XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1971

УДК 519.21

ОДНА ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПСЕВДОМОМЕНТОВ

В. Паулаускас

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ – две последовательности независимых случайных величин. Пусть $\bar{F}_n(x)$ – функция распределения (ф.р.) $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, а $\bar{H}_n(x)$ – ф.р. суммы $\sum_{i=1}^{n} \eta_i$. Очень естественен подход к оценке близости $\bar{F}_n(x)$ к $\bar{H}_n(x)$ через близость между ф.р. соответствующих слагаемых ξ_i и η_i, $i=1, 2, \ldots, n$, который разработал В. М. Золотарев в работах [6], [7]. Мерой близости между слагаемыми служат так называемые псевдомоменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k d(F_i - H_i)(x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k |d(F_i - H_i)(x)|,$$

где $F_i(x)$ – ф.р. случайной величины ξ_i, а $H_i(x)$ – ф.р. η_i. В. М. Золотарев в вышеупомянутых работах использует метод характеристических функций, что позволяет оценить разность $|\bar{F}_n(x) - \bar{H}_n(x)|$ при самых общих условиях.

Другой метод, который тоже довольно естественно приводит к оценкам с псевдомоментами – это метод композиций, разработанный Г. Бергстремом в [1], [2] и продолженный в работе В. В. Сазонова [4]. Но в этих работах оценки разности двух ф.р. выражены через абсолютные моменты. В работах автора [8], [9], [10] методом композиций получены оценки с псевдомоментами и имеющие правильный порядок по отношению к числу слагаемых. К сожалению, в настоящее время метод композиций еще не удается применить в такой общей схеме, как в [7].*

Здесь мы будем рассматривать случай, когда $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с ф.р. $F(x)$, $M\xi_i = 0$ и $M\xi_i^2 = 1$. Пусть, как всегда,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d(F - \Phi)(x),$$

$$\nu_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r |d(F - \Phi)(x)|.$$

* Недавно автору удалось повторить результат из [7] методом композиций. Более того, получены обобщения этих результатов на многомерный случай и случай некоторых зависимых величин.

Через $F_n(x)$ обозначим ф.р. суммы

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

В работе [9] доказано следующее утверждение: если $\mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = 0$ и $\nu_m < \infty$ для некоторого целого $m \geqslant 3$, то для всех $n \geqslant 1$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C(m) \frac{\max\{\nu_m^{\frac{1}{m+1}}, \nu_m\}}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где $C(m)$ — константа, зависящая только от m. Естественно возникает вопрос — как будет выглядеть (1) при условии, что $\mu_1 = \ldots = \mu_{m-1} = 0$ и $\nu_r < \infty$ при некотором $m \geqslant 3$ и любом $m-1 < r \leqslant m$? Обычный метод усечения, который всегда приводит к желаемому результату в случае абсолютных моментов (см., например, [3], [5]), здесь не подходит, так как в основное неравенство этого метода входит член $nP\{|\xi_1| > \sqrt{n}\}$, который легко оценивается через абсолютные моменты, но не видно, как этот член оценить через псевдомомент. Здесь мы изложим метод, позволяющий получить оценки подобного рода с псевдомоментами.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Если* $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ *и* $\nu_{m+\delta} < \infty$ *для некоторого целого* $m \geqslant 2$ *и* $0 < \delta \leqslant 1$, *то*: 1) *для всех* $n \geqslant 1$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C(m, \delta) \frac{\max\{\nu_{m+\delta}^{\frac{1}{m+1+\delta}}, \nu_{m+\delta}\}}{n^{\alpha(m,\delta)}}, \tag{2}$$

где $C(m, \delta)$ *зависит только от* m *и* δ, *а*

$$\alpha(m, \delta) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} & \text{при} \quad m = 2, \\ \frac{1}{2} & \text{при} \quad m \geqslant 3; \end{cases}$$

2) *показатель степени при* $\nu_{m+\delta}$ *является оптимальным.*

Неравенство (2) является прямым обобщением (1). Второе утверждение теоремы дает ответ на проблему об оптимальном показателе степени при ν_3 (т.е. в случае $m=2$, $\delta=1$), которая ставилась в работе [9]. Оно указывает, что для увеличения показателя степени при малых $\nu_{m+\delta}$ необходимо либо накладывать какие-либо дополнительные требования к ф.р. $F(x)$, либо рассматривать оценки, которые справедливы для $n \geqslant n_0$. Оба эти пути были применены в доказательстве теоремы 3 из [7]. При доказательстве (2) мы тоже получаем одно утверждение такого типа, а именно: для всех $n \geqslant 2$ показатель степени $\frac{1}{m+1+\delta}$ в (2) можно заменить на величину $\frac{m+2+\delta}{(m+1+\delta)^2}$.

Так как перенесение полученного результата на многомерный случай не имеет принципиальных трудностей, то приведем без доказательства многомерный аналог теоремы.

Пусть $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с распределением P, нулевыми математическими ожиданиями и невырожденной матрицей ковариаций. Пусть Q — k-мерное нормальное распределение, имеющее такие же моменты двух первых порядков, как и распределение P. Через $\mathscr{E}$ обозначим класс всех универсально измеримых выпуклых множеств в R^k, через P_n — распределение суммы

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Как и в работе [4], введем матрицу A следующим образом. Пусть $t=\{t_i=(t_{i1}, \ldots, t_{ik}),\ i=1,2, \ldots k\}$ — семейство элементов из R^k таких, что случайные величины $(t_i,\ \xi_1)$, $i=1,2, \ldots, k$ являются некоррелированными, а

$$A=\left\| \frac{t_{ij}}{M^{\frac{1}{2}}(t_i,\ \xi_1)^2} \right\|.$$

Пусть $\bar{P}(E)$ обозначает распределение вектора $\eta_i=A\xi_i$, а $\Phi(E)$ — k-мерное нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями и единичной матрицей вторых моментов. Введем обозначения для псевдомоментов:

$$\mu^{(m)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}=\int\limits_{R^k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k}\,(\bar{P}-\Phi)(dx),$$

$$x=(x_1, \ldots, x_k)\in R^k;\ i_1+i_2+\ldots+i_k=m;\ m\geqslant i_j\geqslant 0.$$

$$\mu^{(m)}=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=m} |\mu^{(m)}_{i_1, i_2, \ldots i_k}|,$$

$$N_{m+\delta}=\int\limits_{R^k}\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|\right)^{m+\delta} |(\bar{P}-\Phi)(dx)|,$$

m — целое число, $0<\delta\leqslant 1$.

Теорема 1а. *Пусть* $\mu^{(1)}=\ \ldots\ =\mu^{(m)}=0$ *и* $N_{m+\delta}<\infty$ *для некоторого целого* $m\geqslant 2$. *Тогда для всех* $n\geqslant 1$ *имеет место оценка*

$$\sup_{E\in\mathscr{E}} |P_n(E)-Q(E)|\leqslant C(k,\ m,\ \delta)\ \frac{\max\{N_{m+\delta}^{\frac{1}{m+1+\delta}},\ N_{m+\delta}\}}{n^{\alpha(m,\delta)}},$$

где $C(k, m, \delta)\leqslant k^4\cdot C(m, \delta)$.

Доказательство. В доказательстве, кроме введенных обозначений, мы будем пользоваться без особого напоминания обозначениями и формулами из [8] и [9]. $C_1, C_2, \ldots$ всегда будут обозначать абсолютные константы, а $C_1(\ )$, $C_2(\ )\ldots$ — константы, зависящие от параметров, указанных в скобках.

Начнем с основного неравенства и тождества из [8]:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1 \sup_x |[(F_n-\Phi) * \Phi_T](x)|+C_2\frac{1}{T}, \tag{3}$$

$$(F_n-\Phi) * \Phi_T=\left[\sum_{i=1}^{n-1} V_i+nV_0\right] * (\tilde{F}_n-\Phi_n). \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда легко удостовериться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_\sigma^{(m)}(x)|\,dx\leqslant C_2(m)\cdot\sigma^{-m} \tag{5}$$

и

$$C_3=C_2(2)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}},\quad C_2(m)\leqslant\sqrt{m!}\,.$$

Пусть, далее,

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(P-R)(y)\,\varphi_\sigma(x-y)\,dy\,,$$

где P и R – две любые ф.р. Запишем разложение Тейлора для $V(x)$

$$V(x)=V(0)+V'(0)\,x+\ldots+\frac{V^{(m)}(0)}{m!}\,x^m+r_m(x).$$

Лемма. *Для любого* $0<\delta\leqslant 1$ *имеет место оценка*

$$|r_m(x)|\leqslant C_3(m)\sup_y|(P-R)(y)|\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{m+\delta}, \tag{6}$$

где

$$C_3(2)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}}\,,\quad C_3(m)\leqslant\frac{2}{\sqrt{m!}}\,,\quad m\geqslant 3;$$

Для доказательства заметим, что из (5) следует

$$\sup_x|V^{(m)}(x)|\leqslant C_2(m)\,\frac{\sup_y|(P-R)(y)|}{\sigma^m}\,,$$

а отсюда при $\frac{|x|}{\sigma}<1$ вытекает:

$$|r_m(x)|=\left|\frac{V^{(m+1)}(\Theta x)}{(m+1)!}\,x^{m+1}\right|\leqslant\frac{C_2(m+1)\sup_y|(P-R)(y)|}{(m+1)!}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{m+1}\leqslant$$
$$\leqslant C_4(m)\sup_y|(P-R)(y)|\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{m+\delta}. \tag{7}$$

При $\frac{|x|}{\sigma}\geqslant 1$ запишем очевидное неравенство:

$$|r_m(x)|=\left|V(x)-V(0)-V'(0)\,x-\ldots-\frac{V^{(m)}(0)}{m!}\,x^m\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|V(x)-V(0)-V'(0)\,x-\ldots-\frac{V^{(m-1)}(0)}{m-1}\,x^{m-1}\right|+\left|\frac{V^{(m)}(0)}{m!}\,x^m\right|\leqslant$$
$$\leqslant|r_{m-1}(x)|+\left|\frac{V^{(m)}(0)}{m!}\,x^m\right|\leqslant\left|\frac{V^{(m)}(\Theta x)}{m!}\,x^m\right|+\left|\frac{V^{(m)}(0)}{m!}\,x^m\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{m!}\sup_y|V^{(m)}(y)|\,|x|^m\leqslant\frac{2C_2(m)}{m!}\sup_y|(P-R)(y)|\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^m\leqslant$$
$$\leqslant C_5(m)\sup_y|(P-R)(y)|\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{m+\delta}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) вытекает (6) с

$$C_3(m)=\max\left(C_4(m),\ C_5(m)\right).$$

Совсем аналогично доказывается следующее утверждение: если

$$U(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_\sigma(u)\,du=U(0)+U'(0)\,x+\ldots+\frac{U^{(m)}(0)}{m!}\,x^m+r_m^1(x),$$

то

$$|r_m^1(x)|\leqslant C_6(m)\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)^{m+\delta}. \tag{9}$$

Как и в [8], будем пользоваться методом математической индукции, а для этого надо показать справедливость (2) при $n=1$. Для этого в выражении

$$(F-\Phi)*\Phi_T(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_T(x-y)\,d(F-\Phi)(y)$$

функцию $\Phi_T(x-y)$ разложим по степеням y в ряд Тейлора и, применяя оценку (9) и используя условия теоремы, получим:

$$|[(F-\Phi)*\Phi_T](x)|\leqslant C_6(m)\,\nu_{m+\delta}\,T^{m+\delta},$$

а отсюда и из основного неравенства (3) с ф.р. F вместо F_n вытекает, что

$$\sup_x|F(x)-\Phi(x)|\leqslant C(m,\ \delta)\,\nu_{m+\delta}^{\frac{1}{m+1+\delta}}. \tag{10}$$

Теперь покажем, что оценка (2) справедлива, если она имеет место для всех $i\leqslant n-1$.

Разлагая V_i, $i=0,1,\ldots,n-1$ в ряд Тейлора и применяя оценки (6) или (9), а также индукционную предпосылку, получаем:

$$n\sup_x|[V_0*(\tilde{F}_n-\Phi_n)](x)|\leqslant C_6(m)\,\frac{\nu_{m+\delta}}{n^{\frac{m+\delta}{2}-1}}, \tag{11}$$

$$\sup_x|[V_i*(\tilde{F}_n-\Phi_n)](x)|\leqslant C_3(m)\sup_y|(\tilde{F}_n^i-\Phi_n^i)(y)|\times$$

$$\times\frac{\nu_{m+\delta}}{n^{\frac{m+\delta}{2}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{m+\delta}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant C_3(m)\,C(m,\ \delta)\max\left\{\nu_{m+\delta}^{1+\frac{1}{m+1+\delta}},\ \nu_{m+\delta}^2\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{n^{\frac{m+\delta}{2}}\,i^{\alpha(m,\delta)}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{m+\delta}{2}}}. \tag{12}$$

Отсюда видно, что нам надо оценить сумму

$$\sum_{i=1}^{n-1}i^{-\alpha(m,\delta)}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{-\frac{m+\delta}{2}},$$

а так как $\alpha(m, \delta)$ имеет разные выражения при $m=2$ и $m\geqslant 3$, то дальнейшее доказательство проведем отдельно для этих случаев.

$m=2$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[i^{\frac{\delta}{2}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{1+\frac{\delta}{2}}\right]^{-1}=\frac{T^{2+\delta}}{(n-1)^{\frac{\delta}{2}}}+\sum_{i=1}^{n-2}\left[i^{\frac{\delta}{2}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{1+\frac{\delta}{2}}\right]^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{T^{2+\delta}}{(n-1)^{\frac{\delta}{2}}}+f(T, n), \tag{13}$$

где

$$f(T, n)=n^{1-\frac{\delta}{2}}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} g(x, a)\,dx,\quad g(x, a)=[x^{\frac{\delta}{2}}(a^2-x)^{1+\frac{\delta}{2}}]^{-1},$$

$$a^2=\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right).$$

Легко видеть, что функция $g(x, a)$ имеет минимум в точке

$$x_0=\frac{a^2\delta}{2(1+\delta)}.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что x_0 лежит в интервале

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right).$$

Поэтому

$$f(T, n)=n^{1-\frac{\delta}{2}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{x_0}+\int_{x_0}^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{x_0} g(x, a)\,dx\leqslant g\left(\frac{1}{n}, a\right)\left[x_0-\frac{1}{n}\right]=\frac{n^{\frac{\delta}{2}}}{\left(a^2-\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{\delta}{2}}}\left[\frac{a^2\delta}{2(1+\delta)}-\frac{1}{n}\right]=$$

$$=C_7(\delta)\,n^{\frac{\delta}{2}}, \tag{14}$$

где

$$C_7(\delta)=\left[\frac{\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)\delta}{2(1+\delta)}-\frac{1}{n}\right]\left(\frac{n-2}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{-\frac{2+\delta}{2}}\leqslant\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{\delta}{2}}\frac{\delta}{2(1+\delta)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(3)^{\frac{\delta}{2}}\frac{\delta}{1+\delta}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Далее,

$$\int_{x_0}^{\frac{n-1}{n}} g(x, a)\,dx\leqslant\frac{1}{x_0^{\frac{\delta}{2}}}\int_{x_0}^{\frac{n-1}{n}}\frac{dx}{(a^2-x)^{1+\frac{\delta}{2}}}=C_8(\delta)\,T^{\delta}. \tag{15}$$

Теперь, соединяя формулы (3), (4) и (11)—(15), получаем:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_1 C_3(2) C(2,\delta)\max\{\nu_{2+\delta}^{\frac{4+\delta}{3+\delta}}, \nu_{2+\delta}^2\}}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}\left[\frac{T^{2+\delta}}{(n-1)^{\frac{\delta}{2}}}+\right.$$

$$\left.+C_7(\delta)n+C_8(\delta)n^{1-\frac{\delta}{2}}T^{\delta}\right]+C_1C_6(2)\frac{\nu_{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}}}+C_2\frac{1}{T}. \tag{16}$$

Полагая в (16)

$$T=n^{\frac{\delta}{2}}\,[\max\{\nu_{2+\delta}^{\frac{1}{3+\delta}}, \nu_{2+\delta}\}C_9(\delta)]^{-1},$$

имеем:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{\max\{\nu_{2+\delta}^{\frac{1}{3-\delta}}, \nu_{2+\delta}\}}{n^{\frac{\delta}{2}}}\left\{C(2,\delta)\left[\frac{C_1C_3(2)\cdot 2^{\frac{\delta}{2}}}{(C_9(\delta))^{2+\delta}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_1C_3(2)C_7(\delta)+\frac{C_1C_3(2)C_8(\delta)}{(C_9(\delta))^{\delta}}\right]+C_1C_6(2)+C_2C_9(\delta)\right\}.$$

Для завершения доказательства остается удостовериться, что константы $C_9(\delta)$ и $C(2,\delta)$ можно подобрать так, чтобы выражение в фигурных скобках не превышало $C(2,\delta)$, а для этого достаточно заметить, что

$$C_1C_3(2)C_7(\delta)\leqslant C_1\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi e}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=C_1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{6}{\pi e}}<\frac{2}{3},$$

так как C_1 можем выбирать из таблицы, приведенной в [9].

$m\geqslant 3$. В этом случае имеем:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\sqrt{i}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{\frac{m+\delta}{2}}\right]^{-1}=$$

$$=\frac{T^{m+\delta}}{\sqrt{n-1}}+\sum_{i=1}^{n-2}i^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n-i-1}{n}+\frac{1}{T^2}\right)^{-\frac{m+\delta}{2}}\leqslant\frac{T^{m+\delta}}{\sqrt{n-1}}+f_1(T,n),$$

где

$$f_1(T,n)=\sqrt{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}}g_1(x,a)\,dx,\quad g_1(x,a)=\frac{1}{\sqrt{x}\,(a^2-x)^{\frac{m+\delta}{2}}}.$$

Аналогично первому случаю $x_{01}=\dfrac{a^2}{m+1+\delta}$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{x_{01}}g_1(x,a)\,dx\leqslant C_{10}(m,\delta)\sqrt{n},$$

где

$$C_{10}(m,\delta)\leqslant\frac{(\sqrt{3})^{m-2+\delta}}{m+1+\delta},$$

$$\int_{x_{01}}^{\frac{n-1}{n}}g_1(x,a)\,dx\leqslant C_{11}(m,\delta)\,T^{m+\delta-2},$$

так что теперь имеем следующий аналог формулы (16):

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{C_1 C_3(m)\, C(m,\delta) \max\{\nu_{m+\delta}^{\frac{m+2+\delta}{m+1+\delta}},\ \nu_{m+\delta}^2\}}{n^{\frac{m+\delta}{2}}} \times$$

$$\times \left[\frac{T^{m+\delta}}{\sqrt{n-1}} + C_{10}(m,\delta)\, n + C_{11}(m,\delta)\sqrt{n}\, T^{m+\delta-2}\right] +$$

$$+ C_6(m)\frac{\nu_{m+\delta}}{n^{\frac{m+\delta}{2}}} + \frac{C_2}{T}. \tag{17}$$

Доказательство завершается так же, как и в первом случае — положим

$$T=\sqrt{n}\,[\max\{\nu_{m+\delta}^{\frac{1}{m+1+\delta}}, \nu_{m+\delta}\}\, C_{12}(m,\delta)]^{-1}$$

и заметим, что для подбора констант $C(m,\delta)$ и $C_{12}(m,\delta)$ выполняется нужное нам неравенство

$$C_1\cdot C_3(m)\, C_{10}(m,\delta) \leqslant C_1 \frac{2}{\sqrt{m!}}\, \frac{(\sqrt{3})^{m-2+\delta}}{m+1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\sqrt{\frac{3^{m-1}}{m!}}\,\frac{2}{m+2} \leqslant C_1\cdot\frac{\sqrt{6}}{5} < 1.$$

Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем ко второму утверждению. Для доказательства оптимальности показателя $\frac{1}{m+1+\delta}$ рассмотрим следующий пример. Пусть ξ_α $(\alpha>0)$ имеет следующую ф.р.

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x<-\alpha \\ \Phi(-\alpha)+p_1, & -\alpha\leqslant x<0 \\ \Phi(-\alpha)+p_1+p_0, & 0\leqslant x<\alpha \\ \Phi(x), & x\geqslant\alpha \end{cases} \tag{18}$$

где p_1 и p_0 определим следующим способом:

$$2p_1+p_0=\Phi(\alpha)-\Phi(-\alpha-0)=2\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx,$$

$$\alpha^2 p_1=\int_0^\alpha x^2\varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{19}$$

Подобрать так p_0 и p_1 можно всегда, так как

$$p_1=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha x^2\varphi(x)\,dx<\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx;$$

отсюда $p_0>0$. Мы будем рассматривать $\alpha\to 0$ и тогда ясно, что $p_1\sim\alpha$ (знак $\sim$ означает, что при $\alpha\to 0$ $C_4\alpha\leqslant p_1\leqslant C_5\alpha$).

Условие (19.1) дает симметричность случайной величины ξ_α, так что $M\xi_\alpha=M\xi_\alpha^3=0$, а условие (19.2) обеспечивает равенство $M\xi_\alpha^2=1$. Видим, что величина ξ_{α} удовлетворяет условиям теоремы как при $m=2$, так и при $m=3$ и любом $0<\delta\leqslant 1$. Поэтому рассмотрим величины $\sup\limits_x |H_\alpha(x)|$ и

$$\nu_{m+\delta}(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^{m+\delta}\,|dH_\alpha(x)|,\quad m=2,\ 3$$

при $\alpha\to 0$, где $H_\alpha(x)=F_\alpha(x)-\Phi(x)$. Ясно, что

$$\sup_x|H_\alpha(x)|\geqslant|H_\alpha(-\alpha)|=p_1\geqslant C_4\,\alpha,$$

а

$$\nu_{m+\delta}(\alpha)=2\int\limits_0^{\alpha}x^{m+\delta}\,\varphi(x)\,dx+2\alpha^{m+\delta}\cdot p_1\sim\alpha^{m+1+\delta}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sup_x|H_\alpha(x)|\geqslant C_6\,\nu_{m+\delta}^{\frac{1}{m+1+\delta}}(\alpha)$$

при малых α и $m=2$, 3. Для того, чтобы доказать второе утверждение теоремы при $m=4$,надо построить аналогичный пример ф.р. $F_\alpha(x)$, для которой было $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$. Как и раньше, положим, что $F_\alpha(x)$ совпадает с $\Phi(x)$ вне интервала $[-\alpha,\alpha)$, а в точках $x=\pm\alpha$ принимает скачки величиной p_1, в точках $x=\pm\frac{\alpha}{2}$ — скачки величиной p_2, а в нулевой точке — скачок

$$p_0=\int\limits_0^{\alpha}\varphi(x)\,dx-p_1-p_2.$$

Покажем, что при достаточно малых α, например, из интервала $(0,\alpha_0)$, где α_0 определяется из неравенства

$$\varphi(0)-\varphi(\alpha_0)=\varepsilon<\frac{1}{15}\varphi(0),$$

p_0, p_1 и p_2 можно подобрать так, что будут выполнены следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2p_1+\frac{\alpha^2}{4}p_2=\int\limits_0^{\alpha}x^2\,\varphi(x)\,dx\\&\alpha^4p_1+\frac{\alpha^4}{16}p_2=\int\limits_0^{\alpha}x^4\,\varphi(x)\,dx\\&p_0>0\end{aligned}\right\}.\qquad\begin{aligned}&(20)\\ \\&(21)\end{aligned}$$

Действительно, решая систему уравнений (20), находим:

$$p_1=\frac{4}{3\alpha^4}\int\limits_0^{\alpha}x^4\,\varphi(x)\,dx-\frac{1}{3\alpha^2}\int\limits_0^{\alpha}x^2\,\varphi(x)\,dx,$$

$$p_2=\frac{16}{3\alpha^2}\int\limits_0^{\alpha}x^2\,\varphi(x)\,dx-\frac{16}{3\alpha^4}\int\limits_0^{\alpha}x^4\,\varphi(x)\,dx,\tag{22}$$

а для обеспечения (21) достаточно заметить, что в данном интервале $(0, \alpha_0)$

$$p_1+p_2=\frac{5}{\alpha^2}\int_0^\alpha x^2\varphi(x)\,dx-\frac{4}{\alpha^4}\int_0^\alpha x^4\varphi(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5}{\alpha^2}\,\frac{\alpha^3}{3}\varphi(0)-\frac{4\alpha^5}{5\alpha^4}\varphi(\alpha)\leqslant\alpha\left[\frac{5}{3}\varphi(0)-\frac{4}{5}\left(\varphi(0)-\varepsilon\right)\right]=$$

$$=\alpha\left(\frac{13}{15}\varphi(0)+\frac{4}{5}\varepsilon\right)\leqslant\alpha\frac{14}{15}\varphi(0)\leqslant\alpha\varphi(\alpha)<\int_0^\alpha\varphi(x)\,dx\,.$$

Условие (20) обеспечивает $\mu_2=\mu_4=0$, а симметричность ф.р. $F_\alpha(x)$ дает $\mu_1=\mu_3=\mu_5=0$. Из (22) имеем $p_1\sim\alpha$, $p_2\sim\alpha$, так что $\sup\limits_x|H_\alpha(x)|\sim\alpha$, $\nu_{m+\delta}(\alpha)\sim$ $\sim\alpha^{m+1+\delta}$, $m=4, 5$. Отсюда заключаем, что показатель степени $\frac{1}{m+1+\delta}$ — оптимальный и при $m=4, 5$. Аналогично можно строить примеры и для $m\geqslant 6$. Теорема доказана.

Легко заметить, что в доказательстве из (16) и (17) мы получаем, что в условиях теоремы для всех $n\geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C(m,\delta)\,\frac{\max\{\nu_{m+\delta}^{\frac{m+2+\delta}{(m+1+\delta)^2}},\ \nu_{m+\delta}\}}{n^{\alpha(m,\delta)}}\,.$$

По-видимому, показатель степени $\frac{m+2+\delta}{(m+1+\delta)^2}$ не является оптимальным в данном случае, т.е. для всех распределений $F(x)$, имеющих $\mu_1=\ldots=$ $=\mu_m=0$ и $\nu_{m+\delta}<\infty$, и для всех $n\geqslant 2$, но тот самый пример, который рассматривался при $n=1$ (см. (18)), показывает, что при $m=2$ и $m=3$ и для $n=2$ показатель степени не может быть больше $\frac{2}{m+1+\delta}$.

Обозначим через I_m, $m\geqslant 3$ класс всех распределений, для которых $\mu_1=$ $=\ldots=\mu_{m-1}=0$ и $\nu_m<\infty$. Возникает вопрос, существует ли такой номер $n_0(m)$ и, если существует, то какое имеет значение, что для всех распределений из I_m и всех $n\geqslant n_0(m)$ имела место оценка

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_{13}(m)\frac{\nu_m}{\sqrt{n}}\,. \tag{23}$$

В такой постановке вопроса упомянутую в начале работы теорему 3 из работы В. М. Золотарева [7] можно сформулировать следующим образом.

Если через $I_3(a,\gamma)$, $\gamma>0$, $0<a<1{,}5$ обозначить подкласс таких ф.р. из I_3, характеристические функции $f(t)$ которых удовлетворяют неравенство

$$|f(t)|\leqslant\left(\frac{a}{\beta_3 t}\right)^\gamma,\quad \beta_3=M|\xi_1|^3,\quad 0<a<1{,}5,\quad \gamma>0$$

то для $I_3(a,\gamma)$ этот номер $n_0(3,\gamma)=1+\frac{4}{\gamma}$, а константа $C_{13}(3)$ в (23) зависит от a и γ и даже $C_{13}(3)\to\infty$, когда либо $\varphi\to 0$, либо $a\to 1{,}5$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
8.VI.1970

Литература

1. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Space R_k, $k>1$, Skand. Aktuarietidskrift, 1945, p. 106–127.
2. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand. Aktuarietidskrift, 1949, p. 37–62.
3. M. L. Katz, Note on the Berry-Esseen theorem, Ann. Math. Stat., **34**, 3(1963), p. 1107–1108
4. V. V. Sazonov, On the Multi-dimensional Central Limit Theorem, Sankhya, ser. A, **30** part 2.
5. А. Бикялис, Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., **IV**, № 3 (1964), 303–308.
6. В. М. Золотарев, Аналог асимптотического разложения Эджворта—Крамера для случая сближения с устойчивыми законами распределения, Труды VI Всес. совещ. по теории вероятн. и матем. стат., Вильнюс, 1962.
7. В. М. Золотарев, О близости распределений двух сумм независимых случайных величин, Теор. вероят. и ее прим., **IX**, вып. 3 (1965).
8. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Лит. матем. сб., **IX**, № 2 (1969), 323–328.
9. В. Паулаускас, Одна теорема о скорости сходимости в центральной предельной теореме. Лит. матем. сб., **XI**, № 1 (1971), 173–179.
10. В. Паулаускас, Об оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. II, Лит. матем. сб., **IX**, № 4 (1969), 791–816.

KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTINIMAS, PANAUDOJANT PSEUDOMOMENTUS

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamas konvergavimo greičio įvertinimas centrinėje ribinėje teoremoje nepriklausomiems vienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams dydžiams, kurių pirmieji m momentai sutampa su standartinio normalinio dydžio atitinkamais momentais ir kurie turi baigtinį $m+\delta$ eilės pseudomomentą ($m\geqslant 2$ — sveikas skaičius, $0<\delta\leqslant 1$).

AN ESTIMATE OF THE RATE OF CONVERGENCE IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM BY MEANS OF PSEUDOMOMENTS

V. Paulauskas

Summary)

Let $\xi_1, \ldots, \xi_n$ be independent, identically distributed random variables with m first moments which are equal to corresponding moments of standard normal random variable and with finite pseudomoment of order $m+\delta$ ($m\geqslant 2$ — integer, $0<\delta\leqslant 1$). In the paper the estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for such random variables is considered.