta_i = 0$, если $k_i = k_{i1}$. Эту функцию $H(z)$ будем называть H-функцией.

Теорема 3. *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ — целые функции экспоненциального типа. Для того чтобы система разностных уравнений (1) имела мероморфное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$L(D)\,h(z) = M(D)\,g(z). \tag{9}$$

Если это условие соблюдено, то мероморфное решение можно выбрать таким, чтобы в фундаментальном параллелограмме оно имело единственный полюс в точке $z=0$.

Доказательство. Нами было уже показано, что (9) — необходимое условие совместности системы (1). Остается показать его достаточность для существования мероморфного решения этой системы.

Случай, когда характеристические функции не имеют общих нулей, мы уже рассмотрели в теореме 1.

Пусть μ_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — общие нули функций $L(t)$ и $M(t)$ и k_i — их кратности по отношению к паре $\big(L(t), M(t)\big)$, то есть числа k_i определяются равенством (6). Тогда оператор

$$K(D) = \prod_{i=1}^{p} (D-\mu_i)^{k_i} \tag{42}$$

будет общим делителем пары $L(D)$ и $M(D)$.

Решение системы будем искать в виде

$$f(z)=f_0(z)+S(D)H(z), \tag{43}$$

где $f_0(z)$ – целая функция, $S(D)$ – некоторый дифференциальный оператор конечного порядка и $H(z)$ – H-функция.

Система (1), учитывая замену (43), перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} L(D)f_0(z)=g(z)-L(D)S(D)H(z), \\ M(D)f_0(z)=h(z)-M(D)S(D)H(z). \end{cases} \tag{44}$$

Для существования целого решения $f_0(z)$ этой системы необходимо и достаточно по теореме 1, чтобы

$$\frac{L(D)}{K(D)}[h(z)-M(D)S(D)H(z)]=\frac{M(D)}{K(D)}[g(z)-L(D)S(D)H(z)], \tag{45}$$

где $K(D)$ имеет вид (46).

Для завершения доказательства теоремы нам надо показать, что оператор $S(D)$ может быть выбран так, чтобы выполнялось (45). Это равенство (45) перепишем, пользуясь формулами (21), в виде

$$L_1(D)h(z)-M_1(D)g(z)=S(D)[L_1(D)M(D)H(z)$$
$$M_1(D)L(D)H(z)]. \tag{46}$$

Если вместо $L(D)H(z)$ и $M(D)H(z)$ подставить их значения из формулы (41), то придем к

$$L_1(D)h(z)-M_1(D)g(z)=$$
$$=S(D)\Big[L_1(D)\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)P_i(z)e^{\mu_i z}-$$
$$-M_1(D)\sum_{i=1}^{p}\delta_i P_i(z)e^{\mu_i z}\Big]. \tag{47}$$

Учитывая свойства функции $H(z)$, нетрудно убедиться, что

$$L_1(D)\sum_{i=1}^{p}(1-\delta_i)P_i(z)e^{\mu_i z}-M_1(D)\sum_{i=1}^{p}\delta_i P_i(z)e^{\mu_i z}=$$
$$=\sum_{i=1}^{p}P_i^*(z)e^{\mu_i z}, \tag{48}$$

где $P_i^*(z)$ – полиномы степени k_i.

Равенство же (47) примет вид

$$L_1(D)h(z)-M_1(D)g(z)=S(D)\Big[\sum_{i=1}^{p}P_i^*(z)e^{\mu_i z}\Big]. \tag{49}$$

Из условия (9) следует, что

$$K(D)[L_1(D)h(z)-M_1(D)g(z)]\equiv 0. \tag{50}$$

Так как

$$K(D)=\prod_{i=1}^{p}(D-\mu_i)^{k_i},$$

то уравнение (50) – линейное дифференциальное уравнение конечного порядка с постоянными коэффициентами и

$$L_1(D)\,h(z)-M_1(D)\,g(z)=\sum_{i=1}^{p}\Theta_i(z)\,e^{\mu_i z}, \tag{51}$$

где степень полинома $\Theta_i(z)$ строго меньше кратности k_i нуля μ_i.

Таким образом, равенство (49) преобразовалось

$$\sum_{i=1}^{p}\Theta_i(z)\,e^{\mu_i z}=S(D)\sum_{i=1}^{p}P_i(z)\,e^{\mu_i z}, \tag{52}$$

где степени полиномов $\Theta_i(z)$ не превышают соответствующих степеней полиномов $P_i(z)$. По лемме 2 такой оператор $S(D)$ существует. Следовательно, система (1) имеет мероморфное решение

$$f(z)=f_0(z)+S(D)\,H(z),$$

где $f_0(z)$ – целая функция. Очевидно, что это решение имеет в фундаментальном параллелограмме единственный полюс в точке $z=0$ с главной частью $S(D)\frac{1}{z}$.

3. Определенный в доказательстве теоремы 3 дифференциальный оператор $S(D)$ назовем S-оператором и обратимся к построению мероморфных решений совместной системы (1) с наперед заданными в фундаментальном параллелограмме Π полюсами и главными частями.

Пусть $\gamma\in\Pi$ и

$$\gamma=u\alpha+v\beta,\quad t_k\leqslant u<t_{k+1},\quad \tau_l\leqslant v<\tau_{l+1}$$

(другими словами, γ лежит в полузамкнутом параллелограмме с вершинами

$$\alpha_k+\beta_l,\quad \alpha_{k+1}+\beta_l,\quad \alpha_{k+1}+\beta_{l+1},\quad \alpha_k+\beta_{l+1}).$$

Как и в работе [2], через $N_\gamma(t)$ обозначим функцию

$$N_\gamma(t)=e^{-\gamma t}L_\gamma(t)\,M_\gamma(t), \tag{53}$$

где

$$L_\gamma(t)=\sum_{i=1}^{k}a_i\,e^{\alpha_i t},\qquad M_\gamma(t)=\sum_{j=1}^{l}b_j\,e^{\beta_j t}. \tag{54}$$

Заметим, что $L_\gamma(t)$ и $M_\gamma(t)$ – частичные суммы от $L(t)$ и $M(t)$, число слагаемых в которых определено положением точки γ в параллелограмме Π.

Теорема 4. *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ – целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие условию совместности* (9) *и*

$$R(z,\,\gamma_k)=\sum_{l=1}^{s_k}\frac{c_{kl}}{(z-\gamma_k)^l},\quad k=1,\,2,\,\dots,\,l- \tag{55}$$

произвольно заданные рациональные функции, полюсы которых лежат в фундаментальном параллелограмме Π. *Для того чтобы существовало мероморфное решение системы* (1), *имеющее в* Π *полюсы в точках* γ_k *и только в них с главными частями* $R(z, \gamma_k)$ *необходимо и достаточно, чтобы каждый нуль пары характеристических функций* $L(t)$ *и* $M(t)$ *являлся и нулем (с учетом его кратности) функции*

$$R(t)=\sum_{k=1}^{l} N_{\gamma_k}(t) \sum_{i=1}^{s_k} (-1)^{i-1} \frac{c_{ki}}{(i-1)!} t^{i-1}-S(t), \tag{56}$$

где $S(D)$ — S-*оператор.*

Доказательство. В системе (1) произведем замену

$$F(z)=f(z)+\Phi(z), \tag{57}$$

где

$$f(z)=f_0(z)+S(D)H(z) -$$

мероморфное решение системы (1) и $f_0(z)$ — целая функция. Мы получим однородную систему

$$\begin{cases} L(D)\,\Phi(z)=0, \\ M(D)\,\Phi(z)=0. \end{cases} \tag{58}$$

По теореме 2 работы [2] эта система имеет мероморфное решение с главными частями $R(z, \gamma_k)$ и $-S(D)\frac{1}{z}$ в том и только в том случае, когда каждый общий нуль пары $L(t)$ и $M(t)$ является нулем и функции $R(t)$. Из (57) следует, что это же условие необходимо и достаточно для существования мероморфного решения $F(z)$ системы (1) с главными частями $R(z, \gamma_k)$.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 9.VI.1970

Литература

1. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.-Л., 1967.
2. А. Г. Нафталевич, Обобщение одной теоремы Эрмита, Лит. матем. сб., V. № 4 (1965), 605–636.

DVILYPĖS NEHOMOGENINĖS SKIRTUMINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS KLAUSIMU

L. I. Trušina

(*Reziumė*)

Darbe nagrinėjame dvilypes skirtuminių lygčių sistemos

$$\begin{cases} \mathbf{L}[f(z)] \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k)=g(z), \quad a_1=1, \quad a_m \neq 0, \quad \alpha_1=0, \\ \mathbf{M}[f(z)] \equiv \sum_{l=1}^{n} b_l f(z+\beta_l)=h(z), \quad b_1=1, \quad b_n \neq 0, \quad \beta_1=0 \end{cases}$$

meromorfinius ir sveikus sprendinius $f(z)$. Tariame, kad

$$a_k,\ \alpha_k \text{ ir } b_i,\ \beta_i,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-$$

yra kompleksiniai skaičiai ir g (z), $h(z)$ — sveikos eksponentinio tipo funkcijos.

ÜBER ZWEIFACHE INHOMOGENE SYSTEME VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN

L. I. Truschina

(*Zusammenfassung*)

In dieser Arbeit untersuchen wir die ganzen und meromorphen Lösungen $f(z)$ des zweifachen Systems von Differenzengleichungen

$$\begin{cases} L[f(z)] \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k f(z+\alpha_k) = g(z), & a_1=1,\quad a_m \neq 0,\quad \alpha_1=0, \\ M[f(z)] \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i f(z+\beta_i) = h(z), & b_1=1,\quad b_n \neq 0,\quad \beta_1=0, \end{cases}$$

wo

$$a_k,\ \alpha_k \text{ und } b_i,\ \beta_i,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

komplexe Zahlen und $g(z)$, $h(z)$ ganze Funktionen vom Exponentialtypus bedeuten.