XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1971

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ СУММ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СТУПЕНЧАТЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. Фрайер

В теории массового обслуживания и в теории восставовления часто встречаются потоки событий, являющиеся суммами большого числа независимых потоков малой интенсивности. Например, поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, можно представить как сумму потоков вызовов отдельных абонентов. Число абонентов велико и интенсивность вызовов от каждого из них мала по сравнению с суммарной и поэтому многие авторы исследовали предельное поведение такого рода сумм. Оказалось, что суммарные потоки приближаются при определенных условиях, найденных первоначально Пальмом и Хинчиным, а затем обобщенных Григелионисом [1], к пуассоновскому потоку. Этот факт объясняет хорошее согласование опытных данных о многих практически важных потоках с гипотезой о пуассоновости потока.

В этой работе рассматриваются суммы случайного числа ν независимых потоков событий. Такая ситуация встречается в ряде физических, инженерных и иных практически важных задач. Приведем несколько примеров.

Рассматриваем поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, который состоит из потоков вызовов отдельных абонентов с исправными аппаратами. Естественно предполагать, что число исправных аппаратов случайно и его распределение не зависит от времени. Тогда суммарный поток вызовов всех исправных аппаратов является суммой случайного числа ν независимых потоков малой интенсинвости.

Когда в физике имеется случайное число источников (атомы, ионы и т.д.), являющихся источниками каких-нибудь сигналов (γ — квантов, α — частиц), тогда суммарный поток всех сигналов является как раз суммой случайного числа независимых или слабо зависимых потоков.

Суммы случайного числа рекуррентных последовательностей событий уже рассмотрены Харрисом [2]. Теорема 2 этой статьи распространяет его результаты на общие ступенчатые процессы.

Определение 1. Случайный процесс $\{X(t),\ t\in[0,\ \infty)\}$ назовем ступенчатым, если приращения $X(t)-X(s)$, $(s<t)$ могут принимать только неотрицательные целочисленные значения и $X(0)=0$.

Определение 2. Ступенчатый процесс назовем пуассоновским с ведущей функцией $\Lambda(t)$, если он имеет независимые приращения и для всех $s<t$ имеет место следующая формула:

$$P\left(X(t)=k\right)=\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}\,e^{-\Lambda(t)}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\Lambda(t)$ — неотрицательная, неубывающая непрерывная слева, конечная функция, $\Lambda(t)=0$ при $t\leqslant 0$. Пусть $X_r^{(n)}(t)$ для каждого n последовательность независимых ступенчатых процессов, из которой мы образуем следующие суммарные потоки:

$$Y_k^{(n)}(t)=\sum_{r=1}^{k} X_r^{(n)}(t).$$

Говорят, что процессы $Y_{k_n}^{(n)}(t)$ сходятся при $n\to\infty$ к процессу $Y(t)$, если любые конечномерные распределения $\{Y_{k_n}^{(n)}(t_1),\ \ldots,\ Y_{k_n}^{(n)}(t_m)\}$ слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса $Y(t)$.

Обозначим

$$\Lambda_n(k,\ t)=\sum_{r=1}^{k} P\left(X_r^{(n)}(t)=1\right),$$

$$B_n(k,\ t)=\sum_{r=1}^{k} P\left(X_r^{(n)}(t)>1\right),$$

$$R_n(k,\ t)=\max_{1\leqslant r\leqslant k} P\left(X_r^{(n)}(t)>0\right).$$

Пусть в дальнейшем величины ν_n обозначают неотрицательные целочисленные случайные величины.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть существуют постоянные K_n, такие, что*

$$\frac{\nu_n}{k_n}\xrightarrow[P]{}1 \ \ (\textit{при } n\to\infty \textit{ по вероятности}), \tag{1}$$

$$\lim_{c\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left\{\sum_{|r-k_n|<ck_n} P\left(X_r^{(n)}(t)>0\right)\right\}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(k_n,\ t)=0 \tag{3}$$

для всех t. Процессы $Y_{\nu_n}^{(n)}(t)$ сходятся к пуассоновскому процессу с ведущей функцией $\Lambda(t)$ тогда и только тогда, когда имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(k_n,\ t)=\Lambda(t) \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} B_n(k_n,\ t)=0.$$

Доказательство. Из процесса $Y_k^{(n)}(t)$ образуем следующий вектор:

$$\mathfrak{H}_k^{(n)}(\mathfrak{t}):=\{Y_k^{(n)}(t_1)-Y_k^{(n)}(t_0),\ \ldots,\ Y_k^{(n)}(t_m)-Y_k^{(n)}(t_{m-1})\},$$

где $\mathfrak{f}:=(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ и $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ $(n, k=0, 1, \ldots)$. Аналогичные векторы $\mathfrak{x}_r^{(n)}(\mathfrak{f})$, $\mathfrak{Y}_{\nu_n}^{(n)}(\mathfrak{f})$ построим из процессов $X_r^{(n)}(t)$ и $Y_{\nu_n}^{(n)}(t)$, соответственно. Эти случайные векторы порождают меры

$$\mu_k^{(n)}(A)=P\left(\mathfrak{Y}_k^{(n)}(\mathfrak{f})\in A\right);$$

$$\mu_{\nu_n}^{(n)}(A)=P\left(\mathfrak{Y}_{\nu_n}^{(n)}(\mathfrak{f})\in A\right),$$

где A – борелевское множество в пространстве $R_m^+=\{x_1, \ldots, x_m: x_i \geqslant 0\}$. Пусть через $\mu(A)$ назовем соответственную меру пуассоновского процесса с ведущей функцией $\Lambda(t)$. Григелионис доказал, что при условии (3) соотношение (4) эквивалентно тому, что меры $\mu_{k_n}^{(n)}$ слабо сходятся к мере μ. Значит, достаточно доказать, что при наших условиях (1), (2), (3) из слабой сходимости мер $\mu_{k_n}^{(n)}$ к мере μ следует слабая сходимость мер $\mu_{\nu_n}^{(n)}$ к мере μ и обратно.

Докажем сначала важную лемму, которая имеет самостоятельный интерес и является обобщением одной теоремы переноса В. Рихтера [3] для последовательностей со случайным индексом. Пусть случайные элементы $Y_{k_n}^{(n)}$ и Y принимают значения в метрическом пространстве $(M, \rho, \mathfrak{B}_M)$ и порождают на борелевской алгебре $\mathfrak{B}_M$ меры $\mu_k^{(n)}$ и μ. Пусть σ_μ – алгебра непрерывных множеств меры μ, т.е. $A \in \sigma_\mu \subset \mathfrak{B}_M$ если

$$\mu(C\bar{A} \cap CA)=0,$$

где CA обозначает замыкание и $\bar{A}$ – дополнение множества A.

Лемма. *Пусть существуют числа K_n, стремящиеся к бесконечности, такие что при $n \to \infty$ по вероятности*

$$\frac{\nu_n}{k_n} \underset{p}{\to} 1 \tag{5}$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0} \limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{|k-k_n|<ck_n} \rho(Y_k^{(n)}, Y_{k_n}^{(n)}) > \varepsilon\right)=0, \tag{6}$$

тогда при $n \to \infty$ следующие соотношения эквивалентны:

$$\mu_{k_n}^{(n)} \Rightarrow \mu, \tag{7}$$

$$\mu_{\nu_n}^{(n)} \Rightarrow \mu. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $A \in \sigma_\mu$. Обозначим:

$$B:=\{\omega: Y_{k_n}^{(n)} \in A\},$$

$$\hat{B}:=\{\omega: Y_{\nu_n}^{(n)} \in A\},$$

$$C:=\{\omega: \rho(Y_{\nu_n}^{(n)}, Y_{k_n}^{(n)}) < \varepsilon\},$$

$$D:=\{\omega: \max_{|k-k_n|<ck_n} \rho(Y_k^{(n)} - Y_{k_n}^{(n)}) < \varepsilon\},$$

$$E:=\{\omega: |\nu_n - k_n| < ck_n\},$$

$$F:=E \cap C,$$

$$G:=B \cap F, \qquad \hat{G}:=\hat{B} \cap F$$

$$H:=B \cap \bar{F}, \qquad \hat{H}:=\hat{B} \cap \bar{F}$$

Из условия (5) и (6) следует, что для любых положительных чисел ε и η найдется число C, такое что

$$P(\bar{D})<\eta \text{ и } P(\bar{E})<\eta, \ \forall n>n_0,.$$

Очевидны следующие соотношения:

$$\bar{D} \cup \bar{E} \supseteq \bar{G} \cup \bar{E} = \bar{F} \supset H.$$

Поэтому

$$P(H) \leqslant P(\bar{D}) + P(\bar{E}) \leqslant 2\eta.$$

Существуют ε – окрестности $U_{\varepsilon_k}(A) \in \sigma_\mu$ множества A в метрике ρ и $\varepsilon_k \to 0$. Имеет место

$$G \subseteq F \cap \{ Y_{\nu_n}^{(n)} \in U_{\varepsilon_k}(A) \},$$

$$\hat{G} \subseteq F \cap \{ Y_{k_n}^{(n)} \in U_{\varepsilon_k}(A) \},$$

и, следовательно,

$$P(B) = P(H) + P(G) \leqslant 2\eta + P\left(Y_{\nu_n}^{(n)} \in U_{\varepsilon_k}(A) \right), \tag{*}$$

$$P(\hat{B}) = P(\hat{H}) + P(\hat{G}) \leqslant 2\eta + P\left(Y_{kn}^{(n)} \in U_{\varepsilon_k}(A) \right). \tag{**}$$

Перейдя в неравенствах (*) и (**) к пределу по n, который по условию теоремы в одном из этих случаев существует, получим

$$\limsup_{n\to\infty} P(B) \leqslant \mu\left(U_{\varepsilon_k}(A) \right) + 2\eta,$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} P(\hat{B}) \leqslant \mu\left(U_{\varepsilon_k}(A) \right) + 2\eta.$$

Так как $A \in \sigma_\mu$, то

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(U_{\varepsilon_k}(A) \right) = \mu(A).$$

Число η можно брать сколь угодно малым, поэтому верны следующие неравенства:

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y_{k_n}^{(n)} \in A) \leqslant \mu(A) \tag{9}$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} P(Y_{\nu_n}^{(n)} \in A) \leqslant \mu(A). \tag{10}$$

Неравенства (9) и (10) сохраняется, если в них A заменить на $\bar{A}$, а отсюда следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} P(Y_{k_n}^{(n)} \in A) \geqslant \mu(A),$$

$$\liminf_{n\to\infty} P(Y_{\nu_n}^{(n)} \in A) \geqslant \mu(A).$$

Лемма доказана.

Используя лемму, для доказательства теоремы достаточно показать, что условие (6) выполняется для последовательности $\mathfrak{H}_k(\mathfrak{f})$ в эвклидовом пространстве R_m^+ с обычной метрикой. Имеет место следующая оценка

$$\max_{|k-k_n|<ck_n} \|\mathfrak{H}_k^{(n)}(\mathfrak{f})-\mathfrak{H}_{k_n}^{(n)}(\mathfrak{f})\|=$$

$$=\left(\max_{|k-k_n|<ck_n}\sum_{i=1}^{m}[Y_k^{(n)}(t_i)-Y_k^{(n)}(t_{i-1})-Y_{k_n}^{(n)}(t_i)+Y_{k_n}^{(n)}(t_{i-1})]^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{|rk_n|<ck_n}\left(X_r^{(n)}(t_i)-X_r^{(n)}(t_{i-1})\right)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует соотношение (6), так как

$$P\left(\max_{|k-k_n|<ck_n}\|\mathfrak{H}_k^{(n)}(\mathfrak{f})-\mathfrak{H}_{k_n}^{(n)}(\mathfrak{f})\|>\varepsilon\right)\leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{|r-k_n|<ck_n}\left(X_r^{(n)}(t_i)-X_r^{(n)}(t_{i-1})\right)\right]^2>\varepsilon^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|r-k_n|<ck_n}P\left(X_r^{(n)}(t_m)>0\right).$$

Теорема доказана.

Пользуясь предыдущими обозначениями, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть величины ν_n не зависят от процессов $X_r^{(n)}(t)$ и пусть существуют числа K_n, такие что при $n\to\infty$*

$$P\left(\frac{\nu_n}{k_n}<x\right)\to A(x) \text{ и } k_n\to\infty. \tag{11}$$

Пусть выполняется по y равномерно для каждого конечного интервала и всех t

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(yk_n,\ t)=\Lambda(y,\ t), \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}B_n(yk_n,\ t)=0, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(yk_n,\ t)=0, \tag{14}$$

и функции $A(y)$ и $\Lambda(y,t)$ не имеют совпадающи разрывов по y.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}P(\mathfrak{H}_{\nu_n}^{(n)}(\mathfrak{f})=k)=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\prod_{q=1}^{m}e^{-[\Lambda(y,t_q)-\Lambda(y,t_{q-1})]}\frac{[\Lambda(y,t_q)-\Lambda(y,t_{q-1})]^{k_q}}{k_q!}\right\}dA(y), \tag{15}$$

где

$$k=(k_1,\ \ldots,\ k_m) \text{ и } k_i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (i=1,\ \ldots,\ m).$$

Доказательство. Обозначив

$$f_k^{(n)}(a) = \int\limits_{\mathfrak{z}\in R_m^+} e^{-(a,\,\mathfrak{z})}\,\mu_k^{(n)}(d\mathfrak{z}),$$

$$\Psi_{\nu_n}^{(n)}(a) = \int\limits_{\mathfrak{z}\in R_m^+} e^{-(a,\,\mathfrak{z})}\,\mu_{\nu_n}^{(n)}(d\mathfrak{z}),$$

где $a\in R_m^+$, получим с помощью результатов Григелиониса [1], что

$$f_k^{(n)}(a) = \exp\left\{\sum_{q=1}^{m}[\Lambda(k,\ t_q)-\Lambda(k,\ t_{q-1})](e^{-a_q}-1)+\right.$$
$$\left.+O[R_n(k,\ t_m)+B_n(k,\ t_m)]\right\}. \tag{16}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Если последовательность измеримых функций $\varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ ограничена одной постоянной и на каждом компакте равномерно сходится к функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$, а последовательность функций распределения $F_n(x_1, \ldots, x_m)$ слабо сходится к функции $F_0(x_1, \ldots, x_m)$ и функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$ и $F_0(x_1, \ldots, x_m)$ не имеют совпадающи разрывов, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{R_m}\varphi_n(x_1,\ \ldots,\ x_m)\,dF_n(x_1,\ \ldots,\ x_m) =$$
$$= \int\limits_{R_m}\varphi_0(x_1,\ \ldots,\ x_m)\,dF_0(x_1,\ \ldots,\ x_m).$$

Доказательство. Из того, что последовательность функций F_n слабо сходится и функция F_0 не имеет разрывов, совпадающих с разрывами функции φ_0, следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{R_m}\varphi_0(x_1,\ \ldots,\ x_m)\,dF_n(x_0\ \ldots\ x_m) = \int\limits_{R_m}\varphi_0\,dF_0.$$

Далее, из ограниченности функций φ_n, получим для подходящего компакта $K\subset R_m$

$$\left|\int\limits_{R_m}(\varphi_n-\varphi_0)\,dF_n\right| = \int\limits_{K}|\varphi_0-\varphi_n|\,dF_n + \int\limits_{\bar K}|\varphi_0-\varphi_n|\,dF_n \leqslant$$
$$\leqslant o(1)\int\limits_{K}dF_n + 2c\int\limits_{\bar K}dF_n = o(1).$$

Отсюда легко выводим утверждение леммы.

Так как по соотношению (16) и по условиям (12), (13), (14) функции $f_{[yk_n]}^{(n)}(a)$ сходятся равномерно по y, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f_{[yk_n]}^{(n)}(a) = \prod_{q=1}^{m}\exp\{[\Lambda(y,\ t_q)-\Lambda(y,\ t_{q-1})](e^{-a_q}-1)\} = \varphi(y,\ a)$$

то, используя лемму, получим

$$\lim_{n\to\infty}\psi^{(n)}_{\nu_n}(a)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f^{(n)}_{[yk_n]}(a)\,dP(\nu_n<k_ny)=\int_0^\infty \varphi(y,\ a)\,dA(y).$$

Формула обращения преобразования Лапласа дает нам соотношение (15). Теорема доказана.

Замечание 1. Если все процессы $X^{(n)}_r(t)$ одинаковы, т.е. все векторы $\mathfrak{x}^{(n)}_r(\mathfrak{t})$, $(r=1, 2\ldots)$ имеют одно и то же распределение, то условия (2), (3), (4) теоремы 1 и условия (12), (13), (14) теоремы 2 выполнены, когда существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}k_nP\left(X^{(n)}_1(t)=1\right)=\Lambda(t),$$

$$\lim_{n\to\infty}k_nP\left(X^{(n)}_1(t)>1\right)=0,$$

где $k\to\infty$ при $n\to\infty$.

Замечание 2. Как видно из теоремы 2, предельный процесс может быть смесью пуассоновских процессов. Такой класс потоков пока мало исследован. Было бы интересно решить задачи теории массового обслуживания также для таких входящих потоков.

За постановку задачи и ценные советы я очень благодарен Б. В. Гнеденко.

Берлин

Поступило в редакцию 11.II.1970

Литература

1. Б. Григелионис, К вопросу о сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому, Лит. матем. сб., **VI**, 2 (1966), 241–244.
2. R. Harris, Contribution to the theory of extreme values, Operations research centre, University of California – Beskeley, 1968.
3. W. Richter, Übertragung von Grenzaussagen für Folgen zufälliger Elemente auf Folgen mit zufälligen Indizes, Math. Nachr., **29** (1965), Nr. 516.

APIE LAIPTUOTŲ PROCECŲ ATSITIKTINIO SKAIČIAUS SUMŲ KONVERGAVIMĄ

B. Frajeris

(Reziumė)

Įrodomos dvi teoremos apie atsitiktinių laiptuotų procesų atsitiktinio skaičiaus sumų konvergavimą į Puasono procesą arba į Puasono procesų mišinį.

ÜBER DIE KONVERGENZ VON SUMMEN EINER ZUFÄLLIGEN ANZAHL ZUFÄLLIGER STUFENPROZESSE

B. Freyer

(Zusammenfassung)

Es werden zwei Theoreme über die Konvergenz von Summen einer zufälligen Anzahl zufälliger Stufenprozesse gegen einen Poisson-Prozess oder gegen eine Mischung von Poisson-Prozessen bewiesen.