XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 2

1971

УДК 517.548

# РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ НЕОГРАНИЧЕННЫМ СИММЕТРИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Б. И. Кунейкайте

## Введение

В работе рассматривается уравнение

$$Af=g, \tag{1}$$

где $A$ — линейный неограниченный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $H$, в том случае, когда не существует всюду определенного ограниченного обратного оператора $A^{-1}$ (иначе говоря, нулевая точка принадлежит спектру оператора $A$), но существует хотя бы одно решение уравнения (1). В этом случае решения уравнения (1) не являются непрерывно зависящими от вариаций правой стороны и от вариаций самого оператора $A$, т.е. задача является некорректной.

Обзор по некорректным задачам можно найти в [1].

В настоящей работе наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$(A_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n}, \tag{2}$$

где $A_{\delta_n}=A+\delta_n A$, $\delta_n A$ — ограниченный симметрический оператор в пространстве $H$, $\|\delta_n A\|\leqslant\delta_n$; $g_{\delta_n}\in H$, $\|g-g_{\delta_n}\|\leqslant\delta_n$, $\alpha_n$, $\delta_n>0$.

В работе доказывается, что в том случае, когда для некоторых последовательностей положительных чисел $\{\delta_n\}$ и $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n=\alpha_n(\delta_n)$, $\alpha_n$, $\delta_n\to 0$ и $\delta_n=o(\alpha_n)$, существуют решения уравнений (2) $f_{\delta_n,\alpha_n}$, а также для некоторых $\{\delta_n'\}$ и $\{\alpha_n'\}$ — решения уравнений

$$(A+i\alpha_n' I)f=g_{\delta_n'}, \tag{3}$$

где $\{\delta_n'\}$ и $\{\alpha_n'\}$ — последовательности чисел, удовлетворяющих тем же условиям, что и $\{\alpha_n\}$, $\{\delta_n\}$ (возможно $\delta_n=\delta_n'$, $\alpha_n=\alpha_n'$) и $\|g-g_{\delta_n}\|\leqslant\delta_n'$, $f_{\delta_n,\alpha_n}$ сходится к нормальному решению (к решению с наименьшей нормой) уравнения (1).

Совсем аналогично задача решается в работе [3], только там рассматривается уравнение, когда $A$ — линейный самосопряженный оператор.

В настоящей работе будем пользоваться терминами, определениями и теоремами, изложенными в [2], [4], [5]. Особенно воспользуемся тем, что каждый симметрический оператор можно продолжить до самосопряженного оператора (см. теоремы [2] и [4]).

1. Рассмотрим уравнение

$$Af=g, \tag{1}$$

где $A$ — замкнутый неограниченный симметрический оператор, область определения которого $D_A$ плотна в $H$, в том случае, когда не существует обратный ограниченный оператор $A^{-1}$, но существует решение уравнения (1). В этом случае решения уравнения $Ah=0$ образуют линейное, замкнутое множество $H_1$ (линейность и замкнутость следуют из того, что $A$ — линейный и замкнутый), которое является подпространством пространства $H$ ($H_1 \subset H$).

Тогда каждое решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$f=f^*+h,$$

где $h \in H_1$, т.е. $h$ — решение уравнения $Ah=0$, а $f^* \perp H_1$. Так как

$$\|f\|^2=\|f^*\|^2+\|h\|^2 \geqslant \|f^*\|^2,$$

то $f^*$ — нормальное решение уравнения (1). Не трудно доказывается единственность этого решения. Уравнения

$$(A_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n}, \tag{2}$$

$$(A+i\alpha'_n I)f=g_{\delta'_n}, \tag{3}$$

где $A_{\delta_n}$, $g_{\delta_n}$, $g_{\delta'_n}$ — определены в начале работы, имеют, очевидно, единственные решения.

2. Рассмотрим уравнения

$$Af=g, \tag{1}$$

$$B^+f=g, \tag{4}$$

где $B^+$ — самосопряженное расширение оператора $A$ с выходом из пространства $H$ в $H^+$ ($H^+$ — гильбертово пространство, содержащее пространство $H$, $H \subset H^+$) [2], [4].

Докажем, что, если только уравнения

$$(A+i\alpha'_n I)f=g_{\delta'_n} \tag{3}$$

имеют решения $f_{\delta'_n, \alpha'_n}$, $\delta'_n$, $\alpha'_n \to 0$ и $\delta'_n=o(\alpha'_n)$, то нормальные решения уравнений (1) и (4) совпадают.

Допустим, что нормальные решения уравнения (1) $f^*$, а уравнения (4) — $\tilde{f}$. Так как решения уравнения (1) являются решениями уравнения (4), то

$$\|\tilde{f}\|_{H^+} \leqslant \|f^*\|_H.$$

Пусть $f_{\delta'_n, \alpha'_n}$ — решения уравнений (3). Тогда $Af_{\delta'_n, \alpha'_n}=B^+f_{\delta'_n, \alpha'_n}$ и $f_{\delta'_n, \alpha'_n}$ удовлетворяют уравнениям

$$B^+f_{\delta'_n, \alpha'_n}+i\alpha'_n f_{\delta'_n, \alpha'_n}=g_{\delta'_n}. \tag{5}$$

Когда $n \to \infty$, тогда $\alpha'_n \to 0$, $g_{\delta'_n} \to g$, и мы получим

$$B^+f_{\delta'_n, \alpha'_n} \to g, \quad f_{\delta'_n, \alpha'_n} \to \tilde{f}$$

(см. [3]). Значит, $\|f_{\delta'_n, \alpha'_n}-f_{\delta'_m, \alpha'_m}\|_{H^+} \to 0$. Но

$$\|f_{\delta'_n, \alpha'_n}-f_{\delta'_m, \alpha'_m}\|_{H^+}=\|f_{\delta'_n, \alpha'_n}-f_{\delta'_m, \alpha'_m}\|_H \to 0.$$

Значит, $f_{\delta'_n, \alpha'_n}$ сходится в $H$ и поэтому $\tilde{f} \in H$. Из уравнения (3), когда $n \to \infty$, получим $Af_{\delta'_n, \alpha'_n} \to g$, $f_{\delta'_n, \alpha'_n} \to \tilde{f}$. Так как оператор $A$ замкнут, то $f \in D_A$ и $A\tilde{f} = g$, и должно быть $\|\tilde{f}\| \geqslant \|f^*\|$. Поэтому $\|f^*\| = \|f\|$. Но нормальное решение единственно и поэтому $f^* = f$. В частном случае, когда $B^+$ существует в пространстве $H$ (т.е. $H^+ = H$), нормальные решения уравнений (1) и (4) совпадают.

3. Рассмотрим уравнения

$$Af = g \tag{1}$$

и

$$(A_{\delta_n} + i\alpha_n I) f = g_{\delta_n}. \tag{2}$$

Пусть уравнение (2) имеет решение $f_{\delta_n, \alpha_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Оно будет единственно и будет удовлетворено равенство

$$(A_{\delta_n} + i\alpha_n I) f_{\delta_n, \alpha_n} = g_{\delta_n}. \tag{6}$$

Заменим $A_{\delta_n}$ через $A + \delta_n A$ и после переобразования получим:

$$(A + i\alpha_n I) f_{\delta_n, \alpha_n} = g_{\delta_n} + (A - A_{\delta_n}) f_{\delta_n, \alpha_n}.$$

Составим уравнение

$$(A + i\alpha_n I) f = g_{\delta_n} + (A - A_{\delta_n}) f_{\delta_n, \alpha_n}. \tag{7}$$

Оно имеет решение $f_{\delta_n, \alpha_n}$, и решение единственно. Оператор $(A + i\alpha_n I)^{-1}$ существует в точке $g_{\delta_n} + (A - A_{\delta_n}) f_{\delta_n, \alpha_n}$ и ограничен в своей области определения. Из (7) получим:

$$f_{\delta_n, \alpha_n} = (A + i\alpha_n I)^{-1} \left( g_{\delta_n} + (A - A_{\delta_n}) f_{\delta_n, \alpha_n} \right). \tag{8}$$

Совсем аналогично, подставляя в уравнение (1) его нормальное решение $f^*$ и прибавляя к обеим сторонам полученного уравнения по $i\alpha_n f^*$, получим:

$$Af^* + i\alpha_n f^* = g + i\alpha_n f^*,$$

$$(A + i\alpha_n I) f^* = g + i\alpha_n f^*,$$

$$f^* = (A + i\alpha_n I)^{-1} (g + i\alpha_n f^*). \tag{9}$$

Вычитая (9) из (8), получим:

$$f_{\delta_n, \alpha_n} - f^* = (A + i\alpha_n I)^{-1} \left( g_{\delta_n} - g + (A - A_{\delta_n}) f_{\delta_n, \alpha_n} - i\alpha_n f^* \right).$$

Отсюда совсем так же, как в работе [3], получим:

$$\|f_{\delta_n, \alpha_n} - f^*\| \leqslant \delta_n \|(A + i\alpha_n I)^{-1}\| (1 + \|f_{\delta_n, \bar{\alpha}_n}\|) + \alpha_n \|(A + i\alpha_n I)^{-1} f^*\|. \tag{10}$$

Пусть самосопряженное расширение $B^+$ оператора $A$ существует только с выходом из пространства $H$ в $H^+$; тогда, если $f$ удовлетворяет уравнению

$$Af + i\alpha_n f = \tilde{g},$$

то оно тем более будет удовлетворять уравнению

$$B^+ f + i\alpha_n f = \tilde{g}.$$

Тогда

$$f=(A+i\alpha_n I)^{-1}\tilde{g}=(B^+ +i\alpha_n I)^{-1}\tilde{g},\ f,\ \tilde{g}\in H.$$

Из (10) получим:

$$\|f_{\delta_n,\alpha_n}-f^*\|\leqslant\delta_n\|(B^+ +i\alpha_n I)^{-1}\|(1+\|f_{\delta_n,\alpha_n}\|)+\alpha_n\|(B^+ +i\alpha_n I)^{-1}f^*\|.$$

Мы получили совсем такое же неравенство, как в работе [3], где доказано, что правая часть всегда сходится к нулю, как только $\alpha_n$, $\delta_n\to 0$, $\alpha_n=\alpha_n(\delta_n)$ и $\delta_n=o(\alpha_n)$ (если $f^*$ – нормальное решение не только уравнения (1), но и уравнения (4)).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть $A$ – линейный, замкнутый и неограниченный симметрический оператор, область определения которого плотна в гильбертовом пространстве $H$, и пусть не существует обратного ограниченного оператора $A^{-1}$, но существует хотя бы одно решение уравнения*

$$Af=g. \tag{1}$$

*Тогда, если только существуют решения $f_{\delta_n,\alpha_n}$ уравнений*

$$(A_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n} \tag{2}$$

и

$$(A+i\alpha'_n I)f=g_{\delta'_n}, \tag{3}$$

*где $\delta_n$, $\alpha_n>0$, $\alpha'_n$, $\delta'_n>0$, $\alpha_n=\alpha_n(\delta_n)$, $\alpha'_n=\alpha'_n(\delta'_n)$ и $A_{\delta_n}=A+\delta_n A$, $\delta_n A$ – ограниченный симметрический оператор в $H$, $\|\delta_n A\|\leqslant\delta_n$, $g_{\delta_n}$, $g_{\delta'_n}\in H$, $\|g_{\delta_n}-g\|\leqslant\delta_n$, $\|g_{\delta'_n}-g\|\leqslant\delta'_n$, то они единственны и, кроме того, как только $\delta_n$, $\alpha_n\to 0$, $\delta_n=o(\alpha_n)$, то решение уравнения (2) сходится к нормальному решению уравнения (1).*

Норма $\|f_{\delta_n,\alpha_n}-f^*\|$ оценивается также, как и в работе [3].

**Примечание.** Условие, чтобы уравнение (3) имело решения, нужно только для того, чтобы нормальные решения уравнений (1) и (2) совпадали.

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
2.III.1970

Литература

1. М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, Сиб. отд. АН СССР, 1962.
2. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., „Наука", 1966.
3. В. П. Кабайла, Некорректные задачи в гильбертовом пространстве для линейных уравнений с неограниченными линейными операторами, Liet. matem. rink., VII, № 3 (1967), 413–422.
4. Б. С. Надъ, Продолжение операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства, Сб. переводов „Математика", 9 : 6, 1965.
5. Ф. Рисс, Б. С. Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, М. Физматгиз, V, 1959.

**NEKOREKTIŠKO UŽDAVINIO SU TIESINIU NEAPRĖŽTU SIMETRINIU OPERATORIUMI TIESINĖMS LYGTIMS HILBERTO ERDVĖJE SPRENDIMAS**

B. Kuneikaitė

(*Reziumė*)

Straipsnyje nagrinėjamos lygtys

$$Af=g, \tag{1}$$

$$(A_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n}, \tag{2}$$

$$(A+i\alpha_n' I)f=g_{\delta_n'}, \tag{3}$$

kuriose $A$ – tiesinis simetrinis neaprėžtas operatorius Hilberto erdvėje $H$, $A_{\delta_n}=A+\delta_n A$, $\delta_n A$ – aprėžti simetriniai operatoriai erdvėje $H$, $\|\delta_n A\|\leqslant\delta_n$, $g\in H$, $g_{\delta_n}\in H$, $\|g-g_{\delta_n}\|\leqslant\delta_n$, $\delta_n,\alpha_n>0$. Įrodoma, kad (2) lygties sprendiniai $f_{\delta_n},_{\alpha_n}$ konverguoja į normalinį (1) lygties sprendinį $f^*$ (t. y. į sprendinį su mažiausia norma), kai $\delta_n$, $\alpha_n\to 0$ ir $\delta_n=o(\alpha_n)$ ir kai (2) ir (3) lygtys turi bent po vieną sprendinį.

**NICHT KORREKTE AUFGABEN IN DEM HILBERTSCHEN RAUME FÜR LINEARE GLEICHUNGEN MIT NICHT BESCHRÄNKTEN LINEAREN OPERATOREN**

B. Kuneikaitė

(*Zusammenfassung*)

In der Arbeit untersucht man die Gleichungen

$$Uf=g, \tag{1}$$

$$(U_{\delta_n}+i\alpha_n I)f=g_{\delta_n} \tag{2}$$

und

$$(U+i\alpha_n' I)f=g_{\delta_n'}, \tag{3}$$

wo $U$, $U_{\delta_n}$ lineare nicht beschränkte Operatoren in dem Hilbertschen Raum $H$ sind, $\|U_{\delta_n}-U\|\leqslant\delta_n$, $g$, $g_{\delta_n}\in H$, $\|g-g_{\delta_n}\|\leqslant\delta_n$, $\delta_n$, $\alpha_n>0$. Der Autor beweist, daß die Lösung $f\delta_n$, $\alpha_n$ der Gleichung (2) zu der normalen Lösung (d. h. zu der Lösung mit der minimalen Norm) der Gleichung (1) konvergiert, wenn $\alpha_n$, $\delta_n\to 0$, $\delta_n=o(\alpha_n)$ und die Gleichungen (2) und (3) eine oder mehrere Lösungen haben.