XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1
1971

УДК 519.21

О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ КАК РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ К. ИТО

Д. Сургайлис

Пусть $X(t)=\left(X^{(1)}(t), \ldots, X^{(m)}(t)\right)$, $0\leqslant t\leqslant T$ – случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, почти все траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева, принимающий значения в m-мерном эвклидовом пространстве $(R_m, \mathscr{B}_m)$. Обозначим:

$$\mathscr{F}_t^X=\sigma\{X(s),\quad s\leqslant t\}.$$

В дальнейшем будем предполагать основное вероятностное пространство достаточно „богатым" в том смысле, что существуют все нижеопределяемые случайные величины, не зависящие от $\mathscr{F}_T^X$. Если это не так, то мы всегда можем присоединить их к основному ω - пространству способом, описанным в [1], § 2, гл. 11. Кроме того, будем предполагать σ-алгебры $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}_t^X$ (а также другие, определяемые ниже и содержащиеся в $\mathscr{F}$) пополненными по мере **P**.

Для некоторой системы возрастающих σ-альгебр $\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $0\leqslant t\leqslant T$, будем обозначать $\mathfrak{M}^{(m)}(\mathscr{F}_t)$ класс всех непрерывных справа интегрируемых в квадрате мартингалов, принимающих значения в $(R_m, \mathscr{B}_m)$ и согласованных с $\mathscr{F}_t$. Для $Y_i(t)\in\mathfrak{M}^{(1)}(\mathscr{F}_t)$ $i=1, 2$ обозначим $\langle Y_1, Y_2\rangle(t)$ соответствующий им процесс ограниченной вариации (определение см., напр., в [2]).

Для процесса $X(t)$ предположим выполненными следующие условия:

A$_1$. *Существует функция* $\Pi(t, x, \Gamma)$, $\mathscr{B}[0, T]\times\mathscr{B}_m$ – *измеримая при фиксированном* $\Gamma\in\mathscr{B}_m$, *являющаяся мерой на* $\mathscr{B}_m$ *при любых* t, x, *такая, что при каждом* $\varepsilon>0$, t, x:

$$\Pi(t, x, U_\varepsilon)+\int\limits_{|y|\leqslant 1}|y|^2\,\Pi(t, x, dy)<\infty,$$

$$\mathbf{E}\left(\int\limits_0^T\Pi\left(s, X(s), U_\varepsilon\right)ds+\int\limits_0^T\int\limits_{|y|\leqslant 1}|y|^2\,\Pi\left(s, X(s), dy\right)ds\right)<\infty,$$

а

$$q(t, \Gamma)=p(t, \Gamma)-\int\limits_0^T\Pi\left(s, X(s), \Gamma\right)ds\in\mathfrak{M}^{(1)}(\mathscr{F}_t^X),$$

где

$$\Gamma\in\mathscr{B}\cap U_\varepsilon,\quad U_\varepsilon=\{y\in R_m,\ |y|>\varepsilon\}$$

и

$$p(t, \Gamma)=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\chi_\Gamma\left(X(s)-X(s-0)\right).$$

Тогда можно (см. [2]) определить стохастические интегралы по случайным мерам p и q, соответственно

$$P(t)=\int_0^t \int_{|y|>1} yp(ds,\ dy),\quad Q(t)=\int_0^t \int_{|y|\leq 1} yq(ds,\ dy)$$

и показать, что процесс $X_0(t)=X(t)-p(t)-Q(t)$ непрерывен с вероятностью 1.

A_2. *Существуют функция*

$$a(t,\ x)=\left(a^{(1)}(t,\ x),\ \ldots,\ a^{(m)}(t,\ x)\right)$$

и симметричная неотрицательно определенная матрица

$$A(t,x)=\|a_{ij}(t,x)\|_1^m,$$

такие, что функции

$$a^{(i)}(t,x),\quad a_{ij}(t,x),\quad i,j=1,\ \ldots,\ m,\ \mathscr{B}[0,T]\times\mathscr{B}_m\ -$$

измеримы и

$$\tilde{X}(t)=X(t)-P(t)-Q(t)\ -\int_0^t a\left(s,\ X(s)\right)ds\in\mathfrak{M}^{(m)}(\mathscr{F}_t^X)$$

причем

$$\langle\tilde{X}^{(i)},\ \tilde{X}^{(j)}\rangle(t)=\int_0^t a_{ij}\left(s,\ X(s)\right)ds.$$

Известно (см. [2]), что тогда (в силу предположения о достаточном „богатстве" ω-пространства) существует m-мерный винеровский процесс

$$W(t)=\left(W^{(1)}(t),\ \ldots,\ W^{(m)}(t)\right)$$

и $\mathscr{B}[0,T]\times\mathscr{B}_m$-измеримые функции

$$b_k(t,x)=\left(b_k^{(1)}(t,x),\ \ldots,\ b_k^{(m)}(t,x)\right),\quad k=1,\ \ldots,\ m$$

такие, что

$$X(t)=X(0)+\int_0^t a\left(s,\ X(s)\right)ds+$$
$$+\sum_{k=1}^m\int_0^t b_k\left(s,\ X(s)\right)dW^{(k)}(s)+P(t)+Q(t). \tag{1}$$

Разложение (1) представляет собой стохастическое уравнение в смысле К. Ито только тогда, когда $P(t)$ и $Q(t)$ суть стохастические интегралы по пуассоновским случайным мерам, а меры p и q такими являются в случае, когда $\Pi(t,x,\Gamma)$ не зависит от x (т.е. $\Pi(t,x,\Gamma)=\Pi(t,\Gamma)$ для всех t,x,Γ). Цель настоящей работы — в определении $P(t)$ и $Q(t)$ в случае зависимой от x меры $\Pi(t,x,\Gamma)$ через некоторые пуассоновские меры μ и $\bar{\mu}$, что дает возможность рассматривать (1) как стохастическое уравнение К. Ито.

Теорема. *При условиях* $A_1 - A_2$ *существует семейство возрастающих* σ-*алгебр* $\mathcal{F}_t$, *таких, что при каждом* t $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, *и пуассоновская мера* μ *на борелевских подмножествах пространства* $[0, T] \times (0, \infty)$, *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $\Gamma \in \mathcal{B}(\varepsilon, \infty)$ $\mu\Big((0, t] \times \Gamma\Big) = \mu(t, \Gamma)$ *согласована с* $\mathcal{F}_t$, *а приращения* $\mu(t', \Gamma) - \mu(t, \Gamma)$, $W(t') - W(t)$, *где* $t' > t$, *не зависят от* $\mathcal{F}_t$ *и*

$$\bar{\mu}(t, \Gamma) = \mu(t, \Gamma) - \int_0^t \int_\Gamma r^{-2}\, ds dr \in \mathfrak{M}^{(1)}(\mathcal{F}_t).$$

Существует функция

$$f(t, x, r) = \Big(f^{(1)}(t, x, r), \ldots, f^{(m)}(t, x, r)\Big),$$

удовлетворяющая условиям леммы 1 (см. ниже), *такая, что*

$$\int_0^t a\Big(s, X(s)\Big) ds + P(t) + Q(t) = \int_0^t \tilde{a}\Big(s, X(s)\Big) ds +$$

$$+ \int_0^t \int_{r>1} f\Big(s, X(s), r\Big) \mu(ds, dr) + \int_0^t \int_{r \leqslant 1} f\Big(s, X(s), r\Big) \bar{\mu}(ds, dr), \qquad (2)$$

где

$$\tilde{a}(t, x) = a(t, x) - \int_{r>1, \, |f(t, x, r)| \leqslant 1} f(t, x, r) r^{-2} dr +$$

$$+ \int_{r \leqslant 1, \, |f(t, x, r)| > 1} f(t, x, r) r^{-2} dr.$$

Доказательство. Сформулированная ниже лемма 1, в которой перечислены свойства функции $f(t, x, r)$, построенной для каждого t, x по мере $\Pi(t, x, \Gamma)$, является аналогом соответствующего результата А. В. Скорохода (лемма 2, гл. 3 § 4, [3]), разница только в выборе области изменения переменной r. Условия (a), (b) и (c) этой леммы доказываются так же, как и в [3]; доказательство условия (d) не представляет трудности, но заняло бы много места (так как связано с необходимостью проделать весь предыдущий процесс построения функции $f(t, x, r)$), поэтому доказательство леммы 1 опускаем.

Обозначим для $y \in R_m$, $a \in R_1$ соответственно $\{y\}$, $\{a\}$ множества, состоящие из одной точки, а для $\Gamma \in \mathcal{B}_m$

$$f^{-1}(t, x, \Gamma) = \{r > 0, \ f(t, x, r) \in \Gamma\}.$$

Лемма 1. *Для каждой меры* $\Pi(t, x, \Gamma)$, *удовлетворяющей предположение* A_1, *существует* $\mathcal{B}[0, T] \times \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}(0, \infty)$ *измеримая функция* $f(t, x, r)$, *принимающая значения в* $(R_m, \mathcal{B}_m)$, *конечная в любой конечной области переменной* r *и удовлетворяющая при любых* t, x *следующим условиям*:

(a) $\lim f(t, x, r) = 0$ $(r \to 0)$;

(b) $\int_{r \leqslant 1} |f(t, x, r)|^2 r^{-2} dr < \infty$;

(*c*) *для любого* $\varepsilon>0$, $\Gamma\in\mathscr{B}_m\cap U_\varepsilon$:

$$\int\limits_{f(t,\,x,\,r)\in\Gamma} r^{-2}\,dr=\Pi(t,\ x,\ \Gamma);$$

(*d*) *существует множество* $G_0(t,x)\in\mathscr{B}_m$, *такое, что*

$$\Pi\Big(t,x,\ G_0(t,\ x)\Big)=0,$$

а также $\mathscr{B}[0,T]\times\mathscr{B}_m\times\mathscr{B}_m$ *измеримые функции*

$$\underline{a}(t,\ x,\ y),\quad \bar a(t,\ x,\ y),\quad g_0(t,\ x,\ y),\qquad 0<\underline{a}(t,\ x,\ y)\leqslant\bar a(t,\ x,\ y)\leqslant\infty;$$

$$g_0(t,\ x,\ y)=1,$$

если $y\in G_0(t,x)=0$ *в противоположном случае, такие, что для любого*

$$y\bar\in G_0(t,x),\quad y\neq0:$$

$$f^{-1}(t,\ x,\ \{y\})\setminus\Big[\underline{a}(t,\ x,\ y),\quad \bar a(t,\ x,\ y)\Big)\subseteq\{\bar a(t,\ x,\ y)\},$$

если

$$\Pi(t,\ x,\ \{y\})>0,$$

$$f^{-1}(t,\ x,\ \{y\})=\{\bar a(t,\ x,\ y)\},$$

если

$$\Pi(t,\ x,\ \{y\})=0.$$

Пусть

$$K_n=\{y\in R_m,\ 2^{-n}\leqslant|y|<2^{-n+1}\},\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ K_0=\{y\in R_m,\ |y|>1\}.$$

Определим для

$$N,\ j=0,\ 1,\ \ldots\quad\text{и}\quad 0\leqslant s<t\leqslant T,\qquad k_{N,j}=k_{N,j}(s,\ t),\qquad t_{N,j}=t_{N,j}(s,\ t),$$

соответственно $\mathscr{F}_T^X$ и $\mathscr{F}_t^X$ — измеримые случайные величины следующим образом:

$$k_{N,j}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N-1}p(T,\ K_n)+p(t,\ K_N)-j,\\ \text{если}\\ p(t,\ K_N)-p(s,\ K_N)-j>1,\\ 0\quad\text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$t_{N,j}=\begin{cases}\inf\{t',\ s\leqslant t'\leqslant t,\quad p(t,\ K_N)-p(t',\ K_N)=j\},\\ \text{если}\\ p(t,\ K_N)-p(s,\ K_N)-j>1,\\ 0\quad\text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$, $\Gamma\in\mathscr{B}(\varepsilon,\ \infty)$:

$$p(t,\ \Gamma)-p(s,\ \Gamma)=\sum_{N,\ =0}^{\infty}\chi_\Gamma(x_{N,j}),$$

где

$$x_{N,j}=X(t_{N,j})-X(t_{N,j}-0).$$

Обозначим $\underline{a}_{N,j}=\underline{a}_{N,j}(s,\ t)$ как $\underline{a}_{N,j}=\underline{a}(t_{N,j},\ X(t_{N,j}-0),\ x_{N,j}$, причем $\underline{a}(0,\ x,\ y)\equiv$ $\equiv\underline{a}(t,\ x,\ 0)\equiv 0$ (аналогично определяется $\bar{a}_{N,j}=\bar{a}_{N,j}(s,\ t)$. Так как

$$\left\{\omega: x_{N,j}\in G_0\left(t_{N,j},\ X(t_{N,j}-0)\right)\right\}\subseteq$$
$$\subseteq\left\{\omega:\int_0^T\int_{|y|\geqslant 2^{-N}} g_0\left(t,\ X(t),\ y\right)p(dt,\ dy)>0\right\},$$

а последнее множество, согласно определению $g_0(t,x,y)$, имеет вероятность 0 (см. лемму 1), то $\underline{a}_{N,j}$ и $\bar{a}_{N,j}$ определены повсюду и, как легко заметить, $\mathscr{F}^X_t$-измеримы (ибо таковы $t_{N,j}$, $x_{N,j}$ и $X(t_{N,j}-0)$). Для определения меры μ нам потребуется еще одно сбозначение, а именно:

$$\alpha(t,x)=\sup\{r\geqslant 0,\quad |f(t,x,r)|=0\}.$$

Согласно построению функции $f(t,x,r)$, $\alpha(t,x)=\lim\underline{a}(t,x,y)$ $(y\to 0)$ и для любого $r\leqslant\alpha(t,x)$ $f(t,x,r)=0$.

Пусть теперь на ω-пространстве имеется последовательность независимых случайных величин Z_n, $n\geqslant 1$, распределенных равномерно в интервале $[0,1]$ и независящих от $\mathscr{F}^X_T$. Пусть на борелевских подмножествах декартова произведения $[0,T]\times(0,\infty)$ задана стандартная пуассоновская случайная мера ν, не зависящая от $\mathscr{F}^X_T$ и Z_n, $n\geqslant 1$. Определим теперь на прямоугольниках $(s,t]\times\Gamma$, $\Gamma\in\mathscr{B}(\varepsilon,\infty)$, $\varepsilon>0$ целочисленную случайную функцию μ следующим образом:

$$\mu\left([s,t]\times\Gamma\right)=\sum_{N,j=0}^{\infty}\chi_\Gamma(u_{N,j})+\int_s^t\int_{\Gamma\cap\left(0,\ \alpha(u,\ X(u))\right)}\nu(du,\ dr),\tag{3}$$

где

$$u_{N,j}=\begin{cases}\dfrac{\underline{a}_{N,j}\,\bar{a}_{N,j}}{(\bar{a}_{N,j}-\underline{a}_{N,j})Z_{k_{N,j}}+\underline{a}_{N,j}}, & \text{если}\quad \underline{a}_{N,j}<\bar{a}_{N,j}<\infty,\\[2ex] \dfrac{\underline{a}_{N,j}}{Z_{k_{N,j}}}, \quad\text{если}\quad \underline{a}_{N,j}<\bar{a}_{N,j}=\infty, & \\[2ex] \bar{a}_{N,j}, \quad\text{если}\quad \underline{a}_{N,j}=\bar{a}_{N,j}. & \end{cases}$$

Заметим, что стохастический интеграл по мере ν в правой части (3) определен корректно, так как подынтегральная функция при каждом t измерима относительно σ-алгебры

$$\mathscr{F}^{X,\nu}_t=\sigma\{X(s),\quad\nu(s,\Gamma),\quad s\leqslant t,\ \Gamma\in\mathscr{B}(0,\ \infty)\},$$

а приращения $\nu(t',\Gamma)-\nu(t,\Gamma)$ при $t'>t$ не зависят от $\mathscr{F}^{X,\nu}_t$.

Пусть $Z_0=0$ и

$$\mathscr{F}^Z_t=\sigma\{Z_{k_{N,j}}(0,\ t),\quad N,\ j=0,\ 1,\ \ldots\}.$$

Тогда $\mathscr{F}^Z_t\subseteq\mathscr{F}$, ибо $Z_{k_{N,j}}$—$\mathscr{F}$-измеримая случайная величина при каждом $N,j=0,1,\ldots$ Обозначим

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}^{X,\nu}_t\cup\mathscr{F}^Z_t.$$

Покажем, что $\mu(t, \Gamma)$ и $\mathcal{F}_t$ обладают свойствами, перечисленными в формулировке теоремы. Согласно определению, а также ранее сделанным замечаниям, $\mu(t, \Gamma)$ согласована с $\mathcal{F}_t$. Определяемая по формуле (3) функция множества μ, как легко видеть, является аддитивной по всюду, в частности,

$$\mu(t, \Gamma)-\mu(s, \Gamma)=\mu\Big((s, t]\times\Gamma\Big), \tag{4}$$

и, таким образом, представляет собой меру, которую можно продолжить на все борелевские подмножества декартова произведения $[0, T)\times(0, \infty)$.

Лемма 2. *Для* $\Gamma\in\mathcal{B}(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon>0$, $0\leqslant s<t\leqslant T$:

$$\mathbf{E}\{\mu(t, \Gamma)-\mu(s, \Gamma)\mid\mathcal{F}_s\}=(t-s)\int_\Gamma r^{-2}\,dr.$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}_s\cup\mathcal{F}_t^X.$$

Имея в виду равенство (4) и определение (3), найдем сначала математическое ожидание первого члена в правой части (3), которое обозначим через I_1. Так как этот член представляет собой сумму неотрицательных ограниченных случайных величин, то

$$I_1=\sum_{N,j=0}^{\infty}\mathbf{P}\{u_{N,j}\in\Gamma\mid\tilde{\mathcal{F}}\}.$$

Нетрудно заметить, что

$$I_1=\sum_{N,j=0}^{\infty}\varphi^\Gamma\Big(t_{N,j},\ X(t_{N,j}-0),\ x_{N,j}\Big), \tag{5}$$

где

$$\varphi^\Gamma(t, x, y)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int\limits_{\Gamma\cap\left(\underline{a}(t,x,y),\ \bar{a}(t,x,y)\right)} r^{-2}\,dr}{\Pi(t, x, \{y\})}, & \text{если}\quad \Pi(t, x, \{y\})>0,\\ \chi_\Gamma\Big(\bar{a}(t, x, y)\Big), & \text{если}\quad \Pi(t, x, \{y\})=0.\end{cases}$$

Равенство (5) следует из того, что $\underline{a}_{N,j}$, $\bar{a}_{N,j}$ измеримы относительно $\mathcal{F}_t^X$, а распределение $Z_{k_{N,j}}$ на $\mathcal{F}_t^X$-измеримом множестве $\{\omega\colon k_{N,j}>0\}$ не зависит от $\mathcal{F}_T^X$ и совпадает с распределением Z_1. Заметим попутно, что в силу тех же причин приращение $W(t')-W(t)$, при $t'>t$ не зависит от $\mathcal{F}_t$. Пусть теперь Γ — открытый интервал. Из результатов леммы 1 следует, что $\varphi^\Gamma(t, x, y)$ — $\mathcal{B}[0, T)\times\mathcal{B}_m\times\mathcal{B}_m$-измеримая функция и

$$\varphi^\Gamma(t, x, y)=\begin{cases}\dfrac{\Pi^\Gamma(t, x, dy)}{\Pi(t, x, dy)}, & \text{если}\quad y\neq 0,\quad y\in G_0(t, x),\\ 0 & \text{в других случаях},\end{cases}$$

а

$$\Pi^\Gamma(t, x, A)=\int\limits_{\Gamma\cap f^{-1}(t,x,A)} r^{-2}\,dr,\quad A\in\mathcal{B}_m.$$

Тогда

$$\int_0^T \int_{R_m} \varphi^\Gamma(t, x, y)\, \Pi(t, x, dy)\, dt = \int_0^T \Pi^\Gamma(t, x, R_m\setminus\{0\})\, dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma \cap (\alpha(t, x), \infty)} r^{-2}\, dr dt < \infty. \tag{6}$$

Поэтому можно определить стохастический интеграл от функции

$$\varphi^\Gamma\Big(t, X(t), y\Big)$$

по мере $p(dt, dy)$, и равенство (5) можем переписать в следующем виде:

$$I_1 = \int_s^t \int_{R_m} \varphi^\Gamma\Big(u, X(u), y\Big)\, p(du, dy).$$

Легко установить теперь, что

$$\mathbf{E}\{I_1 \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\{I_1 \mid \mathcal{F}_s^X\}.$$

Это следует, в частности, из того, что для любого $N, j=0, 1, \ldots$ множество $\{\omega\colon k_{N,j}(0, s)=0\}$ $\mathcal{F}_s^X$-измеримо, Z_n, $n \geqslant 1$ не зависят от $\mathcal{F}_T^X$ и равнораспределены, а I_1 — $\mathcal{F}_t^X$-измеримо. Таким образом, учитывая (6), можем написать

$$\mathbf{E}\{I_1 \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\left\{\int_s^t \int_{R_m} \varphi^\Gamma\Big(u, X(u), y\Big)\, p(du, dy) \mid \mathcal{F}_s^X\right\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{\int_s^t \int_{\Gamma \cap \left(\alpha(u, X(u)), \infty\right)} r^{-2}\, du\, dr \mid \mathcal{F}_s^X\right\}. \tag{7}$$

Найдем теперь условное математическое ожидание I_2 относительно σ-алгебры $\tilde{\mathcal{F}}$ второго слагаемого из (3). Так как приращения $\nu(s', \Gamma) - \nu(s, \Gamma)$ при $t \geqslant s' > s$ не зависят от $\tilde{\mathcal{F}}$, а функция $\alpha(s', X(s'))$ полностью определяется событиями из $\tilde{\mathcal{F}}$, то

$$I_2 = \int_s^t \int_{\Gamma \cap \left(0, \alpha(u, X(u))\right)} r^{-2}\, du\, dr,$$

откуда вместе с равенством (7) следует утверждение леммы для открытого интервала Γ.

Пусть $\mathcal{R}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ означает класс тех множеств $\Gamma \in \mathcal{B}(\varepsilon, \infty)$, для которых выполняется утверждение леммы. Тогда он замкнут относительно собственных разностей и счетных объединений непересекающихся множеств. Поскольку $\mathcal{R}(\varepsilon)$ содержит открытые интервалы, то тем самым содержит и минимальную σ-алгебру, порожденную ими, т.е. $\mathcal{B}(\varepsilon, \infty)$. Лемма доказана.

Заметив, что $0 \leqslant \varphi^{\Gamma}(t, x, y) \leqslant 1$, и воспользовавшись (6), легко проверить, что

$$\mathbf{E}\left(\bar{\mu}(t, \Gamma)\right)^2 = \mathbf{E}\left(\mu(t, \Gamma) - \int_0^t \int_{\Gamma} r^{-2}\, du\, dr\right)^2 < \infty,$$

так что $\bar{\mu}(t, \Gamma) \in \mathfrak{M}^{(1)}(\mathscr{F}_t)$ и

$$\langle \bar{\mu}(\cdot, \Gamma) \rangle (t) = \int_0^t \int_{\Gamma} r^{-2}\, du\, dr.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться теоремой 2 [2], откуда следует пуассоновость меры μ и ее независимость от винеровского процесса. Равенство (2) следует из соотношения

$$p(t, \Gamma) = \int_0^t \int_{f^{-1}(u,\, X(u),\, \Gamma)} \mu(du, dr),$$

которое непосредственно следует из определения μ. Теорема доказана.

Следствие. При условиях $A_1 - A_2$, если функции $\tilde{a}(t, x)$, $b_k(t, x)$, $k=1, \ldots, m$ и $f(t, x, r)$ удовлетворяют условиям единственности решения стохастического уравнения, процесс $X(t)$ марковский.

Замечание. Вместо условий $A_1 - A_2$ можно взять условия, накладываемые на локальные приращения процесса $X(t)$ (см. [4]).

В заключение автор благодарит Б. Григелиониса за руководство и внимание.

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 6.II.1970

Литература

1. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
2. Б. Григелионис, О марковском свойстве случайных процессов, Лит. матем. сб., **VIII**, 3 (1968).
3. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, изд. КГУ, Киев, 1961.
4. Д. Сургайлис, О стохастических уравнениях, Лит. матем. сб., **IX**, 4 (1969).

ATSITIKTINIAI PROCESAI KAIP STOCHASTINĖS K. ITO LYGTIES SPRENDINIAI

D. Surgailis

(*Reziumė*)

Kaip anksčiau parodyta [2], m-matis tolydinis iš dešinės procesas, turintis ribas iš kairės ir tenkinantis šio darbo sąlygas $A_1 - A_2$, gali būti išskaidytas (1) lygybėje pavaizduotu būdu. Tuo atveju, kai proceso šuolių matas $\Pi(t\ x, \Gamma)$ nepriklauso nuo x, į (1) galima žiūrėti kaip į K. Ito stochastinę lygtį. Kaip seka iš čia įrodytos teoremos, tai teisinga ir bendro mato $\Pi(t, x, \Gamma)$ atveju, jei pagrindinė tikimybinė erdvė yra pakankamai „turtinga“.

ON STOCHASTIC PROCESSES AS SOLUTIONS OF A STOCHASTIC EQUATION OF K. ITO

D. Surgailis

(*Summary*)

It was recently stated (see [2]) that under assumptions $A_1 - A_2$ of the present paper a right continous m-dimmensional process having left-hand limits can be decomposed in the form presented by the equality (1) of the present paper. In the case when $\Pi(t, x, \Gamma) = \Pi(t, \Gamma)$ holds for every t, x, Γ, (1) can be regarded as a stochastic equation of K. Ito. That is also possible in the general case of $\Pi(t, x, \Gamma)$ when the basic probability space is sufficiently „rich", as it follows from the theorem of this paper.