XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1971

УДК 517·948+512·13

О ПЕРИОДИЧНОСТИ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

А. Б. Шапуров

Зафиксируем произвольно число T (число T, как и все другие встречаемые в заметке величины предполагаются действительными) и обозначим через $K=K(T)$ класс функций, содержащий

1) все линейные функции $y=\lambda x+c$;
2) все непрерывные периодические функции;
3) все функции вида

$$g(x)=\lambda x+\varphi(x),$$

где $\lambda\neq 0$ — постоянное и $\varphi(x)$ — непрерывная на всей оси функция, имеющая период, равный целому кратному от $T:\lambda$.

Если $y=f(u)$ имеет период T и функция $u=g(x)$ принадлежит классу K, то, очевидно, и сложная функция $y=f(g(x))$ тоже является периодической.

Возникает вопрос: *может ли функция $y=f(g(x))$ оказаться периодической, если $y=f(u)$ имеет период T и непрерывная функция $u=g(x)$ не принадлежит классу K.*

1. Условимся говорить, что точка u_0 является правильной точкой экстремума для функции $f(u)$, если эта функция в точке u_0 имеет экстремум и существует положительное число δ такое, что функция $f(u)$ строго монотонна в интервалах $u_0-\delta<u<u_0$ и $u_0<u<u_0+\delta$.

Теорема 1. *Если непрерывная функция $y=f(u)$ имеет хотя бы одну правильную точку экстремума, то существует непрерывная на всей оси функция $u=g(x)$ такая, что сложная функция $y=f(g(x))$ является периодической, хотя функция $u=g(x)$ не принадлежит классу K.*

Доказательство. Пусть $u=c$ — правильная точка экстремума функции $f(u)$. Зафиксируем числа a и b, $a<c<b$, так, чтобы $f(a)=f(b)$ и функция $f(u)$ была строго монотонна в интервалах (a, c) и (c, b). На отрезке $[a, c]$ определим функцию $u''=\Gamma(u')$ следующими условиями:

$$a\leqslant u'\leqslant c,\quad c\leqslant u''\leqslant b \quad \text{и} \quad f(u'')\equiv f(u').$$

Очевидно, эта функция устанавливает взаимно-однозначное и непрерывное отображение отрезка $[a, c]$ на отрезок $[c, b]$ и

$$f(\Gamma(u))\equiv f(u) \quad \text{при } a\leqslant u\leqslant c. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную четную непрерывную функцию $u=H(x)$, имеющую период $c-a$ и удовлетворяющую условиям:

$$H(0)=a, \quad H\left(\frac{c-a}{2}\right)=c \quad \text{и} \quad a \leqslant H(x) \leqslant c$$

для всех действительных x. Множество всех отрезков A_n:

$$n(c-a)-\frac{c-a}{2} \leqslant x \leqslant n(c-a)+\frac{c-a}{2}, \quad n=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

разобъем произвольным образом на два подмножества P_1 и P_2 и определим функцию

$$g(x)=\begin{cases} H(x) \text{ на отрезках множества } P_1, \\ \Gamma(H(x)) \text{ на отрезках множества } P_2. \end{cases} \tag{2}$$

Из свойств функций $H(x)$ и $\Gamma(u)$ легко видно, что функция $g(x)$ является непрерывной на всей оси и $a \leqslant g(x) \leqslant b$. Следовательно, функция $g(x)$ — ограничена и поэтому она не является ни линейной функцией, ни суммой линейной функции и периодической. Кроме того, разбиение множества отрезков A_n можно произвести так, чтобы функция $g(x)$ не была периодической. Значит, функция $g(x)$ не принадлежит классу K. В то же время, сложная функция $y=f(g(x))$ имеет период $c-a$. В самом деле, из (1) следует

$$f(H(x)) \equiv f\Big(\Gamma\big(H(x)\big)\Big).$$

Поэтому (см. (2)) $f(g(x)) \equiv f(H(x))$, а функция $H(x)$ имеет период $c-a$.

Замечание 1. В приведенном доказательстве можно взять

$$H(x)=a+\beta e^{-\frac{1}{(x^2-\alpha^2)^2}},$$

где

$$\alpha=\frac{c-a}{2}, \quad \beta=ae^{\frac{1}{\alpha^4}}.$$

Эта функция на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ имеет непрерывные производные всех порядков, причем в точках $-\alpha$ и α все производные равны нулю.

Если функция $\Gamma(u)$ имеет на отрезке $[a, c]$ непрерывные производные всех порядков (так, например, будет, если функция $f(u)$ симметрична относительно прямой $u=c$, ибо тогда $\Gamma(u)=2c-u$), то функция $g(x)$ (см. (2)) тоже имеет непрерывные производные всех порядков на всей действительной оси.

2. Из доказанной теоремы видно, что *из условий*:

I $f(u)$ — *непрерывная ни на каком отрезке не постоянная функция с периодом* T,

II $g(x)$ — *непрерывная или даже бесконечно дифференцируемая функция*,

III $f(g(x))$ — *периодическая функция*,

еще не следует, что функция $g(x)$ *принадлежит классу* K.

В следующих двух теоремах покажем, что, изменив надлежащим образом условие (II) и сохранив при этом условия (I) и (III), можно будет утверждать, что функция $g(x)$ принадлежит классу K.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (I), (III) *и* (*IV*) *функция* $g(x)$ *непрерывна и строго монотонна на всей оси, то* $g(x)$ *принадлежит классу* K.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (I), (III) *и* (*V*) *функция* $g(x)$ *аналитична на всей оси, то* $g(x)$ *принадлежит классу* K.

Для доказательства этих теорем нам потребуются две леммы. Но прежде введем понятие квазимонотонности.

Условимся функцию $\varphi(x)$ называть квазимонотонной на отрезке $[\alpha, \beta]$, если любое значение функции $\varphi(x)$ на интервале (α, β) не равно ни $\varphi(\alpha)$, ни $\varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$, и строго заключено между $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$.

Покажем, что для любой непрерывной функции $\varphi(x) \not\equiv c$ найдется хотя бы один промежуток $[\alpha, \beta]$, на котором функция $\varphi(x)$ является квазимонотонной.

В самом деле, пусть $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$ и $y_1 \neq y_2$.
В промежутке $[x_1, x_2]$ выберем ближайшую к x_2 точку α, в которой $\varphi(\alpha) = y_1$. Такая точка, очевидно, существует из-за непрерывности функции $\varphi(x)$.

Аналогично, в промежутке $[\alpha, x_2]$ выберем ближайшую к α точку β такую, чтобы $\varphi(\beta) = y_2$. Функция $\varphi(x)$ является квазимонотонной на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Лемма 1. *Пусть* $g(x)$ — *непрерывная на всей прямой функция и выполнены условия* (I) *и* (III). *Если* τ — *период функции* $f(g(x))$, *то найдется точка* x_0 *и сколь угодно много различных целых чисел* n_l *и* m_l *таких, что*

$$g(x_0 + n_l \tau) - g(x_0) = m_l \cdot T. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $[x_1, x_2]$ — отрезок квазимонотонности функции $f(g(x))$ и

$$f(g(x_1)) = y_1, \quad f(g(x_2)) = y_2, \quad y_1 \neq y_2. \tag{4}$$

Так как τ — период функции $f(g(x))$, то и отрезки

$$[x_1 + n\tau, x_2 + n \cdot \tau], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

тоже являются отрезками квазимонотонности функции $f(g(x))$. Они же будут отрезками квазимонотонности для функции $g(x)$. Так как функция $g(x)$ — непрерывна, то отрезки с концами α_n и β_n (мы их будем обозначать $[\alpha_n, \beta_n]$, хотя возможно, что $\alpha_n > \beta_n$), где

$$\alpha_n = g(x_1 + n \cdot \tau), \quad \beta_n = g(x_2 + n \cdot \tau), \tag{5}$$

являются отрезками квазимонотонности для функции $f(u)$ и (см. (4))

$$f(\alpha_n) = y_1, \quad f(\beta_n) = y_2, \quad y_1 \neq y_2. \tag{6}$$

Напомним, что по условию (*I*) T — период функции $f(u)$, и поэтому длина отрезка квазимонотонности $[\alpha_n, \beta_n]$ меньше T.

Условимся называть множество точек M' оси u эквивалентным множеству точек M той же оси, если M' можно получить из M сдвигом на $k \cdot T$, где k — произвольное целое число, одно и то же для всех точек множества M.

Обозначим через $[\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n]$ отрезок, эквивалентный отрезку $[\alpha_n, \beta_n]$ и удовлетворяющий условию

$$0 \leqslant \min(\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n) < T.$$

Таким образом, отрезок $[\alpha_n, \beta_n)$ целиком помещается на промежутке $[0, 2 \cdot T]$ и из (6) следует, что

$$f(\bar{\alpha}_n) = y_1, \; f(\bar{\beta}_n) = y_2, \; y_1 \neq y_2. \tag{7}$$

В силу периодичности функция $f(u)$ является квазимонотонной и на отрезках $[\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n]$. Поэтому два отрезка $[\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n]$ и $[\bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m]$ или совпадают или не имеют общих внутренних точек.

Заметим, что длина этих отрезков $|\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n|$ ограничена снизу положительным числом. Это легко показать рассуждением от противного, если принять во внимание, что по (7)

$$|f(\bar{\alpha}_n) - f(\bar{\beta}_n)| = |y_1 - y_2| > 0$$

и функция $f(u)$ равномерно непрерывна.

Обозначим

$$\inf_n |\bar{\alpha}_n - \bar{\beta}_n| = \delta > 0.$$

Тогда число различных отрезков $[\bar{\alpha}_n, \bar{\beta}_n]$ не больше $\frac{2T}{\delta}$. Значит бесконечно много таких отрезков $[\bar{\alpha}_{n_l}, \bar{\beta}_{n_l}]$ совпадает и по (7)

$$\bar{\alpha}_{n_l} = \bar{\alpha}_{n_1} \text{ при } l = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

В самом деле, если бы для некоторого l было бы $\bar{\alpha}_{n_l} = \bar{\beta}_{n_1}$, то

$$y_1 = f(\bar{\alpha}_{n_l}) = f(\bar{\beta}_{n_1}) = y_2,$$

что невозможно.

Из (5) следует, что если $\alpha_{n_1} < \beta_{n_1}$ $(\alpha_{n_1} > \beta_{n_1})$, то и

$$\alpha_{n_l} < \beta_{n_l} \; (\alpha_{n_l} > \beta_{n_l}) \quad \text{при} \quad l = 2, 3, 4, \ldots$$

Из (8) следует, что $\alpha_{n_l} = \alpha_{n_1} + m_l \cdot T$, и по (5) имеем

$$g(x_0 + n_l \cdot \tau) - g(x_0) = m_l \cdot T,$$

где

$$x_0 = x_1 + n_l \cdot \tau.$$

Лемма 2. *Пусть $f(u)$ — непрерывная на всей оси функция, не равная тождественно постоянной ни на одном отрезке, а $g(x)$ и $h(x)$ — две непрерывные строго монотонные в одном и том же смысле ($g(x)$ и $h(x)$ или обе возрастают, или обе убывают) на отрезке $[a, b]$ функции, удовлетворяющие условию*

$$g(x_0) = h(x_0), \tag{9}$$

где x_0 — некоторая точка из отрезка $[a, b]$.

Если на отрезке $[a, b]$ выполнено тождество

$$f(g(x)) \equiv f(h(x)), \tag{10}$$

то

$$g(x) \equiv h(x) \text{ при } a<x<b. \tag{11}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что (11) неверно, то есть что

$$g(x_1) \neq h(x_1) \text{ в некоторой точке } x_1 \neq x_0, \tag{12}$$

Пусть для определенности функции $g(x)$ и $h(x)$ — возрастающие и

$$g(x_1) > h(x_1) \text{ и } x_1 > x_0. \tag{13}$$

Обозначим через $x=g^{-1}(u)$ функцию, обратную для $u=g(x)$ и положим

$$x_2=g^{-1}\big(h(x_1)\big),\ x_3=g^{-1}\big(h(x_2)\big),\ \ldots,\ x_n=g^{-1}\big(h(x_{n-1})\big),\ \ldots$$

По определению числа x_2 имеем

$$g(x_2)=h(x_1),\ \ldots,\ g(x_{n+1})=h(x_n),\ \ldots \tag{14}$$

Пользуясь этими равенствами, легко дать геометрическое построение точек x_n. Обозначим через H и G графики функций $u=h(x)$ и $u=g(x)$. Из точки $\big(x_1, h(x_1)\big)$ кривой H проводим прямую, параллельную к оси x до пересечения с кривой G в точке $\big(x_2, g(x_2)\big)$. Из последней точки проводим прямую, параллельную к оси u до пересечения с кривой H в точке $\big(x_2, h(x_2)\big)$, из этой точки — прямую, параллельную к оси x до пересечения с кривой G в точке $\big(x_3, g(x_3)\big)$ и так далее.

Так как $x_1>x_0$ и функция $h(x)$ монотонно возрастающая, то

$$h(x_1)>h(x_0)$$

и, как следует из (9), (13) и (14),

$$g(x_0)<g(x_2)<g(x_1).$$

Из монотонности функции $g(x)$ получим

$$x_0<x_2<x_1.$$

Кроме того (см. (14)), $g(x_2)>h(x_2)$ и

$$g(x)>h(x) \text{ при } x_2<x<x_1. \tag{15}$$

Аналогично доказываем, что $x_0<x_3<x_2$ и так далее.

Таким образом, последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ монотонно убывает и ограничена снизу числом x_0. Значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \geqslant x_0.$$

Из (10) и (14) получаем

$$f\big(h(x_n)\big)=f\big(g(x_n)\big)=f\big(h(x_{n-1})\big)=f\big(g(x_{n-1})\big)= \ldots =f\big(h(x_1)\big)=$$
$$=f\big(g(x_1)\big).$$

Переходя к пределу в этих равенствах при $n\to\infty$, получим

$$f\big(h(c)\big)=f\big(g(c)\big)=f\big(g(x_1)\big). \tag{16}$$

Возьмем теперь произвольную точку x'_1 из отрезка $[x_2, x_1]$ такую, что

$$f\big(g(x'_1)\big) \neq f\big(g(x_1)\big). \tag{17}$$

Существование такой точки следует из условий леммы. Исходя из точки x'_1 образуем последовательность

$$x'_2 = g^{-1}\big(h(x'_1)\big),\quad x'_3 = g^{-1}\big(h(x'_2)\big) \quad \text{и так дальше.}$$

Повторив рассуждения, приведенные при рассмотрении последовательности $\{x_n\}$, убедимся, что

$$x_1 > x'_1 > x_2 > x'_2 > x_3 > \dots$$

и

$$f\big(g(x'_n)\big) = f\big(g(x'_1)\big), \quad n = 1,\ 2,\ \dots$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

и

$$f\big(g(c)\big) = f\big(g(x'_1)\big).$$

Но это несовместимо с (16) и (17). Значит, допущение (12) было неверным, и для всех $a \leqslant x \leqslant b$ выполняется (11).

Доказательство теоремы 2. По лемме 1 имеется точка x_0 и пара целых чисел m и k, $k \neq 0$, таких, что выполняется равенство

$$g(x_0 + k\cdot\tau) - g(x_0) = m\cdot T.$$

Обозначим

$$h(x) = g(x + k\tau) - m\cdot T.$$

Тогда $h(x_0) = g(x_0)$ и в силу периодичности функций $f(x)$ и $f\big(g(x)\big)$

$$f\big(h(x)\big) \equiv f\big(g(x)\big), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы 2. Значит $h(x) \equiv g(x)$ или

$$g(x + k\cdot\tau) - m\cdot T \equiv g(x). \tag{18}$$

Подставим в это тождество

$$g(x) = \varphi(x) + \frac{m\cdot T}{k\cdot\tau}\, x.$$

Получим

$$\varphi(x + k\cdot\tau) \equiv \varphi(x).$$

Следовательно, функция $g(x)$ принадлежит классу K.

Доказательство теоремы 3. По лемме 1 имеются число X_0 и две пары целых чисел (n_1, m_1) и (n_2, m_2) такие, что $n_1 \neq n_2$ и

$$g(x_0 + n_1\cdot\tau) - g(x_0) = m_1\cdot T,$$

$$g(x_0 + n_2\cdot\tau) - g(x_0) = m_2\cdot T.$$

Так как функция $g(x)$ аналитична на всей прямой, то при условии $g(x) \not\equiv c$ имеется такое число $\varepsilon > 0$, что функция $g(x)$ строго монотонна на каждом из трех отрезков

$$[x_0,\ x_0+\varepsilon],\ [x_0+n_1\tau,\ x_0+n_1\tau+\varepsilon],\ [x_0+n_2\tau,\ x_0+n_2\tau+\varepsilon].$$

Хотя бы на двух из этих трех отрезков (скажем, на отрезках $[x_0, x_0+\varepsilon]$ и $[x_0+n_1\tau, x_0+n_1\tau+\varepsilon]$) функция $g(x)$ монотонна в одном и том же смысле. Значит, функции $h(x) = g(x+n_1\tau) - m_1 T$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+\varepsilon]$ монотонны в том же смысле и по лемме 2 на этом отрезке

$$g(x) \equiv h(x) \equiv g(x+n_1\tau) - m_1 \cdot T.$$

Из аналитичности функции $g(x)$ следует, что это тождество выполняется на всей прямой. Доказательство теоремы 3 заканчиваем тем же способом, что и доказательство теоремы 2.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
17.X.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворожцов Н. Н. мл., Куткевичус С. И., ЖОХ, 28, 2682 (1958).
2. Куткевичус С. И., Шеренас К. С., ХГС, 1970.
3. Шеренас К., Куткевичус С., Материалы юбилейной республиканской XX научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, Каунас, 1970, 112.
4. Куткевичус С. И., Шеренас К. С., ХГС (в печати).

SUDĖTINĖS FUNKCIJOS PERIODIŠKUMO KLAUSIMU

A. Šapurovas

(*Reziumė*)

Darbe įrodyta teorema.

Sakykime $f(u)$ *yra tolydinė periodinė funkcija, kuri nėra tapatingai lygi konstantai nė vienoje atkarpoje, ir* $g(x)$ *— tolydinė, griežtai monotoninė arba analizinė funkcija. Jei ir sudėtinė funkcija* $f(g(x))$ *yra periodinė, tai* $g(x)$ *yra tiesinės ir periodinės funkcijos suma.*

Be to, darbe parodyta, kad egzistuoja funkcijos $f(u)$ ir $g(x)$, turinčios šias savybes:

1) $f(u)$ yra analizinė ir periodinė;
2) $g(x)$ — be galo diferencijuojama;
3) $f(g(x))$ — periodinė;
4) $g(x)$ nėra tiesinės ir periodinės funkcijų suma.

ON THE PERIODICITY OF COMPOSITE FUNCTION

A. Šapurovas

(*Summary*)

In this note the following theorem is proved.

Let $f(u)$ be an arbitrary continuous periodic function, non-constant on any segment, and $g(x)$ a continuous strictly monotonic or analytic function. If $f\big(g(x)\big)$ is periodic, then $g(x)$ is the sum of a linear and a periodic function.

On the other hand, there exist an analytic periodic function $f(u)$, and an infinitely differentiable function $g(x)$, such that $f\big(g(x)\big)$ is periodic, but $g(x)$ cannot be expressed as a sum of a linear and a periodic function.