XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1971

УДК 511

УТОЧНЕНИЕ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМА ОТ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ж. Толеуов, А. С. Файнлейб

Распределение значений арифметических функций, областью определения которых являются некоторые подмножества натурального ряда, изучалось в работах Г. Халберстама [2], Р. В. Уждавиниса [5, 6], М. Б. Барбана [3, 4]. Наиболее общие результаты в этом направлении принадлежат М. Б. Барбану, который рассматривал аддитивные функции, заданные на множестве значений полинома от последовательностей, „в среднем“ равномерно распределенных по прогрессиям (в частности, на множестве значений полинома от простых чисел).

В настоящей заметке мы получим оценки скорости сходимости в интегральной теореме для одного класса аддитивных функций, определенных на множествах такого типа.

Пусть $d(D)$ – сильно мультипликативная функция, принимающая целые положительные значения, причем $d(D)/D$ для всех D,

$$\varphi^*(D)=D\prod_{p/d(D)}\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \eta(D,\ l)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varphi^*(D)}, & \text{если } \big(l,\ d(D)\big)=1,\\ 0, & \text{если } \big(l,\ d(D)\big)\neq 1.\end{cases}$$

Пусть, далее a_n – последовательность натуральных чисел,

$$N(x)=\sum_{a_n\leqslant x}1,\quad N(x,\ D,\ l)=\sum_{\substack{a_n\leqslant x\\ a_n\equiv l(D)}}1;$$

$$R(x,\ D)=\max_{l \bmod D}|N(x,\ D,\ l)-\eta(D,\ l)\,N(x)|,$$

$K(u)$ – полином с целыми коэффициентами, $K(a_n)\neq 0$, $K(0)\neq 0$,

$$\omega(D)=\sum_{\substack{l \bmod D\\ K(l)\equiv 0\ (D)}}1,\quad \omega^*(D)=\sum_{\substack{l \bmod D\\ K(l)\equiv 0\ (D)\\ (l,\ d(D))=1}}1.$$

Теорема 1. *Пусть a_n — последовательность натуральных чисел, такая, что существует $\alpha>0$, для которого*

$$N(x,\ D,\ l)\ll\frac{N(x)}{\varphi^*(D)}\quad \text{при}\quad D\leqslant x^\alpha,$$

$$\sum_{D\leqslant x^\alpha} R(x,\ D)\ll\frac{N(x)}{\ln^A x},$$

где A — сколь угодно большая константа. Тогда, если $\psi(m)$ — вещественная сильно аддитивная функция, $\psi(p)=o(1)$, ряд $\sum\limits_p \frac{\psi^2(p)}{p}$ сходится, и при $n\neq m$

$$|\psi(n)-\psi(m)|>(nm)^{-a},$$

где a — константа, то

$$N\left(a_n\leqslant x,\ \psi\left(|K(a_n)|\right)-\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\leqslant W\right)=$$

$$=N(x)F(W)+O\left(N(x)\left(\frac{\ln\ln\frac{1}{\rho(x)}}{\ln\frac{1}{\rho(x)}\cdot\ln\ln\ln\frac{1}{\rho(x)}}\right)^s\right)$$

равномерно по W, где $F(W)$—функция распределения, определенная характеристической функцией

$$\chi(t)=\prod_p\left(1+\frac{e^{it\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right)\cdot e^{-it\frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}},$$

s — число неприводимых множителей полинома $K(u)$,

$$\rho(x)=\Bigg(\sum_{p>\exp b\frac{\ln x}{\ln\ln x}}\frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p}\Bigg)^{1/2}+\max_{p>x^{\alpha/2}}|\psi(p)|\,\omega(p),$$

$b>0$ — постоянная.

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. (аналог неравенства Турана—Кубилюса). *В условиях теоремы 1 имеет место неравенство*

$$\sum_{a_n\leqslant x}\left|\psi\left(|K(a_n)|\right)-A(x)\right|^2\ll N(x)\{B^2(x)+M^2(x)\},$$

где

$$A(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{\varphi^*(p)},\quad B(x)=\Bigg(\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p}\Bigg)^{1/2},$$

$$M(x)=\max_{\substack{x^{\alpha/2}<p\leqslant|K(x)|\\ \omega(p)\neq 0}}|\psi(p)|.$$

Постоянная в символе $\ll$ зависит от последовательности a_n и от полинома $K(u)$, но не зависит от функции $\psi(n)$.

Доказательство приведено в работе [10].

Лемма 2. *Пусть m_y означает произведение различных простых делителей m, не превосходящих y. Тогда в условиях теоремы 1 при $z \geqslant \max(k, y)$*

$$I_k(x, y) = \sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ |K(a_n)|_y = k}} 1 = \frac{\omega^*(k)}{\varphi^*(k)} N(x) \prod_{\substack{p \leqslant y \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right) \left\{1 + O\left(e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}\right)\right\} +$$

$$+ O\left((\ln z)^c \omega(k) \sum_{d \leqslant z^3} \tau^c(d) R(x, [d, k])\right),$$

где c — константа.

Доказательство получается методом решета А. Сельберга подобно тому, как это делается в монографии [1] (см. также [4]).

Лемма 3. *Имеет место оценка*:

$$\sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ |K(a_n)|_y > z}} 1 \ll N(x) \cdot e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}, \qquad c > 0.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 7.2 работы М. Б. Барбана [4].

Лемма 4. (Оценка характеристической функции).

При $y \leqslant x$ равномерно по всем вещественным t

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{a_n \leqslant x} \exp it \left(\psi\left(|K(a_n)|\right) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\right) =$$

$$= \chi(t) + O\left(\frac{1}{y \ln y}\right) + O\left(e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}\right) + O\left(\frac{1}{\ln^{A_1} x}\right) +$$

$$+ O\left(|t| \cdot \left(\sum_{p > y} \frac{\psi^2(p) \cdot \omega(p)}{p}\right)^{1/2}\right) + O\left(|t| \cdot \max_{p > x^{\alpha/2}} |\psi(p)|\, \omega(p)\right).$$

Доказательство. Пусть $f(m) = e^{it\psi(m)}$. Так как $f(m)$ сильно мультипликативна, то

$$\sum_{a_n \leqslant x} f(|K(a_n)|_y) = \sum_{\substack{k \leqslant |K(x)| \\ k / \pi_y}} f(k) \sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ |K(a_n)|_y = k}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{k \leqslant |K(x)| \\ k / \pi_y}} f(k) I_k(x, y) = \sum_{k \leqslant z} + \sum_{k > z};$$

по лемме 2,

$$\sum_{\substack{k \leqslant z \\ k / \pi_y}} f(k) I_k(x, y) = N(x) \sum_{\substack{k \leqslant z \\ k / \pi_y}} \frac{f(k)\,\omega^*(k)}{\varphi^*(k)} \prod_{\substack{p \leqslant y \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right) \left\{1 + O\left(e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}\right)\right\} +$$

$$+ O\left((\ln z)^c \sum_{\substack{k \leqslant z \\ k / \pi_y}} \omega(k) \sum_{l \leqslant z^3} \tau^c(l) R(x, [l, k])\right).$$

Пусть n_0 — произведение всех простых чисел p, для которых $\omega^*(p)=\varphi^*(p)$ (таких p имеется, очевидно, конечное число). Тогда

$$\sum_{\substack{k\leqslant z\\ k/\pi_y}} \frac{f(k)\,\omega^*(k)}{\varphi^*(k)}\cdot\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid k}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)=\sum_{\substack{k\leqslant z\\ k/\pi_y\\ k\equiv 0\,(n_0)}} \frac{f(k)\cdot\omega^*(k)}{\varphi^*(k)}\cdot\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid k}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)=$$

$$=\frac{f(n_0)\cdot\omega^*(n_0)}{\varphi^*(n_0)}\sum_{\substack{m\leqslant\frac{z}{n_0}\\ m\,\big/\,\frac{\pi_y}{n_0}}}\frac{f(m)\,\omega^*(m)}{\varphi^*(m)}\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid m\\ p\nmid n_0}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)=$$

$$=f(n_0)\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\sum_{\substack{m\leqslant\frac{z}{n_0}\\ m\,\big/\,\frac{\pi_y}{n_0}}}\frac{f(m)\,\omega^*(m)}{\varphi^*(m)\prod\limits_{p/m}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)}=$$

$$=f(n_0)\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1+\frac{f(p)\,\omega^*(p)}{\varphi^*(p)-\omega^*(p)}\right)+$$

$$+O\left(\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1+\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)-\omega^*(p)}\right)e^{-c\frac{\ln\frac{z}{n_0}}{\ln y}}\right)=$$

$$=f(n_0)\prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid n_0}}\left(1+\frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right)+O\left(e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}\right)=$$

$$=\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right)+O\left(e^{-c\frac{\ln z}{\ln y}}\right).$$

Далее,

$$\sum_{\substack{k\leqslant z\\ k/\pi_y}}\omega(k)\sum_{l\leqslant z^3}\tau^c(l)\,R(x,\,[l,\,k])\leqslant\sum_{D\leqslant z^4}R(x,\,D)\sum_{[l,\,k]=D}\omega(k)\,\tau^c(l)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{D\leqslant z^4}R(x,\,D)\sum_{k/D}\omega(k)\sum_{l/D}\tau^c(l)\leqslant\sum_{D\leqslant z^4}\tau^{c_1}(D)\,R(x,\,D)\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sum_{D\leqslant z^4}\frac{\tau^{2c_1}(D)}{\varphi^*(D)}\sum_{D\leqslant z^4}\varphi^*(D)\,R^2(x,\,D)\Big)^{1/2}\ll\Big(N(x)\cdot\ln^{2c_1}x\sum_{D\leqslant z^4}R(x,\,D)\Big)^{1/2}\ll$$

$$\ll\frac{N(x)}{\ln^{A_1}x},\quad\text{если}\quad z\leqslant x^{\alpha/4}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\substack{k\leqslant x^{\alpha/4}\\ k/\pi_y}}f(k)\,I_k(x,\,y)=N(x)\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right)+$$

$$+O\left(N(x)\,e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right)+O\left(\frac{N(x)}{\ln^{A_1}x}\right).$$

По лемме 3, так как $|f(k)=1$,

$$\left| \sum_{\substack{x^{\alpha/4}<p\leqslant |K(x)| \\ k/\pi_y}} f(k)\, I_k(x,\, y) \right| \leqslant \sum_{\substack{x^{\alpha/4}<p\leqslant |K(x)| \\ k/\pi_y}} I_k(x,\, y) =$$

$$= \sum_{\substack{a_n\leqslant x \\ |K(a_n)|_y > x^{\alpha/4}}} 1 \leqslant N(x)\, e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}} .$$

Отсюда

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} f\left(|K(a_n)|_y\right) = \prod_{p\leqslant y} \left(1 + \frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\, \omega^*(p)\right) +$$

$$+ O\left(e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right) + O\left(\frac{1}{\ln^{A_1} x}\right),$$

A_1 — сколь угодно большая константа.

Далее,

$$\left| \frac{1}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} \exp it \left(\psi\left(|K(a_n)|\right) - \sum_{p\leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} \exp it \left(\psi\left(|K(a_n)|_y\right) - \sum_{p\leqslant y} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} \left| \exp it \left(\psi\left(\frac{|K(a_n)|}{|K(a_n)|_y}\right) - \sum_{y<p\leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\right) - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|t|}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} \left| \psi\left(\frac{|K(a_n)|}{|K(a_n)|_y}\right) - \sum_{y<p\leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |t| \left\{ \frac{1}{N(x)} \sum_{a_n\leqslant x} \left| \psi\left(\frac{|K(a_n)|}{|K(a_n)|_y}\right) - \sum_{y<p\leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} \right|^2 \right\}^{1/2} \ll$$

$$\ll |t| \left\{ \left(\sum_{y<p\leqslant x} \frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p} \right)^{1/2} + \max_{p>x^{\alpha/2}} |\psi(p)|\,\omega(p) \right\}.$$

Так как

$$\ln \prod_{p>y} \left(1 + \frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\, \omega^*(p)\right) e^{-it\frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}} =$$

$$= \sum_{p>y} \left\{ \frac{e^{it\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\, \omega^*(p) - it\, \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right\} \ll$$

$$\ll t^2 \sum_{p>y} \frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p} + \frac{1}{y \ln y},$$

то отсюда

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{a_n \leqslant x} \exp it \left(\psi\left(|K(a_n)|\right) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}\right) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right) \cdot e^{-it\frac{\psi^2(p)\,\omega^*(p)}{p}} + O\left(e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right) +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\ln^{A_1} x}\right) + O\left(\frac{1}{y \ln y}\right) + O\left(|t| \left(\sum_{p>y} \frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p}\right)^{1/2}\right) +$$

$$+ O\left(|t| \cdot \max_{p > x^{\alpha/2}} |\psi(p)|\,\omega(p)\right),$$

что и доказывает лемму.

Для перехода к оценкам функций распределения мы используем следующее обобщение неравенства Эссеена (см. [7]).

Лемма 5. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения, $f(t)$ и $g(t)$ — их характеристические функции,*

$$Q_G(h) = \sup_x \left(G(x+h) - G(x)\right).$$

Тогда при $T>0$

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \ll Q_G\left(\frac{1}{T}\right) + \int_0^T \left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right| dt.$$

Лемма 6.

$$Q_G\left(\frac{1}{T}\right) \ll \frac{1}{T} \int_0^T |g(t)|\,dt.$$

Доказательство этого неравенства имеется в работе Эссеена [8].

Из леммы 4 вытекает, что последовательность функций распределения

$$\frac{1}{N(x)} \cdot N\left(a_n \leqslant x,\ \psi\left(|K(a_n)|\right) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} \leqslant W\right)$$

при $x \to \infty$ сходится к предельному распределению с характеристической функцией $\chi(t)$. Оценка функции концентрации предельного распределения дается следующей леммой.

Лемма 7. *Пусть*

$$F(W) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{N(x)} \cdot N\left(a_n \leqslant x,\ \psi\left(|K(a_n)|\right) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} \leqslant W\right),$$

тогда

$$Q_F\left(\frac{1}{T}\right) \ll \left(\frac{\ln \ln T}{\ln T \cdot \ln \ln \ln T}\right)^s,$$

где s — число неприводимых множителей $K(u)$.

Доказательство. Имеем

$$\chi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itW}dF(W)=\prod_p\left(1+\frac{e^{it\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\cdot\omega^*(p)\right)\cdot e^{-it\frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p}},$$

$$Q_F\left(\frac{1}{T}\right)\ll\frac{1}{T}\int\limits_0^T|\chi(t)|\,dt\ll\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T|\chi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Поскольку $K(0)\neq 0$, равенство $\omega^*(p)=\omega(p)$ имеет место для всех p, за исключением конечного числа. Поэтому

$$|\chi(t)|=\prod_p\left|1+\frac{e^{it\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right|\ll\prod_{p_0<p\leqslant M}\left|1+\frac{e^{it\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right|=$$

$$=\prod_{p_0<p\leqslant M}\left|1+\frac{e^{it\psi(p)}\,\omega(p)}{\varphi^*(p)-\omega(p)}\right|\cdot\left|1-\frac{\omega(p)}{\varphi^*(p)}\right|\ll$$

$$\ll\prod_{p_0<p\leqslant M}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\cdot\prod_{p_0<p\leqslant M}\left|1+\frac{e^{it\psi(p)}\,\omega(p)}{p}\right|.$$

Если s – число различных неприводимых множителей полинома $K(u)$, то, как известно [9],

$$\prod_{p_0\leqslant p\leqslant M}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\ll\frac{1}{(\ln M)^s}\,.$$

Поэтому

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T|\chi(t)|^2\,dt\ll\frac{1}{T\ln^{2s}M}\int\limits_0^T\prod_{p_0<p\leqslant M}\left|1+\frac{e^{it\psi(p)}\,\omega(p)}{p}\right|dt\ll$$

$$\ll\frac{1}{T\ln^{2s}M}\int\limits_0^T\sum_{n,\,m/\pi_M}\frac{e^{it(\psi(n)-\psi(m))}\,\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\,dt\ll$$

$$\ll\frac{1}{T\ln^{2s}M}\sum_{n,\,m/\pi_M}\frac{\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\cdot\min\left(T,\ \frac{1}{|\psi(n)-\psi(m)|}\right)=$$

$$=\frac{1}{\ln^{2s}M}\cdot\left\{\sum_{n/\pi_M}\frac{\omega^2(n)}{n^2}+\sum_{\substack{n,\,m/\pi_M\\ n\neq m}}\frac{\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\cdot\min\left(1,\ \frac{1}{T|\psi(n)-\psi(m)|}\right)\right\}\ll$$

$$\ll\frac{1}{\ln^{2s}M}\cdot\left\{1+\sum_{n,\,m/\pi_M}\frac{\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\cdot\min\left(1,\ \frac{(nm)^a}{T}\right)\right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать $a>1$.

Тогда

$$\sum_{n,m/\pi_M}\frac{\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\cdot\min\left(1,\ \frac{(nm)^a}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{\substack{n,\,m/\pi_M\\ nm\leqslant T^{1/a}}}(nm)^{a-1}\cdot\omega(n)\,\omega(m)+$$

$$+\sum_{\substack{n,\,m/\pi_M\\ nm>T^{1/a}}}\frac{\omega(n)\,\omega(m)}{nm}\leqslant\frac{1}{T^{1/a}}\sum_{\substack{k/\pi_M\\ k\leqslant T^{1/a}}}\omega_1(k)+\sum_{\substack{k/\pi_M\\ k>T^{1/a}}}\frac{\omega_1(k)}{k}\,,$$

где $\omega_1(k)=\sum\limits_{nm=k}\omega(n)\omega(m)$. Отсюда

$$\sum_{n,\,m|\pi_M}\frac{\omega(n)\omega(m)}{nm}\cdot\min\left(1,\ \frac{(nm)^a}{T}\right)\ll$$

$$\ll\prod_{p\leqslant M}\left(1+\frac{\omega_1(p)}{p}\right)\exp\left\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}\cdot\ln\frac{\ln T}{\ln M}\right\}=$$

$$\prod_{p\leqslant M}\left(1+\frac{\omega(p)}{p}\right)^2\cdot\exp\left\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}\cdot\ln\frac{\ln T}{\ln M}\right\}\ll$$

$$\ll\ln^{2s}M\exp\left\{-\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}\cdot\ln\frac{\ln T}{\ln M}\right\},$$

если $\ln T^{1/a}\leqslant M\leqslant T^{1/a}$, и

$$Q_F\left(\frac{1}{T}\right)\ll\frac{1}{\ln^s M}+\exp\left\{-\frac{1}{2a}\cdot\frac{\ln T}{\ln M}\cdot\ln\frac{\ln T}{\ln M}\right\}.$$

Выбирая

$$M=\exp\left\{\frac{\ln T\cdot\ln\ln\ln T}{4as\ln\ln T}\right\},$$

получаем нужную оценку.

Доказательство теоремы 1. По лемме 5

$$\Delta(x)\sup_W\left|\frac{1}{N(x)}\cdot N\left(a_n\leqslant x,\ \psi\left(|K(a_n)|\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\omega^*(p)}{p}\leqslant W\right)-F(W)\right|\ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right)+$$

$$+\int_0^T\left|\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\exp it\left(\psi\left(|K(a_n)|\right)-\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\omega^*(p)}{p}\right)-\chi(t)\right|\frac{dt}{t}=$$

$$=Q_F\left(\frac{1}{T}\right)+\dot I(T).$$

По лемме 4

$$I(T)\ll\int_0^\eta+\ln\frac{T}{\eta}\cdot\left\{e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}+\frac{1}{\ln^{A_1}x}+\frac{1}{y\ln y}\right\}+$$

$$+T\left\{\left(\sum_{p>y}\frac{\psi^2(p)\omega(p)}{p}\right)^{1/2}+\max_{p>x^{\alpha/2}}|\psi(p)|\,\omega(p)\right\};$$

$$\int_0^\eta\leqslant\int_0^\eta\left|\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\left(\exp it\left(\psi\left(|K(a_n)|\right)-\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\omega^*(p)}{p}\right)\right)-1\right|\frac{dt}{t}+$$

$$+\int_0^\eta|\chi(t)-1|\frac{dt}{t}\ll\frac{\eta}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\left|\psi\left(|K(a_n)|\right)-\sum_{p\leqslant x}\frac{\psi(p)\omega^*(p)}{p}\right|\ll$$

$$\leqslant \eta \left(\frac{1}{N(x)} \sum_{a_n \leqslant x} \left| \psi \left(|K(a_n)| \right) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\psi(p)\,\omega^*(p)}{p} \right|^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \eta \left\{ \left(\sum_{p \leqslant x} \frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p} \right)^{1/2} + \max_{x^{\alpha/2} < p \leqslant |K(x)|} |\psi(p)|\,\omega(p) \right\} \ll \eta.$$

Полагая $\eta = \frac{1}{T}$, найдём:

$$\Delta(x) \ll \left(\frac{\ln\ln T}{\ln T \cdot \ln\ln\ln T} \right)^s + \ln T \cdot \left\{ e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}} + \frac{1}{\ln^{A_1} x} + \frac{1}{y \ln y} \right\} +$$

$$+ T \cdot \left\{ \left(\sum_{p > y} \frac{\psi^2(p)\,\omega(p)}{p} \right)^{1/2} + \max_{p > x^{\alpha/2}} |\psi(p)| \cdot \omega(p) \right\}.$$

Доказательство завершается выбором $y = \exp \frac{c \ln x}{A_1 \ln\ln x}$, $T = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}$, если учесть, что $|\psi(p)| > p^{-a}$, так что $\rho(x) > \exp \left\{ -\frac{2ac \ln x}{A_1 \ln\ln x} \right\}$ для некоторого $a > 1$.

Следствие. Пусть $\varphi(m) = m \prod_{p/m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ – функция Эйлера. Если a_n и $K(u)$ – те же, что в предыдущей теореме, то

$$\frac{1}{N(x)} \sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ \varphi(|K(a_n)|) < |K(a_n)| W}} 1 = \Phi(W) + O\left(\frac{(\ln\ln x)^{2s}}{(\ln x \cdot \ln\ln\ln x)^s} \right) \qquad (*)$$

равномерно по W. Например,

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \varphi(8p^3-1) < (8p^3-1) W}} 1 = \Phi(W) + O\left(\frac{(\ln\ln x)^4}{(\ln x \cdot \ln\ln\ln x)^2} \right).$$

Оценка остаточного члена в (*) не может быть существенно улучшена. Имеет место

Теорема 2. *Если a_n и $K(u)$ – те же, что в теореме 1, причем $\omega^*(p) < < \varphi^*(p)$ для всех p, то*

$$\sup_W \left| \frac{1}{N(x)} \sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ \varphi(|K(a_n)|) < |K(a_n)| W}} 1 - \Phi(W) \right| = \Omega\left(\frac{1}{(\ln x)^s} \right).$$

Сначала докажем лемму.

Лемма 8. *При $y \to \infty$*

$$\int_0^1 W^y d\Phi(W) = \frac{e^{-cs}}{(\ln y)^s} \prod_p \left(1 - \frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-s} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right),$$

где c – постоянная Эйлера.

Доказательство. Очевидно,

$$\int_0^1 W^y d\Phi(W) = \int_{-\infty}^0 e^{Wy} d\Phi(e^W) = \prod_p \left(1 + \frac{e^{y\psi(p)} - 1}{\varphi^*(p)}\,\omega^*(p)\right),$$

где $\psi(p)=\ln\frac{\varphi(p)}{p}=\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Пусть при $p>p_0$ $\omega^*(p)<\varphi^*(p)$. Тогда

$$\ln\prod_{p>p_0}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\omega^*(p)\right)=\ln\prod_{p_0<p\leqslant y}+\ln\prod_{p>y};$$

$$\ln\prod_{p>y}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\omega^*(p)\right)=\sum_{p>y}\ln\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\omega^*(p)\right)=$$

$$=\sum_{p>y}\left\{\frac{e^{y\psi(p)}-1}{p}\omega^*(p)+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right\}\ll\sum_{p>y}\frac{1-\left(1-\frac{1}{p}\right)^y}{p}+$$

$$+\frac{1}{y\ln y}\ll y\sum_{p>y}\frac{1}{p^2}\ll\frac{1}{\ln y};$$

$$\ln\prod_{p_0<p\leqslant y}=\ln\prod_{p_0<p\leqslant y}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)+\ln\prod_{p_0<p\leqslant y}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}\omega^*(p)}{\varphi^*(p)-\omega^*(p)}\right);$$

$$\ln\prod_{p_0<p\leqslant y}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}\omega^*(p)}{\varphi^*(p)-\omega^*(p)}\right)\ll\sum_{p_0<p\leqslant y}\frac{e^{y\psi(p)}}{p}=\sum_{p_0<p\leqslant y}\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^y\leqslant$$

$$\leqslant\pi(y)\cdot\frac{1}{y+1}\cdot\left(1-\frac{1}{y+1}\right)\ll\frac{1}{\ln y};$$

так как

$$\max_{x>1}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^y=\frac{1}{y+1}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^y.$$

Отсюда

$$\int_0^1 W^y d\Phi(W)=\prod_{p\leqslant p_0}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\omega^*(p)\right)\prod_{p_0<p\leqslant y}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right).$$

Но так как $\psi(p)<0$, то при $p<p_0$, $y\to+\infty$

$$\prod_{p\leqslant p_0}\left(1+\frac{e^{y\psi(p)}-1}{\varphi^*(p)}\omega^*(p)\right)=\prod_{p\leqslant p_0}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\left(1+O(e^{-cy})\right),$$

так что

$$\int_0^1 W^y d\Phi(W)=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right).$$

Наконец,

$$\ln\prod_{p>y}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-s}\ll\sum_{p>y}\frac{\omega^*(p)-s}{p}+\frac{1}{y\ln y}\ll e^{-\sqrt{\ln y}}.$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Положим $H(y)=\int_0^1 W^y d\Phi(W)$, и рассмотрим разность $1-\Phi(W)$, когда $W\to 1-0$.

$$H(y)=\int_0^1 W^y d\Phi(W)=\int_0^W+\int_W^1\leqslant W^y\Phi(W)+1-\Phi(W)\leqslant$$

$$\leqslant W^y+1-\Phi(W);\quad 1-\Phi(W)\geqslant H(y)-W^y.$$

Полагая здесь

$$y=\frac{2s}{1-W}\ln\ln\frac{1}{1-W},$$

найдем:

$$1-\Phi(W)>\frac{c_1}{\left(\ln\frac{1}{1-W}\right)^s}\quad \text{при}\quad W\to 1-0,$$

где $c_1>0$, согласно лемме 8. Далее,

$$1-\frac{1}{N(x)}\sum_{\substack{a_n\leqslant x\\ \varphi(|K(a_n)|)<|K(a_n)|W}}1=\frac{1}{N(x)}\sum_{\substack{a_n\leqslant x\\ \varphi(|K(a_n)|)\geqslant|K(a_n)|W}}1=0,$$

если

$$W>1-\frac{1}{|K(x)|},$$

так как

$$\frac{\varphi(m)}{m}\leqslant 1-\frac{1}{m}.$$

Таким образом, при $1-\frac{1}{|K(x)|}<W<1-\frac{1}{2|K(x)|}$

$$\frac{1}{N(x)}\sum_{\substack{a_n\leqslant x\\ \varphi(|K(a_n)|)<|K(a_n)|W}}1-\Phi(W)>\frac{c_1}{\left(\ln\frac{1}{1-W}\right)^s}>\frac{c_2}{(\ln x)^s},$$

что и доказывает теорему.

Пример.

$$\sup_W\left|\frac{1}{N(x)}\sum_{\substack{a_n\leqslant x\\ \varphi(8p^3-1)<(8p^3-1)W}}1-\Phi(W)\right|=\Omega\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)$$

$\Big(\varphi^*(p)=\varphi(p);\quad \omega^*(2)=0<\varphi^*(2)=1;\quad \omega^*(3)=1<\varphi^*(3)=2;$

при $p>3$

$$\omega^*(p)\leqslant\omega(p)\leqslant 3<p-1=\varphi(p)=\varphi^*(p)\Big).$$

Замечание. Теорема 1 была доказана в предположении $K(0)\neq 0$, которое использовалось только при оценке функции концентрации (при $p\nmid K(0)$, $\omega^*(p)=\omega(p)$, и

$$\prod_{p_0<p\leqslant M}\left(1-\frac{\omega^*(p)}{\varphi^*(p)}\right)\leqslant\prod_{p_0<p\leqslant M}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)\leqslant\frac{1}{(\ln M)^s}.$$

Это предположение, очевидно, можно заменить другими; например, если $K(0)=0$, то достаточно потребовать сходимости ряда

$$\sum_{p,\ d(p)=p}\frac{1}{p};$$

если же $K(0)=0$ и $d(p)=p$ для всех p (как в случае, когда a_n — простые числа), то $\omega^*(p)=\omega(p)-1$ и в остатке теоремы 1 нужно заменить s на $s-1$; с теми же поправками справедлива и теорема 2.

Примеры. ($s=3$)

1)

$$\frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \varphi(8p^4-p)<(8p^4-p)W}} 1 = \Phi(W) + O\left(\frac{(\ln\ln x)^4}{(\ln x \ln\ln\ln x)^2}\right);$$

$$\sup_W \left| \frac{1}{\pi(x)} \sum_{\substack{p \leqslant x \\ \varphi(8p^4-p)<(8p^4-p)W}} 1 - \Phi(W) \right| = \Omega\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

2)

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \varphi(8n^4-n)<(8n^4-n)W}} 1 = \Phi(W) + O\left(\frac{(\ln\ln x)^6}{(\ln x \cdot \ln\ln\ln x)^3}\right);$$

$$\sup_W \left| \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \varphi(8n^4-n)<(8n^4-n)W}} 1 - \Phi(W) \right| = \Omega\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right).$$

(Функции $\Phi(W)$ в первом и втором примерах, конечно, различны.)

Приведенные примеры показывают, что равномерная оценка остаточного члена в предельной теореме для функции Эйлера на множестве значений полинома от a_n близка к окончательной. Однако, как показывает следующая теорема, для „большинства" точек W в интервале $[0, 1]$ остаточный член оценивается значительно лучше.

Теорема 3. *Пусть последовательность удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Пусть, далее,*

$$\Phi_x(W) = \frac{1}{N(x)} \sum_{\substack{a_n \leqslant x \\ \varphi(|K(a_n)|)<|K(a_n)|W}} 1, \quad \Phi(W) = \lim_{x\to\infty} \Phi_x(W)$$

(существование предельного распределения обеспечивается теоремой 1). Тогда

$$\int_0^1 \left(\Phi_x(W) - \Phi(W)\right)^2 dW \ll \frac{1}{\ln^B x},$$

где B — сколь угодно большая константа.

Доказательство. Положим

$$\chi_x(t) = \frac{1}{N(x)} \sum_{a_n \leqslant x} \left(\frac{\varphi(|K(a_n)|)}{|K(a_n)|}\right)^{it}, \quad \chi(t) = \lim_{x\to\infty} \chi_x(t).$$

По лемме 4

$$\chi_x(t) = \chi(t) + O\left(\frac{1}{y\ln y}\right) + O\left(\frac{1}{\ln^B x}\right) + O\left(e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right) +$$

$$+ O\left(|t| \cdot \left(\sum_{p>y} \frac{1}{p^3}\right)^{1/2}\right) + O(|t| \cdot x^{-\alpha/2}) + O\left(|t| \sum_{p>x} \frac{1}{p^3}\right) =$$

$$= \chi(t) + O\left(\frac{1}{y\ln y}\right) + O\left(\frac{1}{\ln^B x}\right) + O\left(e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right) + O\left(\frac{|t|}{y^c}\right).$$

Так как

$$\chi_x(t)-\chi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itW} d\left(\Phi_x(e^W)-\Phi(e^W)\right),$$

$$\frac{\chi_x(t)-\chi(t)}{-it}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Phi_x(e^W)-\Phi(e^W)\right) e^{itW}\sim dW,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Phi_x(e^W)-\Phi(e^W)\right)^2 dW=\int_{-\infty}^{0}\left(\Phi_x(e^W)-\Phi(e^W)\right)^2 dW=$$

$$=\int_0^1\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)^2\frac{dW}{W}\ll\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\chi_x(t)-\chi(t)}{t}\right|^2 dt\ll\int_0^\eta+\int_\eta^T+\frac{1}{T},$$

$$\int_0^\eta\left|\frac{\chi_x(t)-1}{t}\right|^2 dt\ll\eta\left(\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\ln\frac{|K(a_n)|}{\varphi(|K(a_n)|)}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\eta\cdot\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\left(\ln\frac{|K(a_n)|}{\varphi(|K(a_n)|)}\right)^2\leqslant\frac{2\eta}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}\left(\ln\frac{|K(a_n)|}{\varphi(|K(a_n)|)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{p\leqslant x}\frac{\omega^*(p)}{p}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right)^2+2\eta\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{\omega^*(p)}{p}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right)^2\ll$$

$$\ll\eta\left\{\sum_{p\leqslant x}\frac{\omega(p)}{p}\ln^2\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}+\max_{p>x^{\alpha/2}}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right\}\ll\eta.$$

Так как оценки равномерны по x, то

$$\int_0^\eta\left|\frac{\chi(t)-1}{t}\right|^2 dt\ll\eta$$

и

$$\int_0^\eta\left|\frac{\chi_x(t)-\chi(t)}{t}\right|^2 dt\leqslant 2\int_0^\eta\left|\frac{\chi_x(t)-1}{t}\right|^2 dt+2\int_0^\eta\left|\frac{\chi(t)-1}{t}\right|^2 dt\ll\eta.$$

Далее,

$$\int_\eta^T\left|\frac{\chi_x(t)-\chi(t)}{t}\right|^2 dt\ll\frac{1}{\eta}\cdot\left\{\frac{1}{y^2\ln^2 y}+\frac{1}{\ln^{2B}x}+e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right\}+\frac{T}{y^{2c}}.$$

Полагая $\eta=\frac{1}{T}$, найдем:

$$\int_0^1\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)^2 dW\leqslant\int_0^1\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)^2\frac{dW}{W}\ll$$

$$\ll T\left\{\frac{1}{y^c}+\frac{1}{\ln^B x}+e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right\}^2+\frac{1}{T}.$$

Если

$$T=\left\{\frac{1}{y^c}+\frac{1}{\ln^B x}+e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}\right\}^{-1},$$

то

$$\int_0^1\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)^2 dW\ll\frac{1}{y^c}+\frac{1}{\ln^B x}+e^{-c\frac{\ln x}{\ln y}}.$$

Взяв $y=e^{\sqrt{\ln x}}$, завершаем доказательство.

Пример. Если a_n — простые числа, то

$$\int_0^1\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)^2 dW\ll\frac{1}{\ln^A x},$$

где A — сколь угодно большая константа.

Отсюда по обычной схеме неравенства Чебышева получаем

Следствие.

$$\operatorname{mes} E\left(0\leqslant W\leqslant 1,\ |\Phi_x(W)-\Phi(W)|>\frac{1}{\ln^B x}\right)=o(1),$$

если $a_n=p_n$, с любым фиксированным B.

Таким образом, хотя оценка теоремы 1 в случае $\psi(n)=\ln\frac{\varphi(n)}{n}$ „глобально“ почти неулучшаема, однако для большинства значений $W\in[0,1]$ $\Phi_x(W)$ сходится к $\Phi(W)$ значительно быстрее.

Из теоремы 3 следует также

Теорема 4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица на* $[0, 1]$. *Тогда*

$$\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}F\left(\frac{\varphi(|K(a_n)|)}{|K(a_n)|}\right)=c_F+O\left(\frac{1}{\ln^B x}\right).$$

Доказательство. Имеем:

$$\left|\frac{1}{N(x)}\sum_{a_n\leqslant x}F\left(\frac{\varphi(|K(a_n)|)}{|K(a_n)|}\right)-C_F\right|=\left|\int_0^1 F(W)\,d\left(\Phi_x(W)-\Phi(W)\right)\right|=$$

$$=\left|\int_0^1\left(\Phi(W)-\Phi_x(W)\right)dF(W)\right|\leqslant\int_0^1|\Phi(W)-\Phi_x(W)|\cdot|dF(W)|\ll$$

$$\ll\int_0^1|\Phi(W)-\Phi_x(W)|\,dW\leqslant\left(\int_0^1|\Phi(W)-\Phi_x(W)|^2dW\right)^{1/2}\ll\frac{1}{\ln^B x}.$$

Ташкентский Государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в редакцию
5.I.1970

Литература

1. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. H. Halberstam, On the distribution of additive number theoretic functions (III), I, London Math. Soc., 31, (1956), 14–27.
3. М. Б. Барбан, Арифметические функции на „редких" множествах, Труды Института математики АН Уз ССР, 22, (1961), 21–35.
4. М. Б. Барбан, Метод „большого решета" и его применения в теории чисел, Успехи матем. наук, 21 (127), (1966), 51–102.
5. Р. В. Уждавинис, О распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов, Труды АН Лит. ССР, сер. Б, 2 (18), (1959), 9–29.
6. Р. В. Уждавинис, Аналог теоремы Эрдеша-Винтнера для последовательности значений целочисленного полинома, Лит. матем. сб., VII (2) (1967), 329–338.
7. А. С. Файнлейб, Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел, Изв. АН СССР, 32 (4), (1968), 859–879.
8. K. G. Esseen, On the Kolmogorov – Rogozin inequality for the concentration function, Zeit. Wahrs. und verwandte Gebiete, 5 (3), (1966), 210–216.
9. Б. В. Левин, Оценки специальных сумм и произведений, связанных с методом решета, Труды ТашГУ, 228, (1963), 69–79.
10. Ж. Толеуов, А. С. Файнлейб, О распределении значений арифметических функций на некоторых подмножествах натурального ряда, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 5(1969), 23–27,

RIBINĖS TEOREMOS ADITYVINĖMS FUNKCIJOMS POLINOMO REIKŠMIŲ AIBĖJE PATIKSLINIMAS

Ž. Toleuovas, A. Fainleibas

(*Reziumė*)

Pateikiamas integralinės teoremos liekamojo nario tolygus įvertinimas adityvinių funkcijų vienai klasei, kai argumentas prabėga reikšmes polinomo, definuoto skaičių sekoje, kuri tam tikra prasme tolygiai pasiskirsčiusi „beveik visų" modulių liekanų klasėse.

Iš gauto rezultato matyti, kad jei $\varphi(m)$ – Oilerio funkcija, $K(u)$ – polinomas su sveikais koeficientais, $K(p)\neq 0$ (p – pirminis skaičius), $K(0)\neq 0$, s – skirtingų neskaidžiųjų $K(u)$ daugiklių skaičius, tai

$$\frac{1}{\pi(x)} N\left(p\leq x,\ \varphi\left(|K(p)|\right)<W|K(p)|\right)=\Phi_K(W)+O\left(\frac{(\ln\ln x)^{2s}}{(\ln x\cdot\ln\ln\ln x)^s}\right)$$

tolygiai pagal W, ir

$$\sup_W\left|\frac{1}{\pi(x)} N\left(p\leq x,\ \varphi\left(|K(p)|\right)<W|K(p)|\right)-\Phi_K(W)\right|=\Omega\left(\frac{1}{(\ln x)^s}\right),$$

kur $\Phi_K(W)$ – pasiskirstymo funkcija.

THE MAKING PRECISE OF A LIMITING THEOREM FOR ADDITIVE FUNCTIONS, DEFINED ON THE SET OF VALUES OF POLYMOMIAL FROM CERTAIN SEQUENCES

G. Toleuov, A. Fainleib

(*Summary*)

A uniform estimation of remainder term in the integral theorem is proved for a class of additive functions, when the argument takes all values from polymonial in the numbers of sequence, uniformly distributed in the rest classes for „almost all" modules. From the obtained results follow, for example, what if $\varphi(n)$ is Euler's function, $K(u)$ is a polynomial with whole coefficients,

$K(p) \neq 0$ (p denote prime numbers), $K(0) \neq 0$, s denote number of different irreducible factors of $K(u)$, then

$$\frac{1}{\pi(x)} N\left(p \leqslant x,\ \varphi(|K(p)|) < W|K(p)|\right) = \Phi_K(W) + O\left(\frac{(\ln\ln x)^{2s}}{(\ln x \cdot \ln\ln\ln x)^s}\right)$$

uniformly from W and

$$\sup_W \left| \frac{1}{\pi(x)} N\left(p \leqslant x,\ \varphi(|K(p)|) < W|K(p)|\right) - \Phi_K(W) \right| = \Omega\left(\frac{1}{(\ln x)^s}\right),$$

where $\Phi_K(W)$ is distribution function.