XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1971

УДК 517.432.1

О СХОДИМОСТИ И СВЕРХСХОДИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА ЛАПЛАСА – СТИЛТЬЕСА

А. Л. Мишкялявичюс

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t)z}\,dA(t), \tag{1}$$

где на каждом отрезке из $[0,\infty)$ комплекснозначная функция $A(t)$ имеет ограниченную вариацию, а кривая $z=\lambda(t)=|\lambda(t)|e^{i\beta(t)}=\mu(t)+i\nu(t)$ — гладкая или кусочно-гладкая.

В. Г. Абдрахманов в своей работе [1] исследовал сходимость интеграла (1), где функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\infty; \qquad \overline{\lim_{t=\infty}}\,|\arg\lambda'(t)|=\alpha<\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Он установил, в частности, что область условной сходимости интеграла (1) является выпуклой, нашел уравнение $x=c(y)$ границы этой области и доказал теорему типа Абеля, которая утверждает следующее: из сходимости интеграла (1) в точке z_0 следует его сходимость в угле

$$V(z_0):|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

Сходимость является равномерной в угле

$$V(z_0,\ \delta):|\arg(z-z_0)|<\frac{\pi}{2}-\alpha-\delta.$$

В настоящей заметке мы уточним теорему Абеля, а также докажем теоремы о сверхсходимости для интеграла (1). Кроме того, найдем уравнение границы области сходимости интеграла (1), отличное от приведенного в статье [1], которым будем пользоваться при доказательстве теорем о сверхсходимости.

§ 1. Теорема Абеля и область сходимости

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие (2).

1. Обозначим

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t)=\gamma; \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t)=\beta. \tag{2'}$$

Тогда из условия (2) вытекают неравенства

$$|\gamma|\leqslant\alpha; \qquad |\beta|\leqslant\alpha.$$

Теорема 1. *Если* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условию* (2) *и интеграл* (1) *сходится в точке* $z=z_0$, *то он сходится в угле*

$$U(z_0): -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) < \arg(z-z_0) < \frac{\pi}{2}-\beta.$$

Сходимость интеграла является равномерной в угле

$$U(z_0, \delta): -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma-\delta\right) < \arg(z-z_0) < \frac{\pi}{2}-\beta-\delta; \qquad \delta>0.$$

Доказательство. Как следует из условия (2), при достаточно больших t, $t>R_0$, будут выполняться неравенства:

$$|\arg\lambda'(t)|<\psi; \qquad |\lambda'(t)|<\mu'(t)\sec\psi; \qquad \alpha<\psi<\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

и

$$\gamma-\frac{\delta}{2}<\arg\lambda(t)<\beta+\frac{\delta}{2}. \tag{4}$$

Число R_0 можно выбрать настолько большим, чтобы для заранее взятого $\varepsilon>0$ функция

$$B(t, H)=\int_H^t e^{-\lambda(u)z_0}dA(u)$$

удовлетворяла неравенству

$$|B(t, H)<\varepsilon,$$

если $H>R_0$ и $t>R_0$.
Тогда для отрезка интеграла (1)

$$\int_h^H e^{-\lambda(t)z}dA(t),$$

где $H>h>R_0$ и $z\in U(z_0, \delta)$, получаем оценку (см. (3))

$$\left|\int_h^H e^{-\lambda(t)z}dA(t)\right|=\left|\int_h^H e^{-\lambda(t)(z-z_0)}dB(t, H)\right|\leqslant|B(h, H|\times$$

$$\times|e^{-\lambda(h)(z-z_0)}|+|z-z_0|\int_h^H|B(t, H)||e^{-\lambda(t)(z-z_0)}|\times$$

$$\times|\lambda'(t)|\,dt<\varepsilon|e^{-\lambda(h)(z-z_0)}|+\varepsilon|z-z_0|\sec\psi\times$$

$$\times\int_h^H|e^{-\lambda(t)(z-z_0)}|\mu'(t)\,dt.$$

Но для $t>R_0$ и $z\in U(z_0, \delta)$ имеем (см. (4)):

$$\mathrm{Re}\,[\lambda(t)(z-z_0)]=|\lambda(t)||z-z_0|\cos[\arg\lambda(t)+\arg(z-z_0)]>\mu(t)|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$\left|\int_h^H e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right| < \varepsilon e^{-\mu(h)|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}} + \varepsilon|z-z_0|\sec\psi \times$$

$$\times \int_h^H e^{-\mu(t)|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}\mu'(t)\,dt < \varepsilon\left(1+\sec\psi\csc\frac{\delta}{2}\right)\times$$

$$\times e^{-\mu(h)|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}} < \varepsilon\left(1+\sec\psi\csc\frac{\delta}{2}\right).$$

Этим доказано, что интеграл (1) равномерно сходится в угле $U(z_0, \delta)$. Отсюда легко следует сходимость интеграла в любой точке угла $U(z_0)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty}\arg\lambda(t)=0$, *то из сходимости интеграла* (1) *в точке* $z=z_0$ *следует его сходимость в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,z_0$.

Замечание 1. Ниже мы убедимся в том, что в некоторых случаях результат, содержащийся в теореме 1, нельзя улучшить, то есть интеграл (1) сходится в угле $U(z_0)$ и расходится вне этого угла.

2. В этом пункте найдем уравнение границы области сходимости интеграла (1) в предположении, что выполнено условие (2).

Определим функцию $x=c(y)$, $|y|<\infty$ следующим образом:

$$c(y)=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\ln\left|\int_0^t e^{-iy\lambda(u)}\,dA(u)\right|}{\mu(t)}, & \text{если } \int_0^\infty e^{-iy\lambda(u)}dA(u) \text{ расходится;}\\[2ex] \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\ln\left|\int_t^\infty e^{-iy\lambda(u)}\,dA(u)\right|}{\mu(t)}, & \text{если } \int_0^\infty e^{-iy\lambda(u)}dA(u) \text{ сходится.}\end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Интеграл* (1) *сходится в области* $x>c(y)$ *и расходится в области* $x<c(y)$, $-\infty<y<\infty$, $z=x+iy$.

Доказательство. а) Пусть $c(y)>0$ для некоторого y и $x>c(y)$. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что $x>c(y)+2\delta$. Как следует из (5), функция

$$C(t)=\int_0^t e^{-iy\lambda(u)}\,dA(u)$$

удовлетворяет неравенству

$$|C(t)|<Ke^{[c(y)+\delta]\mu(t)},\quad K=K(\delta)>0,\quad t\geqslant 0,$$

и поэтому для $H>h>R_0$ и $z=x+iy$ получаем (см. (3)):

$$\left|\int_h^H e^{-\lambda(t)z}dA(t)\right|=\left|\int_h^H e^{-x\lambda(t)}dC(t)\right|<Ke^{-[x-c(y)-\delta]\mu(H)}+$$

$$+Ke^{-[x-c(y)-\delta]\mu h}+Kx\sec\psi\int_h^H e^{-[x-c(y)-\delta]\mu(t)}\mu'(t)\,dt,$$

откуда для $x > c(y) + 2\delta$ выводим неравенство

$$\left| \int\limits_h^H e^{-\lambda(t)z} dA(t) \right| < K\left(1 + \frac{x\sec\psi}{\delta}\right) e^{-\delta\mu(h)} \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

б) Пусть интеграл (1) сходится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0 > 0$. Тогда

$$|B(t)| \leqslant B, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$B(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda(u)z_0} dA(u),$$

и

$$\left| \int\limits_0^t e^{-iy_0\lambda(u)} dA(u) \right| = \left| \int\limits_0^t e^{x_0\lambda(u)} dB(u) \right| \leqslant Bx_0 e^{x_0\mu(t)} +$$

$$+ Bx_0 \int\limits_0^t e^{x_0\mu(u)} |\lambda'(u)|\, du.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $|\arg\lambda'(t)| < \psi < \frac{\pi}{2}$ для всех t. Тогда получаем (см. (3)):

$$\left| \int\limits_0^t e^{-iy_0\lambda(u)} dA(u) \right| < B(1 + \sec\psi) e^{x_0\mu(t)}.$$

Отсюда и следует, что $x_0 \geqslant c(y_0)$. Случай $c(y) < 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \arg\lambda(t) = 0$, *то область условной сходимости интеграла* (1) — *полуплоскость* $\operatorname{Re} z > c$, *где*

$$c = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln|A(t)|}{\mu(t)}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty} A(t) \text{ не существует;} \\ \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln|A(t) - A(\infty)|}{\mu(t)}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty} A(t) \text{ существует,} \end{cases} \tag{6}$$

и $A(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} A(t)$. *Число* c, *определенное равенствами* (6), *является абсциссой условной сходимости и для интеграла*

$$\int\limits_0^\infty e^{-\mu(t)z} dA(t).$$

Замечание 2. Выражение $e^{-iy\lambda(u)}$ в формулах (5) можно заменить на $e^{y\nu(u)}$, где $\nu(u) = \operatorname{Im}\lambda(u)$. Для доказательства этого утверждения достаточно сослаться на работу [5], где аналогичная замена проводилась для случая ряда Дирихле. Таким образом,

$$c(y) = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\int\limits_0^t e^{y\nu(u)} dA(u)\right|}{\mu(t)}, & \text{если } \int\limits_0^\infty e^{y\nu(u)} dA(u) \text{ расходится;} \\ \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{\ln\left|\int\limits_t^\infty e^{y\nu(u)} dA(u)\right|}{\mu(t)}, & \text{если } \int\limits_0^\infty e^{y\nu(u)} dA(u) \text{ сходится.} \end{cases} \tag{5'}$$

3. Рассмотрим более подробно формулу (5) в следующих двух случаях:

а) когда существует конечный положительный предел $c=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln|A(t)|}{\mu(t)}$ $\left(\text{или конечный отрицательный предел } c=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln|A(t)-A(\infty)|}{\mu(t)}\right)$;

б) когда $\dfrac{\ln|A(t)|}{\mu(t)}$ $\left(\text{или } \dfrac{\ln|A(t)-A(\infty)|}{\mu(t)}\right)$ имеет конечное число предельных значений при $t\to\infty$, которые являются положительными (отрицательными).

Для рассмотрения этих случаев вводим замену $z=\zeta e^{i\vartheta}$, где

$$|\vartheta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$$

(см. (2)) и $\zeta=\xi+i\eta$. Тогда интеграл (1) принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_1(t)\zeta}\,dA(t), \tag{1'}$$

где $\lambda_1(t)=\lambda(t)e^{i\vartheta}=\mu_1(t)+i\nu_1(t)$. Очевидно,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\arg\lambda_1'(t)|=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|\arg\lambda'(t)+\vartheta|<\frac{\pi}{2}\,.$$

Последнее неравенство показывает, что $\lambda_1(t)$ удовлетворяет условию вида (2) и, следовательно, граничная кривая области сходимости интеграла (1′) определяется равенством (5), где $\lambda(u)$ и $\mu(t)$ должны быть заменены на $\lambda_1(u)$ и $\mu_1(t)$. Для вещественных ζ, $\zeta=\xi$ интеграл (1) сходится, когда $\xi>c_1(\vartheta)$, где (см. (6))

$$c_1(\vartheta)=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\dfrac{\ln|A(t)|}{\mu_1(t)}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}A(t) \text{ не существует;}\\[2ex] \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\dfrac{\ln|A(t)-A(\infty)|}{\mu_1(t)}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}A(t) \text{ существует.}\end{cases}$$

Это значит, что интеграл (1) сходится на той части прямой $z=\xi e^{iv}$, $-\infty<\xi<\infty$, где $\xi>c_1(\vartheta)$. Так как

$$\mu_1(t)=\mu(t)\,\frac{\cos[\beta(t)+\vartheta]}{\cos\beta(t)}\,; \qquad \beta(t)=\arg\lambda(t),$$

то

$$c_1(\vartheta)=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\dfrac{\ln|A(t)|}{\mu(t)}\,\dfrac{\cos\beta(t)}{\cos[\beta(t)+\vartheta]}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}A(t) \text{ не существует;}\\[2ex] \overline{\lim\limits_{t\to 8}}\,\dfrac{\ln|A(t)-A(\infty)|}{\mu(t)}\,\dfrac{\cos\beta(t)}{\cos[\beta(t)+\vartheta]}, & \text{если } \lim\limits_{t\to\infty}A(t) \text{ существует.}\end{cases}$$

Следствие 3. *Если выполнено условие а), то область условной сходимости интеграла* (1) *– угол*

$$U(c):\ -\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(z-c)<\frac{\pi}{2}-\beta,$$

где

$$\gamma=\overline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t), \qquad \beta=\overline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t).$$

Если $c>0$, то тогда и $c_1(\vartheta)>0$ для $|\vartheta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$. Имея в виду, что функция $y(x)=\frac{\cos x}{\cos(a+x)}$, $|a|<\frac{\pi}{2}$, $|a+x|<b<\frac{\pi}{2}$, если $a>0$ возрастает при $x>0$ и убывает при $x<0$, если $a<0$, легко заключаем, что $c_1(\vartheta)=c\frac{\cos\beta}{\cos(\beta+\vartheta)}$, если $0\leqslant\vartheta<\frac{\pi}{2}-\alpha$, и $c_1(\vartheta)=c\frac{\cos\gamma}{\cos(\gamma+\vartheta)}$, если $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\vartheta<0$. Но уравнение в полярных координатах $r(\vartheta)=c\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\vartheta)}$ определяет прямую, проходящую через точку $z=c$, перпендикулярную прямой $z=\xi e^{-i\varphi}$. Следовательно, для $|\vartheta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ граница области сходимости интеграла (1) совпадает со сторонами угла $U(c)$. По теореме 1 интеграл сходится в угле $U(c)$, так как он сходится в точках $z=x>c$, сколь угодно близких к точке $z=c$. Ввиду того, что область сходимости интеграла (1) является выпуклой [1], мы и получаем ранее высказанное утверждение. Аналогично рассматривается и случай, когда $c<0$.

Следствие 4. *Если выполнено условие б), то кривая в полярных координатах* $r=c_1(\vartheta)$, $|\vartheta|<\frac{\pi}{2}-\alpha$ $\left(|\vartheta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ — *ломанная с конечным числом сторон.*

Это утверждение доказывается также, как и следствие 3.

§ 2. Теоремы о сверхсходимости

1. Сначала установим несколько неравенств, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Без ограничения общности будем считать, что $c(y)>0$ для всех y из некоторого конечного промежутка.

Лемма 1. *Если функция* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условию* (2), *то для данного* $\varepsilon>0$ *неравенство*

$$\ln\left|\int_0^h e^{-iy\lambda(t)}\,dA(t)\right|<[c(y)+\varepsilon]\,\mu(h) \tag{7}$$

выполняется для всех y *из заданного отрезка* $[a,b]$ *при достаточно большом* h, $h>R_0(\varepsilon)$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $|\arg\lambda'(t)|<\psi$ и $|\arg\lambda(t)|<\psi$, $0<\psi<\frac{\pi}{2}$ для всех t. Тогда $|\nu(t)|<\mu(t)\operatorname{tg}\psi$, где $\lambda(t)=\mu(t)+i\nu(t)$. Для фиксированного $y=y_0$, $y_0\in[a,b]$, и данного $\varepsilon>0$ имеем неравенство (см. (5))

$$\left|\int_0^t e^{-iy_0\lambda(u)}\,dA(u)\right|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu(t)},\quad M=M(\varepsilon),\ t\geqslant 0,$$

и ввиду непрерывности функции $x=c(y)$, $|y|<\infty$ [1]

$$|c(y_0)-c(y)|<\frac{\varepsilon}{4},\qquad |y-y_0|<\delta,\qquad \delta=\delta(\varepsilon).$$

Пусть

$$C(t)=\int_0^t e^{-iy_0\lambda(u)}\,dA(u).$$

Тогда для $|y-y_0|<\delta$ получаем:

$$\left|\int_0^h e^{-iy\lambda(t)}\,dA(t)\right|=\left|\int_0^h e^{-i(y-y_0)\lambda(t)}\,dC(t)\right|\leqslant |C(h)|\,e^{\nu(h)(y-y_0)}+$$

$$+|y-y_0|\sec\psi\int_0^h |C(t)|\,e^{\nu(t)(y-y_0)}\mu'(t)\,dt<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu(h)+\delta|\nu(h)|}+$$

$$+M\delta\sec\psi\int_0^h e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{4}\right]\mu(t)+\delta|\nu(t)|}\mu'(t)\,dt.$$

Число δ можем считать достаточно малым и таким, что $\delta\cdot\operatorname{tg}\psi<\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда с учетом неравенства $|\nu(t)|<\mu(t)\operatorname{tg}\psi$ выводим для $|y-y_0|<\delta$

$$\left|\int_0^h e^{-iy\lambda(t)}\,dA(t)\right|<Me^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(h)}+$$

$$+M\delta\sec\psi\int_0^h e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(t)}\mu'(t)\,dt<M\left(1+\frac{\delta\sec\psi}{c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}}\right)e^{\left[c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(h)}.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\int_0^h e^{-iy\lambda(t)}dA(t)\right|<\left[\frac{\ln K}{\mu(h)}+c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(h)<[c(y)+\varepsilon]\,\mu(h),$$

где

$$K=M\left(1+\frac{\delta\sec\psi}{c(y_0)+\frac{\varepsilon}{2}}\right),\qquad |y-y_0|<\delta \text{ и } h>R_1(\varepsilon).$$

Отсюда легко вытекает утверждение леммы для всех y из (a, b). Лемма доказана.

Рассмотрим две области D и G, которые определяются неравенствами:

$$D=[z=x+iy : x>c(y)-\rho;\ a<y<b];$$

$$G=[z=x+iy : x>c(y)+\rho;\ a<y<b];\ \rho>0,\ -\infty<a<b<\infty,$$

и пусть d и g — ограниченные множества, внутренние соответственно к областям D и G, $d\subset D$ и $g\subset G$. Теперь можем сформулировать следующее утверждение.

Лемма 2. *Для* $\varepsilon>0$, $\varepsilon<\rho$, *и достаточно большого* h, $h>R(\varepsilon)$, *выполняются неравенства*

$$\left|\int_0^h e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right|<e^{(\rho+\varepsilon)\mu(h)},\qquad z\in d; \tag{8}$$

$$\left|\int_h^\infty e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right|<e^{-(\rho-\varepsilon)\mu(h)},\qquad z\in g. \tag{9}$$

Доказательство. Как следует из (7), функция

$$C(t,\ y)=\int\limits_0^t e^{-iy\lambda(u)}\,dA(u);\qquad a<y<b$$

удовлетворяет неравенству

$$|C(t,\ y)|<Ne^{\left[c(y)+\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(t)};\qquad t\geqslant 0,\qquad N=N(\varepsilon).$$

Тогда (см. (3)) при достаточно большом h и $H>h$ получаем:

$$\left|\int\limits_h^H e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right|=\left|\int\limits_h^H e^{-\lambda(t)x}\,dC(t,\ y)\right|\leqslant|C(H,\ y)|\,e^{-\mu(H)x}+$$

$$+|C(h,\ y)|\,e^{-\mu(h)x}+x\sec\psi\int\limits_h^H|C(t,\ y)|\,e^{-\mu(t)x}\mu'(t)\,dt<$$

$$<Ne^{-\left[x-c(y)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(H)}+Ne^{-\left[x-c(y)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(h)}+Nx\sec\psi\ \times$$

$$\times\int\limits_h^H e^{-\left[x-c(y)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\mu(t)}\mu'(t)\,dt$$

и для $z\in g$

$$\left|\int\limits_h^H e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right|<2Ne^{-\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(h)}+$$

$$+Nx\sec\psi\int\limits_h^H e^{-\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(t)}\mu'(t)\,dt<N\left(2+\frac{x\sec\psi}{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}\right)e^{-\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(h)}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int\limits_h^\infty e^{-\lambda(t)z}\,dA(t)\right|\leqslant N\left(2+\frac{x\sec\psi}{\rho-\frac{\varepsilon}{2}}\right)e^{-\left(\rho-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(h)},\qquad z\in g$$

и при достаточно большом h, $h>R(\varepsilon)$, получаем неравенство (9). При помощи аналогичных рассуждений выводится и неравенство (8). Лемма доказана.

2. Пусть

$$f(z)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(t)z}\,dA(t).\tag{1}$$

Приводимые ниже теоремы о сверхсходимости интеграла (1) являются прямым обобщением известных теорем Островского [3], [6].

Теорема 3. *Если* $A(t)=\text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n\leqslant t\leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\infty$, *причем*

$$|\lambda(q_n)|>(1+\vartheta_n)\,|\lambda(p_n)|,\ \lim_{n\to\infty}\vartheta_n=\infty,\tag{10}$$

то последовательность интегралов

$$\left\{ \int_{n}^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\, dA(t) \right\}$$

сходится равномерно к $f(z)$ во всякой конечной области, внутренней к естественной области существования этой функции. Кроме того, эта область является односвязной.

Замечание 3. Если $\lambda(t)$ удовлетворяет условию

$$|\lambda(q_n)| > (1+\sigma)\,|\lambda(p_n)|, \qquad \sigma > 0,$$

то (см. (3))

$$\mu(q_n) > (1+\sigma\cos\psi)\,\mu(p_n), \qquad n > N.$$

В самом деле, при $n > N$ имеем $|\arg\lambda'(p_n)| < \psi < \frac{\pi}{2}$ и

$$\mu(q_n) - \mu(p_n) = |\lambda(q_n) - \lambda(p_n)| \cos\left[\arg\left(\lambda(q_n) - \lambda(p_n)\right)\right] >$$

$$> \left[|\lambda(q_n)| - |\lambda(p_n)|\right] \cos\psi > \sigma\cos\psi\,|\lambda(p_n)| \geqslant \sigma\cos\psi\,\mu(p_n).$$

Посредством последнего замечания и неравенств (8) и (9) теорема 3 доказывается точно таким же образом, как и теорема Островского [3].

Теорема 4. *Предположим, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \arg\lambda(t) = 0$ *и* $A(t) = \text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n \leqslant t \leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, *причем*

$$|\lambda(q_n)| \to (1+\vartheta)\,|\lambda(p_n)|, \qquad \vartheta > 0. \tag{11}$$

Тогда последовательность интегралов $\left\{ \int_{0}^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\, dA(t) \right\}$ *стремится к $f(z)$ равномерно в некоторой окрестности любой точки, правильной для $f(z)$, расположенной на границе области сходимости интеграла (1).*

Теорема 5. *Пусть ζ_0 — точка на границе $x = c(y)$ области сходимости интеграла (1) такая, что 1) $f(z)$ — голоморфна в точке ζ_0; 2) существует круг, целиком лежащий в области сходимости этого интеграла и касающийся границы $x = c(y)$ в точке ζ_0. Если (см.* (2), (2′)) $\max(|\beta|, |\gamma|) < \frac{\pi}{2} - \alpha$ *и* $A(t) = \text{const}$ *на последовательности отрезков* $p_n \leqslant t \leqslant q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, *причем*

$$|\lambda(q_n)| > (1+\vartheta)\,|\lambda(p_n)|, \quad \vartheta > 0,$$

то последовательность интегралов $\left\{ \int_{0}^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\, dA(t) \right\}$ *стремится к $f(z)$ равномерно в некоторой окрестности точки ζ_0.*

Замечание 4. Если $\alpha = \varlimsup\limits_{t\to\infty} |\arg\lambda'(t)| < \frac{\pi}{4}$, то $\max(|\beta|, |\gamma|) < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Следствие 5. *Утверждение теоремы 5 остается прежним, если условие* $\max(|\beta| \gamma|) < \frac{\pi}{2} - \alpha$ *заменить следующим: касательная в точке* ζ_0 *к кругу, о котором говорится в этой теореме, составляет с мнимой осью угол* φ *такой, что* $|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Следствие 6. *Пусть* $f(z)$ *— голоморфна в точке* ζ_0, *которая является внутренней для некоторого прямолинейного отрезка границы области сходимости интеграла* (1). *Если выполнено условие* (11) *и* $A(t) = \text{const}$ *для* $t \in [p_n, q_n]$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, *то последовательность интегралов* $\left\{ \int\limits_0^{p_n} e^{-\lambda(t)z}\, dA(t) \right\}$ *равномерно стремится к* $f(z)$ *в некоторой окрестности точки* ζ_0.

Доказательство теорем 4 и 5, как и следствий 5 и 6, можно провести, используя неравенства (8) и (9), таким же образом, как и доказательство теорем о сверхсходимости рядов Дирихле [3], [6]. Поэтому это доказательство мы опускаем.

Замечание 5. Как частный случай вышеприведенных теорем, вытекают теоремы о сверхсходимости для обыкновенного интеграла Лапласа—Стилтьеса $\int\limits_0^\infty e^{-tz}\, dA(t)$, $\lambda(t) \equiv t$. В этом случае условия (10) и (11) заменяются соответственно следующими:

$$q_n > (1 + \vartheta_n)\, p_n,\quad \vartheta_n \to \infty;\quad p_n \to \infty;$$

$$q_n > (1 + \vartheta)\, p_n,\quad \vartheta > 0;\quad p_n \to \infty.$$

Замечание 6. Доказанные в § 1 и § 2 утверждения непосредственно переносятся для случая ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-\lambda_n z}, \tag{12}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty; \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\arg(\lambda_{n+1} - \lambda_n)| = \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Чтобы убедиться в сказанном, достаточно заметить, что при соответствующем выборе функций $A(t)$ и $\lambda(t)$ интеграл (1) сводится к ряду (12), удовлетворяющему условию (13). В самом деле, пусть (см. [1]) $A(t) = \sum\limits_{n=1}^{[t]} a_n$ при $t > 0$, $A(0) = 0$, *а* $\lambda(t)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (2), и такая, что $\lambda(n) = \lambda_n$. При таком выборе функций $A(t)$ и $\lambda(t)$ интеграл (1) сводится к ряду Дирихле (12), показатели λ_n которого удовлетворяют условию (13). Упомянутые результаты для рядов Дирихле содержатся в работах [2], [4], [5] и [6].

§ 3. Некоторые обобщения

В этом пункте исследуем сходимость интеграла (1), когда функция $\lambda(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\infty;\qquad -\frac{\pi}{2}<\gamma\leqslant\beta<\frac{\pi}{2},\tag{14}$$

где

$$\beta=\overline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t);\qquad \gamma=\underline{\lim_{t\to\infty}}\arg\lambda(t),$$

и $(\mu(t)=Re\,\lambda(t))$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left[\frac{\pi}{2}-|\arg\lambda'(t)|\right]}{\mu(t)}=0.\tag{15}$$

Очевидно, условие (15) является более общим, чем условие (2).

Теорема 6. *Предположим, что выполнены условия* (14), (15) *и интеграл* (1) *сходится в точке* z_0. *Тогда он сходится в угле*

$$U(z_0):-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta$$

и равномерно сходится в области

$$U(z_0,\ \delta,\ r):-\left(\frac{\pi}{2}+\gamma-\delta\right)<\arg(z-z_0)<\frac{\pi}{2}-\beta-\delta;\qquad |z-z_0|>r,$$

где δ *и* r — *любые положительные числа,* $\delta<\frac{\pi}{2}-\max(|\beta|,\ |\gamma|)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что интеграл (1) равномерно сходится в области $U(z_0,\ \delta,\ r)$. Рассмотрим отрезок интеграла (1)

$$I(h,\ H,\ z)=\int_h^H e^{-\lambda(t)z}dA(t)=\int_h^H e^{-\lambda(t)(z-z_0)}dB(t),$$

где

$$B(t)=\int_H^t e^{-\lambda(u)z_0}dA(u).$$

Тогда

$$|I(h,H,z)|\leqslant|B(h)||e^{-\lambda(h)(z-z_0)}|+|z-z_0|\int_h^H|B(t)||e^{-\lambda(t)(z-z_0)}||\lambda'(t)|\,dt.\tag{16}$$

Число H выберем настолько большим, чтсбы для заданного $\varepsilon>0$ выполнялось неравенство $|B(t)|<\varepsilon$, если t достаточно велико. С другой стороны, при достаточно больших значениях t из условий (14) и (15) выводим неравенства

$$\gamma-\frac{\delta}{2}<\arg\lambda(t)<\beta+\frac{\delta}{2}$$

и

$$|\arg\lambda'(t)|<\frac{\pi}{2}-e^{-\eta\mu(t)},$$

где $\eta>0$ — произвольное сколь угодно малое число. Тогда получаем:

$$\operatorname{Re}[(z-z_0)\lambda(t)]=|z-z_0||\lambda(t)|\cos[\arg(z-z_0)+\arg\lambda(t)]>|z-z_0|\mu(t)\sin\frac{\delta}{2},$$

если $z\in U(z_0, \delta, r)$, и

$$\mu'(t)=|\lambda'(t)|\cos[\arg\lambda'(t)]>|\lambda'(t)|\sin[e^{-\eta\mu(t)}]>\frac{2}{\pi}|\lambda'(t)|e^{-\eta\mu(t)},$$

так как $\sin x>\frac{2}{\pi}x$, $0<x<\frac{2}{\pi}$. Считая $2\eta\leqslant r\sin\frac{\delta}{2}$, с учетом последних неравенств при достаточно больших h и H из (16) выводим:

$$|I(h, H, z)|<\varepsilon e^{-\mu(h)|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}+\frac{\pi}{2}|z-z_0|\varepsilon\times$$

$$\times\int_h^H e^{-\mu(t)\left[|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}-\eta\right]}\mu'(t)\,dt<\varepsilon\left(1+\frac{\pi}{2}\,\frac{|z-z_0|}{|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}-\eta}\right)\times$$

$$\times e^{-\mu(h)\left[|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}-\eta\right]}<C\varepsilon.$$

Здесь $C>0$ — постоянная, зависящая только от r и δ. Этим доказано, что интеграл (1) равномерно сходится в области $U(z_0, \delta, r)$. Теорема доказана.

Замечание 7. Если выполнены условия (14) и (15), то граничная кривая $x=c(y)$ области сходимости интеграла (1) определяется равенствами (5). Кроме того, на этот случай переносятся и теоремы 3, 4, а также следствие 6 о сверхсходимости этого интеграла, если только условия (10) и (11) заменить соответственно следующими:

$$\mu(q_n)>(1+\vartheta_n)\mu(p_n);\quad \vartheta_n\to\infty,\quad p_n\to\infty;$$

$$\mu(q_n)>(1+\vartheta)\mu(p_n);\quad \vartheta>0,\quad p_n\to\infty.$$

Аналогичные утверждения имеют место и для ряда Дирихле, показатели λ_n которого удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[\frac{\pi}{2}-|\arg(\lambda_{n+1}-\lambda_n)|\right]}{\operatorname{Re}\lambda_n}=0.$$

Доказательство всех этих утверждений можно провести, повторяя почти без изменений все выкладки, которыми мы пользовались выше.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
20.XII.1969.

Литература

1. В. Г. Абдрахманов, О сходимости интеграла типа Лапласа—Стилтьеса, Лит. матем. сб., XI, № 1 (1970), 5—18.
2. А. Л. Мишкялявичюс, О сходимости рядов Дирихле с комплексными показателями, Автореферат кандидатской диссертации, Вильнюс, 1966.
3. V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
4. А. Л. Мишкялявичюс, Об области сходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., V, №1 (1965), 117—126.

5. А. Л. Мишкялявичюс, О границе области сходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., **VI**, № 1 (1966), 91–98.
6. А. Л. Мишкялявичюс, О сверхсходимости ряда Дирихле, Лит. матем. сб., **VII**, № 4 (1967), 651–664.

VIENO LAPLASO—STILTJESO TIPO INTEGRALO KONVERGAVIMO IR VIRŠKONVERGAVIMO KLAUSIMU

A. Miškelevičius

(*Reziumė*)

Šiame straipsnyje nagrinėjamas (1) integralas, kai funkcija $\lambda(t)$ tenkina (2) sąlygą. Šiam integralui įrodytos dvi Abelio tipo teoremos (1 ir 6) apie konvergavimą ir kelios teoremos (3, 4 ir 5 apie virškonvergavimą, analogiškos žinomoms M. Ostrovskio teoremoms [3]. Atskiru atveju tokios teoremos gaunamos ir Dirichlė eilutėms.

SUR LA CONVERGENCE ET L'ULTRACONVERGENCE DE L'INTÉGRALE DU TYPE LAPLACE–STILTJES

A. Miškelevičius

(*Résumé*)

On considère dans cet article l'intégrale (1), ou $\lambda(t)$ vérifie une condition (2). Pour cet intégrale sont établies deux théorèmes du type d'Abel (1 et 6) sur la convergence et quelques théorèmes (3, 4 et 5) sur l'ultraconvergence, qui sont analogues à celles de M. Ostrovski [3]. Dans un cas particulier on obtient tels théorèmes et pour les séries de Dirichlet.