XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

1971

УДК 519.21

О ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

А. Бикялис

Сделаем несколько заметок о необходимых и достаточных условиях И. А. Ибрагимова ([1] стр., 127, [2], [3]) для оценки остаточного члена в предельных теоремах для сумм $S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Предположим, что случайная величина ξ_1 с функцией распределения $F(x)$ имеет равные нулю математическое ожидание и дисперсию $D\xi_1=1$.

Пусть далее $\Phi(x)$ – функция распределения нормального закона с параметрами $(0; 1)$; $F_n(x)$ – функция распределения суммы S_n.

Ниже доказанные теоремы пополняют аналогичные исследования И. А. Ибрагимова [2, 3], а также будут использованы для вывода необходимых и достаточных условий для оценки остаточного члена в многомерных предельных теоремах (см. [4]).

Теорема 1. *Для того, чтобы при $n\to\infty$ имело место соотношение*

$$(1+|x|)^{2+\delta}|F_n(x)-\Phi(x)|=O(n^{-\frac{\delta}{2}})$$

для какого-нибудь δ $(0<\delta<1)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$1)\quad \int\limits_{|x|>z} x^2\,dF(x)=O(z^{-\delta}),\quad z\to\infty.$$

Отметим, что случай $\delta=1$ требует больших вычислений, поэтому здесь его не рассматриваем.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия 1) вытекает из теоремы 3.4.1 книги [1], стр. 127.

Достаточность. При выполнении условий теоремы 1 имеем (см. [5])

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^3\sqrt{n}}\int\limits_0^{(1+|x|)\sqrt{n}}\int\limits_{|u|>v}u^2\,dF(u)\,dv. \tag{2}$$

Здесь C – абсолютная константа. Так как $0<\delta<1$, то из (2) непосредственно следует (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение*

$$\sup_{A \in \mathfrak{N}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| = O(n^{-\frac{\delta}{2}}) \tag{3}$$

для какого-нибудь δ $(0 < \delta \leqslant 1)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *соотношение* (3) *имеет место для функций распределения, то есть*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = O(n^{-\frac{\delta}{2}}).$$

2) *существует номер n_0, такой, что функция распределения $F_{n_0}(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.*

Здесь $P\{\ldots\}$ — вероятность события, указанного в скобках; η — случайная величина с функцией распределения $\Phi(x)$; $\mathfrak{N}$ — класс борелевских множеств в $(-\infty, +\infty)$.

Легко заметить, что в случае $0 < \delta < 1$ условие 1) можно заменить условием 1) теоремы 1. В случае $\delta = 1$ вместо условия 1) теоремы 2 следует брать условие 1) с $\delta = 1$ теоремы 1 и

$$\int_{-z}^{z} x^3 \, dF(x) = O(1), \quad z \to \infty.$$

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия 2) дает следующая теорема Ю. В. Прохорова [1], стр. 159:

Для того чтобы при $n \to \infty$ имело место соотношение

$$\sup_{A \in \mathfrak{N}} |P\{S_n \in A\} - P\{\eta \in A\}| \to 0,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$;

2) выполнено условие 2) теоремы 2.

Необходимость условия 2) очевидна.

Достаточность условий 1) и 2) подробно не будем доказывать. Только заметим, что можно использовать на уровне $\sqrt{n}$ усеченные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Другие приемы можно легко восстановить с помощью доказательства теоремы 3 работы [6].

Теорема 3. *Для того, чтобы при $n \to \infty$ равномерно по x*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

необходимо, а для нерешетчатых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $$\int_{|x| > z} x^2 \, dF(x) = o(z), \quad z \to \infty,$$

и

2) $$\lim_{z \to \infty} \int_{-z}^{z} x^3 \, dF(x) = \alpha_3.$$

Необходимость условий 1) и 2) доказал И. А. Ибрагимов в [3].

Достаточность доказывается известными методами (см., например, [1], стр. 117). Поэтому это доказательство опускаем.

Пусть далее $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — решетчатые случайные величины, то есть они принимают значения лишь из арифметической прогрессии $\{a+kh\}$ с разностью h. Для них справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Для того, чтобы при $n\to\infty$ равномерно по x*

$$F_n(x)=\Phi(x)+\frac{\alpha_3(1-x^2)}{6\sigma^3\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{h}{\sigma}S\left(\frac{\sigma x\sqrt{n}-an}{h}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (4)$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение четырех условий:

1) $M\xi_1=0$ *и* $D\xi_1=\sigma^2$;

2) *выполнено условие* 1) *теоремы* 3;

3) *выполнено условие* 2) *теоремы* 3;

4) *шаг распределения h случайной величины ξ_1 максимален. Здесь $F_n(x)$ — функция распределения суммы* $S_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\xi_j$.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, что достаточно условий 1—4 для вывода формулы (4) (см. [1], стр. 121, и [3]).

Необходимость. Для доказательства необходимости условий 1—3 мы использовали методику работы [3]. Поскольку

$$F_n\left(\frac{an+\nu_1 h}{\sigma\sqrt{n}}\right)-F_n\left(\frac{an+\nu_2 h}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\sum_{\nu_1\leqslant\nu<\nu_2}P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=an+\nu h\},$$

то из (4) вытекает, что

$$P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=an+\nu h\}=\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{(an+\nu h)^2}{2n\sigma^2}\right\}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Теперь, используя теорему 4.2.1. из [1], стр. 149, получаем, что h — максимальный шаг распределения случайной величины ξ_1.

Теорема 5. *Для того, чтобы при $n\to\infty$*

$$\sum_{\nu}\left|P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=an+\nu h\}-\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{(an+\nu h)^2}{2n\sigma^2}\right\}\right|=O(n^{-\frac{\delta}{2}})$$

для какого-нибудь δ $(0<\delta\leqslant 1)$, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:

1) $\sup\limits_x|F_n(x)-\Phi(x)|=O(n^{-\frac{\delta}{2}}), \qquad n\to\infty,$

2) *h — максимальный шаг распределения.*

Доказательство. Необходимость условия 2) вытекает из следующей теоремы Ю. В. Прохорова ([1], стр. 152):

Для того, чтобы при $n\to\infty$

$$\sum_{\nu}\left|P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=an+\nu h\}-\frac{h}{\sigma\sqrt{n}}\exp\left\{-\frac{(an+\nu h)^2}{2n\sigma^2}\right\}\right|\to 0,$$

необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий:

1) $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$;

2) h – максимальный шаг распределения.

Достаточность легко показать известными методами (см., например, [7]), только заметим, что из условия 1) следует соотношение

$$\left| \left(f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right)' \right| \leqslant \frac{C|t|}{n^{\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

для всех $t \in [-d\sqrt{n};\ +d\sqrt{n}]$, где d – достаточно малое положительное число и C не зависит от n и t (см. [2]).

Вильнюсский Государственный университет
им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
17.III.1970

Литература

1. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные случайные величины, М., „Наука“, 1965.
2. И. А. Ибрагимов, О точности аппроксимации функций распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теор. вер. и ее прим., 10, вып. 4 (1966), 632–655.
3. И. А. Ибрагимов, Об асимптотических расложениях Чебышева—Крамера, Теор. вер. и ее прим., **XII**, вып. 3 (1967), 506–519.
4. А. Бикялис, О необходимых и достаточных условиях для оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., **XI**, № 2 (1971), 193.
5. А. Бикялис, Оценка остаточного члена в центральной предельной теореме, Лит. матем. сб., **VI**, № 3 (1966), 323–346.
6. А. Бикялис, Асимптотические разложения для плотностей и распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов, Лит. матем. сб., **VIII**, № 3 (1968), 405–422.
7. М. Маматов, О локальной теореме для решетчатого случая, Изв. АН УзССР, сер. физ. мат., № 1 (1961).

APIE NEPRIKLAUSOMŲ VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ PASISKIRSTYMO APROKSIMAVIMO NORMALINIU PASISKIRSTYMU TIKSLUMĄ

A. Bikelis

(*Reziumė*)

Įrodyta, kad Ibragimovo (žr. [2]) sąlygos yra būtinos ir pakankamos netolygaus konvergavimo greičiui įvertinti centrinėje ribinėje teoremoje.

ON THE ACCURACY OF GAUSSIAN APPROXIMATION IN TO THE DISTRIBUTION OF SUM OF INDEPENDENT IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES

A. Bikelis

(*Summary*)

It has been proved that I. Ibragimov conditions are sufficient and necessary in the estimation of non-uniform convergence rate in the central limit theorem.