XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 519.21

ОДНА ТЕОРЕМА О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

В. И. Паулаускас

Настоящая заметка посвящена дополнению и обобщению одной теоремы автора [4].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – назависимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$. Пусть $F_n(x)$ – ф. р. случайной величины

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \text{ а } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Как и в работе [4], через μ_j и ν_j обозначим псевдомоменты, а именно

$$\mu_j=\int_{-\infty}^{\infty} x^j d(F-\Phi)(x),$$

$$\nu_j=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^j |d(F-\Phi)(x)|.$$

Вопрос о близости распределений двух сумм независимых случайных величин рассматривался В. М. Золотаревым в работе [3]. Там исследовалась разность $|G(x)-H(x)|$, где $G(x)$ – ф.р. случайной величины

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ H(x) \text{ – ф.р. } \sum_{i=1}^{n}\eta_i,\ \xi_i \text{ и } \eta_i,\ i=1,2,\ldots,n \text{ –}$$

независимые случайные величины с ф.р. $G_i(x)$ и $H_i(x)$, соответственно. Методом характеристических функций получен следующий общий результат.

Если

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{-\infty}^{\infty} x^j d(G_i-H_i)(x)\right|=0 \text{ для всех } j=0,1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r d(G_i-H_i)(x)|<\infty$$

при некотором $m\leqslant r\leqslant m+1$ и $H(x)$ имеет плотность, ограниченную числом q, то

$$\sup_x |G(x)-H(x)|\leqslant C(m, r)\times$$

$$\times\left(q^r\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r|d|(G_i-H_i)(x)|\right)^{\frac{1}{r+1}}. \tag{1}$$

Из этого общего результата вытекает следующее утверждение: если $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_{m-1}=0$ и $\nu_m<\infty$ $(m\geqslant 3)$, то

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_0(m)\,\frac{\nu_m^{1/m+1}}{n^{\alpha(m)}}, \tag{2}$$

где $\alpha(m)=\frac{1}{2}\,\frac{m-2}{m+1}$. При $m\to\infty$ $\alpha(m)\to\frac{1}{2}$, но для первых m значения $\alpha(m)$ далеки от $\frac{1}{2}$, например, $\alpha(3)=\frac{1}{8}$, $\alpha(4)=\frac{1}{5}$.

В [4] методом композиций при $m=3$ автору удалось получить оптимальную по отношению к n оценку:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1\,\frac{\max(\nu_3^{1/4},\nu_3)}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$

В доказательстве этой оценки приведены рассуждения об оценке абсолютной константы C_1, но, оказывается, что с помощью этих рассуждений константу C_1 нельзя получить меньше 7, так как, во-первых, применялись грубые оценки $\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)^3\leqslant 2\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{n}{n-2}}\leqslant\sqrt{3}$, во-вторых, оценка (2) из [4] по отношению к константам является грубой. Для более точной оценки константы C_1, которая дана в сноске работы [4], применялись другие рассуждения, а также вычисления на ЭВМ. Здесь мы, помимо этой оценки, докажем следующее обобщение оценки (3) и усиление неравенства (2).

Теорема. *Если $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_{m-1}=0$ и $\nu_m<\infty$ при некотором целом $m\geqslant 3$, тогда для всех $n\geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\,\frac{\max(\nu_m^{1/m+1},\nu_m)}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

где $C_1(m)$ — константа, зависящая только от m. В частности, $C_1(3)\leqslant 2{,}16$.

Сперва, опираясь на доказателство оценки (4) при $m=3$ из [4], приведем оценку константы $C_1(3)$.

Вместо неравенства (2) из [4] будем пользоваться следующей оценкой из работ Г. Бергстрема [1] и [2], которая по отношению к константам является более точной:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\max\left\{\tau\cdot\sup_x|[(F_n-\Phi)*\Phi_T](x)|,\ \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{T}\right\}, \tag{5}$$

где a и τ — положительные числа, удовлетворяющие уравнение со свободно выбираемым параметром $0<m<1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2ma}^{(4-2m)a}\left(2-m-\frac{u}{2a}\right)e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=1+\frac{1}{\tau} \tag{6}$$

(например, в [2] на стр. 161 дано $m=0{,}4$, $a=2$, $\tau=2{,}07$). Далее, оставляя в оценках (12) и (13) из [4] точную зависимость от n, имеем

$$\sup_x|[(F_n-\Phi)*\Phi_T](x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\nu_3\max(\nu_3^{1/4},\nu_3)}{n^{3/4}}\left[B_1(n)\,\frac{C_1(3)\,T^3}{\sqrt{n}}+C_1(3)\,B_2(n)\,T\sqrt{n}\right]+\frac{B_3(n)\,\nu_3}{\sqrt{n}}, \tag{7}$$

где

$$B_1(n)=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(4e^{-3/2}+1)\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

$$B_2(n)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(4e^{-3/2}+1)\sqrt{\frac{n}{n-2}}, \qquad B_3(n)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2}.$$

Полагая $T=\dfrac{\sqrt{n}}{C_3\max(\nu_3^{1/4},\ \nu_3)}$ из (5) и (7), получаем следующее неравенство:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{\max(\nu_3^{1/4},\ \nu_3)}{\sqrt{n}}\times$$

$$\times\max\left\{\tau\cdot\left[\frac{C_1(3)B_1(n)}{C_3^3}+\frac{C_1(3)B_2(n)}{C_3}+B_3(n)\right],\qquad \frac{2aC_3}{\sqrt{2\pi}}\right\}.$$

Обозначив искомую константу $C_1(3)$ через y получим следующее уравнение:

$$\max\left\{\tau\cdot\left[\frac{yB_1(n)}{C_3^3}+\frac{yB_2(n)}{C_3}+B_3(n)\right],\qquad \frac{2aC_3}{\sqrt{2\pi}}\right\}=y,$$

которое в свою очередь дает уравнение

$$\tau\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{a^3B_1(n)}{y^2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,aB_2(n)+B_3(n)\right]=y. \tag{8}$$

Так как коэффициенты в (8) зависят от n, то и решение будет убывающей функцией от $n: y=y(n)$. И если мы имели только уравнение (8), то за константу $C_1(3)$ могли взять только $y(1)$ — это следует из сути метода математической индукции.

Но в нашем распоряжении есть оценка (2) В. М. Золотарева [3], которую при $m=3$ запишем в следующем виде:

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant y_0(n)\frac{\nu_3^{1/4}}{\sqrt{n}},\quad y_0(n)=0{,}28845n^{3/8}.$$

Теперь ясно, что для малых n $y_0(n)$ является меньшим, чем $y(n)$, и за константу $C_1(3)$ мы можем взять пересечение $y_0(n)$ и $y(n)$, т.е. такое значение $y(n^*)$, что $y(n^*)\geqslant y_0(n^*)$, а $y(n^*+1)<y_0(n^*+1)$. Точное решение такой задачи технически трудно, так как решение уравнения (8) при одном фиксированном n требует много вычислений для нахождения оптимальных параметров m, a, τ. Кроме того, из свойств $y_0(n)$ и $y(n)$ ясно, что вычислять значения $y(n)$ и $y_0(n)$ для первых членов последовательности $n=1, 2, 3, \ldots$ нет необходимости, поскольку $y(n)$ очень быстро приближается к предельному значению, а $y_0(n)$ растет довольно медленно, например $y_0(64)<1{,}78$. Поэтому можно поступить следующим образом: сперва решить уравнение

$$\tau\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\frac{aB_1}{y^2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,aB_2+B_3\right]=y, \tag{9}$$

где $B_i=\lim\limits_{n\to\infty}B_i(n)$, а затем точно рассчитать пересечение функций $y(n)$ и $y_0(n)$.

Решение уравнения (9) проводилось на электронно-вычислительной машине по следующему алгоритму: для каждого $m=kh$, $h=0{,}05$, $k=4, 5, 6, \ldots, 12$ и $a=a_0+k_1h_1$, $a_0=1$, $h_1=0{,}1$, $k_1=0, 1, 2, \ldots, 38$ из (6) вычислялось τ, потом для каждой пары a и τ решалось уравнение (9). Полученные значения a и τ имеют самостоятельное значение (как приложение к лемме Г. Бергстрема, см. (5) и (6)), поэтому мы приводим оптимальные пары в таблице (для каждого a указывается наименьшее значение τ и при каком m оно получено)

a	τ	m	a	τ	m	a	τ	m
1	6,9142	0,55	2,3	1,8599	0,35	3,6	1,4789	0,25
1,1	5,0295	0,55	2,4	1,8082	0,35	3,7	1,4620	0,25
1,2	4,0568	0,5	2,5	1,7648	0,35	3,8	1,4469	0,25
1,3	3,4615	0,5	2,6	1,7282	0,35	3,9	1,4335	0,25
1,4	3,0732	0,5	2,7	1,6930	0,3	4,0	1,4216	0,25
1,5	2,7828	0,45	2,8	1,6567	0,3	4,1	1,4110	0,25
1,6	2,5664	0,45	2,9	1,6253	0,3	4,2	1,4015	0,25
1,7	2,4042	0,45	3,0	1,5981	0,3	4,3	1,3932	0,25
1,8	2,2685	0,4	3,1	1,5745	0,3	4,4	1,3857	0,25
1,9	2,1546	0,4	3,2	1,5540	0,3	4,5	1,3764	0,2
2,0	2,0636	0,4	3,3	1,5362	0,3	4,6	1,3646	0,2
2,1	1,9902	0,4	3,4	1,5193	0,25	4,7	1,3538	0,2
2,2	1,9217	0,35	3,5	1,4980	0,25	4,8	1,3440	0,2

Оптимальное решение $y=2{,}1593$ получено при $m=0{,}45$, $a=1{,}6$, $\tau=2{,}5664$. (Программу составил и вычисления на ЭВМ провел научный сотрудник вычислительного центра ВГУ С. Либерис, которому автор искренне признателен.) Теперь легко высчитать, что $y_0\,(214)=2{,}157$, а корень уравнения (8) при $n=214$ будет $y\,(214)=2{,}16$. Поэтому мы вправе взять $C_1\,(3)=2{,}16$.

Переходим к доказательству теоремы. Так как не будем стремиться получить наименьшую константу $C_1\,(m)$, то будем пользоваться формулами и обозначениями из [4]. Идея доказательства та же, что и при доказательстве частного случая $m=3$, только теперь вычисления более сложные, поэтому мы только укажем путь рассуждений.

Разберем случай $\nu_m<1$. Методом математической индукции покажем, что справедлива оценка

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant C_1(m)\, \frac{\nu_m^{1/n+1}}{\sqrt{n}}\,. \tag{10}$$

Индукционный базис (т.е. оценка (10) при $n=1$) следует из (2), или его можно получить методом композиций таким же путем, как и в [4]. Далее, используя тождественное разложение (3) из [4], разлагая функцию V_i, $i=0, 1, \ldots, n-1$, в ряд Тейлора до m-го члена и принимая во внимание условие теоремы $\mu_1=\mu_2= \ldots =\mu_{m-1}=0$, получаем

$$n\cdot\sup_x |[V_0 * (\tilde F_n-\Phi_n)](x)| \leqslant C_2(m)\, \frac{\nu_m}{n^{m/2}-1}\,, \tag{11}$$

$$\sup_x |[V_i * (\tilde F_n-\Phi_n)](x)| \leqslant \frac{\nu_m}{m!\,n^{m/2}} \sup_x \left| \frac{d^m V_i(x)}{dx^m} \right|. \tag{12}$$

Аналогично формуле (10) из [4], применяя индукционную предпосылку, имеем

$$\sup_x \left| \frac{d^m V_i(x)}{dx^m} \right| \leqslant \frac{C_1(m)\, \nu_m^{1/m+1}}{\sqrt{i}} \cdot \frac{C_3(m)}{\left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{m/2}} . \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sup_x | [V_i * (\tilde{F}_n - \Phi_n)] (x) | \leqslant$$

$$\leqslant C_1(m)\, C_4(m)\, \frac{\nu_m^{m+2/m+1}}{n^{m/2}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} \left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{m/2}} . \tag{14}$$

Оценим последнюю сумму:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} \left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{m/2}} = \frac{T^m}{\sqrt{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\sqrt{i} \left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{m/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T^m}{\sqrt{n-1}} + 2\sqrt{n} \int_0^{\sqrt{\frac{n-2}{n}}} \frac{du}{(b^2-u^2)^{m/2}} ,$$

где $b^2 = 1 + \frac{1}{T^2}$. Разбирая отдельно случаи $m=2l$ и $m=2k+1$ и используя рекуррентные неравенства

$$I_l = \int_0^{\sqrt{\frac{n-2}{n}}} \frac{du}{(b^2-u^2)^l} \leqslant \frac{T^{2(l-1)}}{2(l-1)} + I_{l-1},$$

$$I_k = \int_0^{\sqrt{\frac{n-2}{n}}} \frac{du}{(b^2-u^2)^{k+1/2}} \leqslant \frac{T^{2k-1}}{2k-1} + I_{k-1},$$

легко получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} \left(\frac{n-i-1}{n} + \frac{1}{T^2} \right)^{m/2}} \leqslant \frac{T^m}{\sqrt{n-1}} + C_5(m) \sqrt{n}\, T^{m-2} . \tag{15}$$

Из (11), (14), (15) и неравенства (2) из [4] получаем

$$\sup_x | F_n(x) - \Phi(x) | \leqslant \frac{C_1(m)\, C_4(m)}{n^{m/2}}\, \nu_m^{m+2/m+1} \times$$

$$\times \left(\frac{2T^m}{\sqrt{n-1}} + 2C_5(m) \sqrt{n}\, T^{m-2} \right) + \frac{2\, C_2(m)\, \nu_m}{n^{m/2-1}} + \frac{C_2}{T} .$$

А отсюда, положив $T=\frac{\sqrt{n}}{\nu_m^{1/m+1}\cdot C_6(m)}$ и используя условие $\nu_m<1$, получаем (10), если только константы $C_1(m)$ и $C_6(m)$ подобраны так, что выполнено неравенство

$$\frac{2\sqrt{2}\,C_1(m)C_4(m)}{\left(C_6(m)\right)^m}+\frac{2C_5(m)\,C_4(m)\,C_1(m)}{\left(C_6(m)\right)^{m-2}}+2C_3(m)+C_2\cdot C_6(m)\leqslant C_1(m).$$

Что это всегда можно сделать, нетрудно показать такими же рассуждениями, как и в [4].

В случае $\nu_m\geqslant 1$ аналогичным путем доказывается оценка

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\,\frac{\nu_m}{\sqrt{n}}\,. \tag{16}$$

Из (10) и (16) вытекает утверждение теоремы.

Так как при $M\xi_i^2=1$ имеем $M|\xi_i|^m\geqslant M|\xi_i|^{m-1}>\ldots\geqslant M\xi_i^2\geqslant 1$, то оценка (4) представляет интерес при малых ν_m, т.е. в случае $\nu_m<1$. Возникает интересный вопрос — является ли показатель степени $\frac{1}{m+1}$ правильным или его можно увеличить? Из доказательства теоремы видно, что этот показатель зависит только от индукционного базиса, т.е. от того какой показатель получается в оценке (4) при $n=1$. Более того, из доказательства видно, что и при таком индукционном базисе для всех $n>1$ мы можем показатель степени для $\nu_m<1$ взять большим. Именно, для всех $n>1$ справедлива оценка

$$\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\frac{\max\{\nu_m^{\beta(m)},\nu_m\}}{\sqrt{n}}\,, \tag{17}$$

где $\beta(m)=\frac{m+2}{(m+1)^2}>\frac{1}{m+1}$. С другой стороны, допустим, что при $n=1$ мы получили оценку

$$\sup_x|F(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\,\nu_m^{\gamma(m)}.$$

Тогда в (17) показатель будет $\beta(m)=\frac{1+\gamma(m)}{m+1}$, который показывает, что данным методом невозможно улучшить показатель степени до 1.

Другой интересный вопрос — это нижняя граница для константы C_1 (3) для класса распределений, имеющих конечный ν_3. Но точная постановка задачи требует решения вопроса о правильном показателе степени в оценке (4).

Вильнюсский Государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию 15.I.1970

Литература

1. H. Bergström, On the Central Limit Theorem, Skand. Aktuarietidskrift, 1944.
2. H. Bergström, On the Central Limit Theorem in the Case of Not Equally Distributed Random Variables, Skand, Aktuarietidskrift, 1—2 (1949).
3. В. М. Золотарев, О близости распределений сумм случайных величин, Теор. вероят. и ее прим., **IX**, вып. 3 (1965).
4. В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Лит. матем. сб., **IX**, 2 (1969).

VIENA TEOREMA APIE KONVERGAVIMO GREITĮ CENTRINĖJE RIBINĖJE TEOREMOJE

V. Paulauskas

(*Reziumė*)

Sakykime, $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcija $F(x)$, $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$. Tarkime, kad $F_n(x)$ – sumos

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^m$$

pasiskirstymo funkcija,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ir

$$\mu_j=\int_{-\infty}^{\infty} x^j d(F-\Phi)(x), \qquad \nu_j=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^j |d(F-\Phi)(x)|.$$

Teorema. *Jei* $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_{m-1}=0$ *ir* $\nu_m<\infty$ *kuriam nors* $m\geqslant 3$, *tai visiems* $n\geqslant 1$

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\,\frac{\max(\nu_m^{1/m+1},\nu_m)}{\sqrt{n}};$$

čia $C_1(m)$ – *konstanta, priklausanti tik nuo* m, *pavyzdžiui,* $C_1(3)<2{,}16$.

Gauta teorema apibendrina autoriaus teoremą [4] ir pagerina vieną V. Zolotariovo rezultatą [3].

ONE THEOREM ON THE RARE OF CONVERGENCE IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM

V. Paulauskas

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ be independent identically distributed random variables with distribution function $F(x)$, $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2=1$. Let $F_n(x)$ *be* distribution function of sum

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

and

$$\mu_j=\int_{-\infty}^{\infty} x^j d(F-\Phi)(x), \qquad \nu_j=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^j d(F-\Phi)(x).$$

Theorem. *If* $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_{m-1}=0$ *and* $\nu_m<\infty$ *for some integer* $m\geqslant 3$, *then for all* $n\geqslant 1$

$$\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant C_1(m)\,\frac{\max(\nu_m^{1/m+1},\nu_m)}{\sqrt{n}},$$

where constant $C_1(m)$ *depends only on* m. *In particular case* $C_1(3)\leqslant 2{,}16$.

The obtained theorem generalizes result from [4] and strenghtens on result of V. M. Zolotarev [3].