XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК 1

1971

УДК 51 : 330.115

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГРУППОВЫХ РЕШЕНИЙ

А. И. Моркелюнас

Аксиоматически определены два правила групповых решений. Эти правила имеют много общего. В частности для $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}_0$ они совпадают. Система аксиом второго правила отличается от системы первого дополнительной аксиомой и некоторой модификацией двух аксиом.

Обозначения, употребляемые в статье, те же, что и в [5]. Пусть m – число альтернатив a_i, n – число индивидов. Полное упорядочение в смысле предпочтений (см. [4], [5]) множества $\{a_1, \ldots, a_m\}$ называется профилем предпочтения. Предпочтения между альтернативами обозначаются знаком „$\succsim$“. Если $a_i\succsim a_j$ (или, что тоже самое $a_j\precsim a_i$), то верно одно из двух: $a_i\succ a_j$ (a_i строго предпочтительнее a_j) или $a_i\sim a_j$ (эквивалентность). Обозначим множество профилей предпочтения R через $\mathcal{R}$, а через $\mathcal{R}_0$ – множество профилей предпочтения без эквивалентных отношений. Подмножество $\mathcal{G}=\{R_1, \ldots, R_s, \ldots, \ldots, R_n\}$ множества $\mathcal{R}$ называется групповым профилем. Правило группового решения это отображение, определенное для всех конечных $\mathcal{G}$, а групповое решение $R(\mathcal{G})\in\mathcal{R}$ – образ выбранного отображения.

§ 1. Правило Гудмана – Маркавица

В [2] предложено правило группового решения, определяемое, исходя из индивидуальных полезностей альтернатив. Полезности получаются из профилей предпочтения там же описанным способом. Здесь же предлагаются аксиомы, которые одновременно определяют и групповое решение, и ндивидуальные полезности альтернатив.

Пусть каждый профиль предпочтения $R_s\in\mathcal{G}$ представим вектором $x^s=(x_1, \ldots, x_m)$ m-мерного евклидова пространства так, что $x_i>x_j$ тогда и только тогда, когда $a_i\succ a_j$ в R_s. Очевидно каждому профилю предпочтения $R\in\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие бесконечное множество таких векторов. Это множество векторов x, индуцированных профилем R обозначим через $X(R)$. Соответственно, каждый групповой профиль $\mathcal{G}=\{R_1, \ldots, R_s, \ldots, R_n\}\subset R^m$, где индекс m указывает число альтернатив, представим матрицей $\|x_i^s\|=(x^1, \ldots, x^s, \ldots, x^n)$, $i=1, \ldots, m$, где столбцы $x^s\in X(R_s)$. Множество матриц, соответствующих групповому профилю $\mathcal{G}$ обозначим через $\mathcal{X}(\mathcal{G})$. Если $X_1(\mathcal{G})$ и $X_2(\mathcal{G})\in\mathcal{X}(\mathcal{G})$, то X_1 и X_2 называются эквивалентными по порядку [4].

Выбор правила группового решения сейчас интерпретируется как выбор отображения F, определенного для всех конечномерных матриц $\| x_i^s \|$, $s=1, \ldots, \ldots, n$; $i=1, \ldots, m$; $n, m=1, 2, \ldots$ в m-мерное евклидово пространство. Если $(x_1, \ldots, x_m)$ — образ отображения F, то групповым решением считается такой $R(\mathcal{G})$, в котором $a_i \succ a_j$ тогда и только тогда, когда $x_i > x_j$.

Обозначив $M=\{1, \ldots, m\}$, введем следующее определение.

Определение 1. Отрезком профиля предпочтения R называется множество $\{a_i : i \in L \subset M\} = R^L$ с предпочтениями между a_i, $i \in L$, индуцированными R, если для любой a_k, $k \in M \setminus L$, не существуют $r, j \in L$, что $a_r \succ a_k \succ a_j$.

Тот факт, что R^L является отрезком профиля R будем обозначать $R^L \in R$.

Всюду далее $a_i \underset{s}{\succsim} a_j$ обозначает предпочтение s-го индивида, т.е. что $a_i \succsim a_j$ в профиле R_s. Кроме того, запись $a_i \underset{N}{\succsim} a_j$ означает, что $a_i \underset{s}{\succsim} a_j$ для всех $s \in N = \{1, \ldots, n\}$ и существует $s_0 \in N$, что $a_i \underset{s_0}{\succ} a_j$.

Мы потребуем, чтобы правило группового решения (отображение F, определенное в множестве конечномерных матриц) удовлетворяло следующим аксиомам.

Аксиома 1 (порядок). Каждому $\mathcal{G}$ соответствует единственное групповое решение. Если $X_1(\mathcal{G})$ и $X_2(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$, то групповое решение одно и то же для $X_1(\mathcal{G})$ и $X_2(\mathcal{G})$.

Аксиома 2 (симметрия). Групповое решение не зависит от наименования индивидов и от названия альтернатив.

Аксиома 3 (независимость альтернатив отрезка). Если $R_s^L \in R_s$ и $R_s^L \in R'_s$, $\mathcal{G}=\{R_1, \ldots, R_s, \ldots, R_n\}$, $G'=\{R_1, \ldots, R'_s, \ldots, R_n\}$, то $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G}')$ для $i, j \in L$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$.

Аксиома 4 (оптимальность Парето). Если $a_i \underset{N}{\succsim} a_j$, то $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$.

Аксиома 5 (присоединение особых альтернатив). Пусть $\bar{\mathcal{G}}$ получается из присоединением новой альтернативы a_k к каждому профилю предпочтения так, что

а) найдется такое $i \in M$, что в $R(\mathcal{G})$ $a_i \sim a_k$,

б) для каждого $s \in N$ существует $i_s \in M$, что $a_{i_s} \sim a_k$, тогда отношения предпочтения между a_i, $i \in M$ в $R(\bar{\mathcal{G}})$ совпадают с отношениями в $R(\mathcal{G})$.

Коротко прокомментируем каждую из аксиом 1—5 (подробнее об этом см. [4]).

Аксиома 1 требует, чтобы отображение F было однозначным и не зависело бы от матрицы представляющей $\mathcal{G}$.

Условие аксиомы 2 относительно названия альтернатив вместе с аксиомой 1 выражает тот факт, что предпочтения в $R(\mathcal{G})$ зависят только от строк матрицы $X(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$. Условие относительно наименований индивидов является сильным допущением. Это — допущение о равной значимости (или равноправии) индивидов. Если $\mathcal{G}$ записано в виде $X(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$, то условие относительно наименований индивидов означает, что $R(\mathcal{G})$ не зависит от перестановки столбцов $X(\mathcal{G})$.

Аксиома 3 является ослабленным вариантом аксиомы независимости несвязанных альтернатив Эрроу.

Аксиому 4 можно сформулировать и так: если $a_i \underset{\tilde{N}}{\succ} a_j$, то неверно, что $a_i \precsim a_j$ в $R(\mathcal{G})$. Конечно аксиома 4 более спорна нежели то, что из $a_i \underset{N}{\succ} a_j \to \to a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$.

По поводу аксиомы 5 заметим следующее. Гудман и Марковиц предполагают, что эквивалентные альтернативы не влияют на степень интенсивности предпочтения альтернатив. Следуя Гудману и Марковицу сформулирован пункт б) аксиомы 5. Кроме того, по пункту *а*) аксиомы 5 предположение о том, что присоединение эквивалентной альтернативы не меняет индивидуального предпочтения, переносится и на случай группового поведения. Отметим, что эквивалентность в групповом решении присоединяемой альтернативы и некоторой из имеющихся альтернатив не затрагивает других аксиом, кроме 1 и 2.

Определение 2. $U(\mathcal{G}) = \| u_i^s \|$, $s=1, \ldots, n$; $i=1, \ldots, m$, причем:

1) $u_i^s = u_j^s + 1$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_j$ является отрезком в $R_s \in \mathcal{G}$, i, $j \in M$,

2) $u_i^s = 0$, если $a_i \precsim a_j$ для всех $j \in M$.

Очевидно, что $U(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$.

Теорема 1. *Существует правило группового решения, удовлетворяющее аксиомам* 1—5, *и оно единственно.*

Доказательство. Заметим сначала следующий факт. Пусть a_{i_s} — самая предпочитаемая для s-го индивида альтернатива, т.е.

$$a_{i_s} \underset{s}{\succsim} a_i \text{ для любого } i \in M.$$

Если сейчас к $\{a_i : i \in M\}$ присоединить альтернативу a_k, $k \notin M$ так, что

$$a_k \underset{s}{\succ} a_{i_s}$$

и

$$a_{i_s} \underset{N \setminus \{s\}}{\sim} a_k,$$

то предпочтения между a_i, $i \in M$ в групповом решении не изменятся. Действительно, если

$$a_{i_s} \underset{N}{\sim} a_k,$$

то условие а) аксиомы 5 выполнено, ибо групповое отношение предпочтения между a_{i_s} и a_k будет $a_{i_s} \sim a_k$, что следует из аксиом 1 и 2. Условие б) аксиомы 5 также выполнено. Так как $a_k \underset{s}{\sim} a_{i_s}$ и $a_{i_s} \underset{s}{\succsim} a_i$ для всех $i \in M$, то из транзитивности „$\succsim$" имеем $a_k \underset{s}{\succsim} a_i$. Если изменить $a_k \underset{s}{\succsim} a_i$ на $a_k \underset{s}{\succ} a_i$, то из аксиомы 3 следует утверждаемое.

Не теряя общности, положим $R_s = R_1$, $i_1 = m$ и присоединим к $\{a_1, \ldots, a_m\}$ не менее чем $n(m-1)$ альтернатив a_{m+l}, т.е. $l=1, \ldots, m_1$, $m_1 \geqslant n(m-1)$, следующим образом:

$$a_{m+l} \underset{\{1\}}{\succ} a_{m+l-1}, \qquad l=1, \ldots, m_1$$

и

$$a_{m+l} \underset{N\setminus\{1\}}{\sim} a_m.$$

Обозначим $\bar{M}=\{1, \ldots, \bar{m}\}$, где

$$\bar{m}=m+m_1 \geqslant m+n\,(m-1). \tag{1}$$

Полученный групповой профиль обозначив через $\bar{\mathcal{G}}$, по доказанному имеем: $a_i \succ a_j$ в $R\,(\bar{\mathcal{G}})$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_j$ в $R\,(\mathcal{G})$, $i, j \in M \subset \bar{M}$. Представим профиль $\bar{G}$ матрицей $U\,(\bar{\mathcal{G}})$. Из определения $U\,(\mathcal{G})$ имеем:

$$u_i^s \leqslant m-1,\ s \neq 1,\ i \in \bar{M}. \tag{2}$$

Для столбца $n^1=(u_1^1, \ldots, u_{\bar{m}}^1)$ имеем, что

$$\{0,\ 1,\ \ldots,\ \bar{m}_1\} \subset \{u_1^1,\ \ldots,\ u_{\bar{m}}^1\},\ \bar{m}_1=u_{\bar{m}}^1 \geqslant n\,(m-1), \tag{3}$$

где неравенство (3) выполняется в силу (1).

В силу аксиом 1 и 2 групповое упорядочение альтернатив a_i, $i \in \bar{M}$, а тем самым и a_i, $i \in M$, зависит только от строк $u_i=(u_i^1, \ldots, u_i^n)$, $i=1, \ldots, \bar{m}$, матрицы $U\,(\mathcal{G})$. Иначе, для нахождения группового решения достаточно упорядочить строки u_i, $i \in M$ согласно аксиомам 1–5.

Присоединим к матрице $U\,(\mathcal{G})$ такие строки

$$
\begin{aligned}
&u_{i1}=(u_i^1+u_i^n,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^{n-1},\ 0),\\
&u_{i2}=(u_i^1+u_i^n+u_i^{n-1}, u_i^2 \ldots,\ 0,\ 0),\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&u_{i,\,n-1}=(u_i^1+\ldots+u_i^n,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0)
\end{aligned}
$$

для всех $i \in M$.

Покажем, что присоединение таких строк не меняет порядка u_i, $i \in \bar{M}$, т.е. $a_i \succ a_j$ в $R\,(\bar{\mathcal{G}})$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_j$ в $R\,(\bar{\bar{\mathcal{G}}})$, $i, j \in \bar{M}$, где $\mathcal{G}$ профиль, полученный присоединением альтернатив $a_{i1}, \ldots, a_{i,\,n-1}$, $i=1, \ldots, m$.

В силу (2) и (3) имеем, что условие б) аксиомы 5 выполнено. Для доказательства того, что выполняется условие а) аксиомы, 5, покажем, что

$$u_i \sim u_{i1} \sim \ldots \sim u_{i,}\,u_{n-1}. \tag{4}$$

Ограничимся доказательством справедливости $u_i \sim u_{i1}$, поскольку другие попарные эквивалентности $u_{ik} \sim u_{i,\,k+1}$ получаются аналогично, и (4) следует ввиду транзитивности „$\succsim$“ из аксиомы 1.

Итак:

$$
\begin{aligned}
&u_i=(u_i^1,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^{n-1},\ u_i^n),\\
&u_{i1}=(u_i^1+u_i^n,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^{n-1},\ 0).
\end{aligned}
$$

Заменим профиль $\bar{\bar{\mathcal{G}}}$ на $\bar{\bar{\mathcal{G}}}'$, который отличается от $\bar{\bar{\mathcal{G}}}$ только заменой $\bar{R}_1$ на $\bar{R}_1'$:

$$\bar{\bar{\mathcal{G}}}'=\{R_1,\ \bar{\bar{R}}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{R}}_n\} \to \bar{\bar{\mathcal{G}}}'=\{\bar{R}_1',\ \bar{R}_2,\ \ldots,\ \bar{R}_n\},$$

где в R'

$$a_i \underset{\{\tilde{1}\}}{\prec} a_k \text{ для всех } k \in \bar{\bar{M}}=\bar{M} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \{i1,\ \ldots,\ (i,\ n-1)\}\right),$$

и из того, что a_i, a_{i1} принадлежат отрезку $\bar{R}_1^L \in \bar{R}_1$, следует $\bar{R}_1^L \in \bar{R}_1'$.

По аксиоме 3 имеем, что групповое предпочтение a_i и a_{i1} от такой перестановки альтернатив не меняется. По определению $U(\mathcal{G})$ для $\mathcal{G}=\overline{\overline{\mathcal{G}}}'$ будем иметь:

$$u_i'=(0,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^s,\ \ldots,\ u_i^n),$$
$$u_{i1}'=(u_i^n,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^s,\ \ldots,\ 0).$$

Отсюда, в силу аксиом 1 и 2, получаем $u_i'\sim u_{i1}'$.

Переходя от $\overline{\overline{\mathcal{G}}}'$ к $\overline{\overline{\mathcal{G}}}$ и еще раз применяя аксиому 3, получаем

$$u_i\sim u_{i1}.$$

Следовательно, условие а) аксиомы 5 тоже выполнено и присоединение u_{i1} не меняет порядка u_i, $i\in\bar{M}$. Таким же образом доказываются и другие попарные эквивалентности $u_{ik}\sim u_{i,\ k+1}$. Следовательно, соотношение (4) верно и:

$$u_i\sim u_{i,\ n-1}=\left(\sum_{s=1}^{n} u_i^s,\ 0,\ \ldots,\ 0\right).$$

Аналогично, для любого $j\in M$

$$u_j\sim u_{j,\ n-1}=\left(\sum_{s=1}^{n} u_i^s,\ 0,\ \ldots,\ 0\right).$$

Из аксиомы 4 следует, что в $R(\overline{\overline{\mathcal{G}}})$ $u_{i,\ n-1}\succ u_{j,\ n-1}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s=1}^{n} u_i^s>\sum_{s=1}^{n} u_j^s.$$

Поскольку $u_i\sim u_{i,\ n-1}$, и $u_{j,\ n-1}\sim u_j$, то, ввиду свойства транзитивности отношения предпочтения, имеем, что в $R(\overline{\overline{\mathcal{G}}})$ $u_i\succ u_j$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s=1}^{n} u_i^s>\sum_{s=1}^{n} u_j^s.$$

Единственность. Если $\mathcal{G}$ представляется матрицей $U(\mathcal{G})$, то, как видно из предыдущего доказательства, правило единственно. В силу аксиомы 1, т.е. независимости группового решения от выбора $X(G)\in\mathcal{X}(\mathcal{G})$, следует утверждение теоремы.

Заметим, что групповое решение по только что доказанной теореме совпадает с естественным порядком чисел

$$\sum_{s\in N} u_k^s,\quad k\in M.$$

Покажем, что аксиомы 1 — 5 независимы. Мы докажем даже более сильное утверждение. Заметим, что каждая из аксиом 1 и 2 естественно распадается на две.

Аксиома 1′ (порядок). Каждому $X(\mathcal{G})\in\mathcal{X}(\mathcal{G})$ соответствует единственное групповое решение.

Аксиома 1″ (порядок). Если $X_1(\mathcal{G})$, $X_2(\mathcal{G})\in\mathcal{X}(\mathcal{G})$, то групповое упорядочение одно и то же для $X_1(\mathcal{G})$ и $X_2(\mathcal{G})$.

Аксиома 2′. Анонимность.

Аксиома 2″. Нейтральность.

Кроме того, пусть:

Аксиома 5′. Присоединение альтернативы a_k, $k \notin M$, такой, что для каждого $s \in N$ существует $i_s \in M$ и $a_k \underset{s}{\sim} a_{i_s}$, не меняет групповые предпочтения a_i, $i \in M$.

Теорема 2. *Аксиомы* 1′, 1″, 2′, 2″, 3, 4, 5′ *независимы.*

Доказательство. Достаточно привести примеры правил группового решения, которые для каждой из аксиом теоремы 2 удовлетворяли бы всем аксиомам, за исключением выбранной. Правилами, доказывающими независимость каждой альтернативы от остальных по порядку, являются следующие:

1) Правило простого большинства, очевидно, удовлетворяет всем аксиомам в теореме 2 за исключением 1′.

2) Пусть $X(\mathcal{G}) \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$. Рассмотрим такое правило группового решения, что $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s \in N} x_i^s > \sum_{s \in N} x_j^s.$$

Аксиомы 1′, 2′, 2″, 4, очевидно совместимы с таким правилом.

Пусть R_s заменяется на R_s' и существует

$$R_s^L \in R_s,\ R_s^L \in R_s'.$$

Если $i \in L$ положим $x_i'^s = x_i^s$ где, $x_i'^s$ — элемент матрицы

$$X(\mathcal{G}'),\ \mathcal{G}' = \{R_1, \ldots, R_s', \ldots, R_n\},\ \mathcal{G} = \{R_1, \ldots, R_s, \ldots, R_n\}.$$

Ввиду того, что групповое решение устанавливается естественным порядком чисел $\sum\limits_{s \in N} x_k^s$, $k = 1, \ldots, m$, аксиома 3 также удовлетворяется.

Аналогично, пусть $\bar{x}_i^s = x_i^s$ для $i \in M$, где $\bar{x}_i^s$ — элемент матрицы $X(\bar{\mathcal{G}})$ и $\mathcal{G}$ получается из $\mathcal{G}$ присоединением к $R_s \in \mathcal{G}$ альтернативы a_k, $k \notin M$. Отсюда видно, что и аксиома 5′ выполняется.

Нетрудно придумать для любого G, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, такую $X(\mathcal{G}) \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$, чтобы порядок чисел $\sum\limits_{s \in N} u_k^s$ отличался от порядка $\sum\limits_{s \in N} x_k^s$. Следовательно, имеем правило группового решения, отличное от правила, определяемого аксиомами 1—5, и которое удовлетворяет всем аксиомам теоремы 2 за исключением 1″.

3) Фиксируем какой-то $s_0 \in N$ и определяем групповое решение $R(\mathcal{G})$: $a_i \underset{s_0}{\succ} a_j \to a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$. Если $a_i \underset{s_0}{\sim} a_j$, то групповое предпочтение между a_i и a_j устанавливается аксиомой 4. Очевидно, что такое правило (диктаторство в случае $R_{s_0} \in \mathcal{R}_0$) удовлетворяет всем аксиомам теоремы 2 за исключением аксиомы 2.

4) Независимость аксиомы нейтральности показывает следующее правило. Для альтернативы a_1 предположим, что в $R(\mathcal{G})$ $a_1 \succ a_i$, если только не верно $a_1 \underset{\widetilde{N}}{\prec} a_i$ и групповое предпочтение между остальными альтернативами, уста-

навливается порядком чисел $\sum\limits_{s\in N} u_k^s$, $k\neq 1$. Очевидно правило удовлетворяет аксиомам 1′, 1″, 2′, 3,5′. Из определения правила следует, что оно совместимо и с аксиомой 4.

5) Независимость аксиомы 3. Пусть V некоторая строго возрастающая функция от целых чисел. Пусть $R_s \in \mathcal{G}$ представляется вектором с компонентами $(v_1^s, \ldots, v_m^s)$, где $v_i^s = v(u_i^s)$, т.е. значение v в точке u_i^s, где u_i^s элемент $U(\mathcal{G})$. Очевидно, что $\| v_i^s \| = V(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$. Правило группового решения определим так, что предпочтения $R(\mathcal{G})$ совпадают с естественным порядком чисел $\sum\limits_{s\in N} v_k^s$, $k=1, \ldots, m$.

Покажем, что для любой строго возрастающей (но не линейной) функции v существует групповой профиль, для которого аксиома 3 не выполняется.

Линейность функции означает, что для любого m и значений функции v: $v(0)$, $v(1)$, $\ldots$, $v(m)$ выполняется

$$v(i+1) - v(i) = v(i) - v(i-1), \quad i=1, \ldots, m-1.$$

Допустим, что уже для $m=2$ условие линейности не выполняется.

Пусть $\mathcal{G} = \{R_1, R_2\}$ и

$$R_1 = a_1a_2a_3 \equiv a_1 \succ a_2 \succ a_3,$$

$$R_2 = a_2a_1a_3.$$

Имеем:

$$V(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \\ v_3^1 & v_3^2 \end{pmatrix}.$$

Как следует из определения

$$U(\mathcal{G}), \ u_1^1 = u_2^2 = 2, \ u_2^1 = u_1^2 = 1, \ u_3^1 = u_3^2 = 0.$$

Так как

$$v_1^1 = v(u_1^1) = v(u_2^2) = v_2^2 \text{ и } v(u_2^1) = v(u_1^2), \text{ то } v_1^1 + v_1^2 = v_2^1 + v_2^2$$

и, следовательно, $a_1 \sim a_2$. Поскольку допустили, что v не линейна для $m=2$, то

$$v(2) - v(1) \neq v(1) - v(0).$$

Если заменить $R_1 = a_1a_2a_3$ на $R_1' = a_3a_1a_2$, то из неравенства получаем, что для $\mathcal{G}' = \{R_1', R_2\}$ предпочтение между a_1 и a_2 уже не будет эквивалентным. Но, поскольку $a_1 \succ a_2$ – отрезок, принадлежащий как R_1, так и R_1', то аксиоме 3 предлагаемое правило не удовлетворяет.

Аксиомам 1′, 1″, 2′, 2″, 4 оно очевидно удовлетворяет. Аксиоме 5′ оно удовлетворяет ввиду определения $U(\mathcal{G})$, т.е. значение u_i^s, а тем самым и v_i^s не меняются от присоединения альтернатив способом определенным в аксиоме 5′.

6) Определим правило группового решения так, чтобы для любого $\mathcal{G}$ в $R(\mathcal{G})$ всегда $a_i \sim a_j$ для всех $i, j \in M$. Очевидно, что так определенное правило удовлетворяет всем аксиомам, за исключением 4.

7) Допустим, что для $\mathcal{G}^*=\{R_1, R_2, R_3\}$,

$$R_1=a_1a_2a_3,$$

$$R_2=a_3a_1a_2,$$

$$R_3=a_1a_2a_3,$$

$R(\mathcal{G}^*)=a_1\sim a_2\sim a_3$. Для остальных $\mathcal{G}\neq\mathcal{G}^*$ $R(\mathcal{G})$ совпадают с групповыми решениями, полученными по правилу, определенному теоремой 1. Правило удовлетворяет всем аксиомам теоремы 2 за исключением аксиомы 5'. Действительно, если удовлетворяется и аксиома 5', мы как и в теореме 1 показали бы, что $R(\mathcal{G}^*)$ может иметь только вид $a_1a_2\sim a_3$.

Из теоремы 2 немедленно получается следствие.

Следствие. Аксиомы 1–5 независимы.

Доказательство следует из того, что аксиомы 1' и 1" составляют аксиому 1, аксиомы 2' и 2" – аксиому 2, а аксиома 5 слабее аксиомы 5'.

§ 2. Правило Копленда

Модифицируются две аксиомы из § 1. Показывается, что модифицированная система аксиом с добавочной аксиомой 6 также определяет групповое правило.

В [5] был определен групповой профиль $\mathcal{G}^2\subset\mathcal{R}_0$, который получается из $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}$ следующим образом. Каждый $R_s\in\mathcal{G}\cap\mathcal{R}_0$ заменяется в $\mathcal{G}^2$ на R_s^1 и R_s^2, и $R_s^1=R_s^2=R_s$. Если $R_s\in\mathcal{G}\cap(\mathcal{R}\backslash\mathcal{R}_0)$, то эквивалентные отрезки в R_s^1 и в R_s^2 заменяется на противоположные (также см. [5]). Например, $R_s=a_1\sim a_2\sim\sim a_3\ a_4\sim a_5$ заменяется на $R_s^1=a_1a_2a_3a_4a_5$ и $R_s^2=a_3a_2a_1a_5a_4$.

Мы потребуем, чтобы правило группового решения удовлетворяло следующей аксиоме.

Аксиома 6. $R(\mathcal{G})=R(\mathcal{G}^2)$.

Аксиома 6 кажется приемлемой по крайней мере для $\mathcal{G}\subset\mathcal{R}_0$. Легко проверить, что аксиомы 1–5 и аксиома 6 несовместимы.

Пример 1. Пусть $\mathcal{G}=\{R_1, R_2, R_3\}$ и

$$R_1=a_1a_2\sim a_3,$$

$$R_2=a_3a_1a_2,$$

$$R_3=a_2a_3\sim a_1.$$

Тогда

$$U(\mathcal{G})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

и, следовательно, по теореме 1, аксиомы 1–5 определяют

$$R(\mathcal{G})=a_1\sim a_3a_2. \qquad (5)$$

Действительно,

$$\sum_{s=1}^{3} u_1^s=1+1+0=2,\ \Sigma u_2^s=1,\ \Sigma u_3^s=2.$$

Переведем

$$\mathcal{G} \text{ в } \mathcal{G}^2 = \{R_1^1,\ R_1^2,\ R_2^1,\ R_2^2,\ R_3^1,\ R_2^2\},$$

где

$$R_1^1 = a_1a_2a_3,\quad R_1^2 = a_1a_3a_2,$$

$$R_2^1 = R_2^2 = a_3a_1a_2,$$

$$R_3^1 = a_2a_3a_1,\quad R_3^2 = a_2a_1a_3.$$

Из теоремы 1 получаем, что аксиомы 1–5 для $\mathcal{G}^2$ определяют решение

$$R(\mathcal{G}^2) = a_1a_3a_2.$$

Отсюда и из (5) получаем, что аксиомы 1–6 несовместимы.

Изменим аксиомы 3,5 следующим образом.

Аксиома 3′. Если $R_s^L \in R_s'$ и не существует a_k, $k \in M \setminus L$ и $i \in L$ таких, что $a_k \sim a_i$ либо в R_s, либо в R_s', то $a_i \succ a_j$, $i, j \in L$, в $R(\mathcal{G}')$ тогда и только тогда, когда $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$,

$$\mathcal{G} = \{R_1,\ \ldots,\ R_s,\ \ldots,\ R_n\},\quad \mathcal{G}' = \{R_1,\ \ldots,\ R_s',\ \ldots,\ R_n\}.$$

Аксиома 5″ (присоединение особых строк). Если к a_i, $i \in M$, присоединяется альтернатива a_k, $k \notin M$, что $a_k \underset{s}{\prec} a_i$ для всех $i \in L \subset M$ и $s \in N$ то, групповые предпочтения между a_i, $i \in L$, не меняются.

Заметим, что аксиома 3′ является ослабленным вариантом аксиомы 3 § 1. Аксиома 5″, на наш взгляд, является еще более приемлемым вариантом аксиомы присоединения альтернатив (строк) чем аксиома 5 § 1.

Такая замена аксиом 3 и 5 позволяет нам доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует правило группового решения, удовлетворяющее аксиомам* 1, 2, 3′, 4, 5″, 6 *и оно единственно.*

Доказательство. Каждому групповому профилю опять сопоставим матрицу $U(\mathcal{G}) \in \mathcal{X}(\mathcal{G})$ (определение 2 § 1). В силу аксиомы 6 предположим, что $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$ и $n = 2l$. Заметим, что аксиомы 3′ и 5″ позволяют присоединять альтернативы a_{m+l}, т.е. $(m+l) \notin M$, так, что $a_{m+1} \underset{s}{\succ} a_i$ и $a_{m+l} \underset{s}{\succ} a_{m+l-1}$, $l \geqslant 1$, для всех $i \in M$ и $s \in N$, не меняя групповое предпочтение. Присоединим к a_i, $i \in M$, столько альтернатив a_{m+l}, чтобы число их было не меньше чем потребуется в последующих выкладках, скажем $l = 1, \ldots, 10\,nm$. Обозначим $\{1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+10nm\}$ через $\bar{M}$, а групповой профиль, полученный из $\mathcal{G}$ присоединением к $R_s \in \mathcal{G}$ альтернатив a_{m+l}, $l = 1, \ldots, 10nm$, через $\bar{\mathcal{G}}$. Имеем по аксиомам 3′ и 5″, что групповые предпочтения между a_i, $i \in M$, в $R(\bar{\mathcal{G}})$ совпадают с предпочтениями в $R(\mathcal{G})$.

Докажем, что если для двух альтернатив

$$a_i \text{ и } a_j,\ i,\ j \in M,\ \sum_{s \in N} u_i^s = \sum_{s \in N} u_j^s, \text{ то } a_i \sim a_j \text{ в } R(\bar{\mathcal{G}}).$$

Пусть a_i и a_j в матрице $U(\bar{\mathcal{G}})$ $\Big($или то же самое в $U(\mathcal{G})$ ввиду определения **2** и того, что $a_{m+l} \underset{s}{\succ} a_i$, $(m+l) \notin M$, $i \in M$, $s \in N\Big)$ представлены строками:

$$u_i = (u_i^1,\ u_i^2,\ \ldots,\ u_i^n),$$

$$u_j = (u_j^1,\ u_j^2,\ \ldots,\ u_j^n).$$

причем:

$$\sum_{s\in N} u_i^s = \sum_{s\in N} u_j^s. \tag{6}$$

Пусть $\bar{\mathcal{G}}$ изменен на $\bar{\mathcal{G}}'$ так, что относительно отрезков содержащих a_i и a_j условие аксиомы 3' выполнено. Тогда $u_i \to u_i'$, $u_j \to u_j'$, но $u_i^s - u_j^s = u_i'^s - u_j'^s$, $s \in N$, и, согласно аксиоме 3' $u_i \succ u_j \leftrightarrow u_i' \succ u_j'$. Далее мы будем пользоваться этим замечанием, т.е. прибавлять к столбцам (u_i^s, u_j^s) целые числа d_s так, чтобы $10nm \geqslant \geqslant u_i^s + d_s$, $u_j^s + d_s \geqslant 0$, не меняя обозначений u_i, u_j на u_i', u_j', а u_i', u_j' на u_i'', u_j'' и т.д.

Согласно этому и аксиоме 2 перепишем u_i и u_j в следующем виде

$$\begin{aligned} u_i &= (u_i^1, \ \ldots, \ u_i^r, \ 0, \ \ldots, \ 0), \\ u_j &= (0, \ \ldots, \ 0, \ u_j^{r+1}, \ \ldots, \ u_j^n). \end{aligned} \tag{7}$$

Так как к a_i, $i \in M$, присоединено достаточное число альтернатив таких, что $a_{m+l} \underset{s}{\succ} a_{m+l-1} \underset{s}{\succ} a_i$ для всех $i \in M$, $s \in N$, то, согласно предыдущему замечанию, положим, не меняя групповое предпочтение между a_i и a_j

$$u_i = \Big(\sum_{s=1}^{r} u_i^s, \ \sum_{s=2}^{r} u_i^s, \ \sum_{s=3}^{r} u_i^s, \ \ldots, \ \sum_{s=r-1}^{r} u_i^s, \ u_i^r, \ 0,$$

$$u_j^{r+1}, \ \sum_{k=1}^{2} u_j^{r+k}, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{n-r-1} u_j^{r+k} \Big),$$

$$u_j = \Big(\sum_{s=2}^{r} u_i^s, \ \sum_{s=3}^{r} u_i^s, \ \ldots, \ u_i^r, \ 0, \ u_j^{r+1}, \ \sum_{k=1}^{2} u_j^{r+k},$$

$$\sum_{k=1}^{3} u_j^{r+k}, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{n-r-1} u_j^{r+k}, \ \sum_{k=1}^{n-r} u_j^{r+k} \Big). \tag{8}$$

Заметим, что из (6) и (7) следует $\sum_{s=1}^{r} u_i^s = \sum_{k=1}^{n-r} u_j^{r+k}$. Обозначим:

$$c_1' = \sum_{s=1}^{r} u_i^s = \sum_{k=1}^{n-r} u_j^{r+k}, \ c_2' = \sum_{s=2}^{r} u_i^s, \ \ldots, \ c_r' = u_i^r,$$

$$c_{r+1}' = 0, \ c_{r+2}' = u_j^{r+1}, \ \ldots, \ c_n' = \sum_{k=1}^{n-r-1} u_j^{r+k};$$

и

$$c_s = c_s' + 1, \qquad s = 1, \ \ldots, \ n,$$

Тогда (8) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= (c_1, \ c_2, \ c_3, \ c_4, \ c_5, \ \ldots, \ c_{n-3}, \ c_{n-2}, \ c_{n-1}, \ c_n), \\ u_j &= (c_2, \ c_3, \ c_4, \ c_5, \ \ldots, \ c_{n-3}, \ c_{n-2}, \ c_{n-1}, \ c_n, \ c_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь все $c_s>0$, $s\in N$, $n=2l$ и $c_s\leqslant 2mn$, поскольку если $c_s>2mn$ то, $c'_s=\sum_{s=1}^{r} u_i^s=$ $=2mn$, ввиду определения $U(\mathcal{G})$, и сразу из аксиомы 4 следовало бы, что a_s строго предпочтительнее остальных альтернатив.

Из аксиом 3′ и 5″ получаем, что присоединение альтернативы a_k, $k\notin \bar{M}$ такой, что

$$u_k=(0,\ c_2+c_3,\ 0,\ c_4+c_5,\ 0,\ \ldots,\ c_{n-2}+c_{n-1},\ 0,\ c_n+c_1),$$

не меняет групповой порядок альтернатив a_i и a_j. Покажем, что $a_k\sim a_i$ и $a_k\sim a_j$. Ввиду аксиомы 3′ альтернативы a_k и a_i представляющие строки можно переписать в виде

$$u'_k=(0,\ c_3,\ 0,\ c_5,\ \ldots,\ c_{n-1},\ 0,\ c_1),$$

$$u'_i=(c_1,\ 0,\ c_3,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ c_{n-1},\ 0).$$

Из аксиом 1 и 2 следует, что $u'_k\sim u'_i$ или, что тоже самое, что $a_k\sim a_i$. Аналогично показывается $a_k\sim a_j$. Из $a_k\sim a_j$ и $a_k\sim a_i$, ввиду аксиомы 1, получим, что в $R(\mathcal{G})$ $a_i\sim a_j$.

Пусть $\sum_{s\in N} u_i^s<\sum_{s\in N} u_j^s$. После аналогичных рассуждений придем к выводу, что не меняя группового отношения предпочтения между a_i и a_j, их можно представить в виде (9), но только вместо c_1 в u_j будет $c'_1=c_1+\sum_{s\in N} u_j^s-$ $-\sum_{s\in N} u_i^s$ и

$$\begin{aligned} u_i&=(c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n),\\ u_j&=(c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n,\ c'_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что сейчас нельзя присоединять строки вида:

$$u'_i=(0,\ c_2+c_3,\ 0,\ \ldots,\ c_{n-2}+c_{n-1},\ 0,\ c_n+c_1),$$

$$u'_j=(0,\ c_2+c_3,\ 0,\ \ldots,\ c_{n-2}+c_{n-1},\ 0,\ c_n+c'_1),$$

так как может оказаться, что $c_n+c_1\leqslant c'_1$ и тогда о порядке строк u_i и u_j нельзя утверждать, что он не меняется.

Поэтому, ввиду того, что присоединили достаточное число альтернатив, соблюдая условия аксиомы 3′, перепишем (10) в виде:

$$\begin{aligned} u_i&=(c_1+a,\ c_2+a,\ c_3+a,\ \ldots,\ c_{n-1}+a,\ c_n+a),\\ u_j&=(c_2+a,\ c_3+a,\ c_4+a,\ \ldots,\ c_n+a,\ c'_1+a), \end{aligned} \tag{11}$$

где $a\geqslant 0$ – целое число такое, что

$$10nm\geqslant c_n+c_1+2a>c'_1+a. \tag{12}$$

Легко проверить, что такое a существует. Действительно, из правой части неравенства (12) имеем, что $a>c'_1-c_1-c_n$. Поскольку для всех $s\in N$, $c_s\leqslant 2mn$ то, если $a=3nm$, получаем, что (12) выполняется.

Не меняя групповое предпочтение между a_i и a_j к a_k, $k \in \overline{M}$, можно присоединить альтернативы, представляемые соответственно строками

$$\begin{aligned} u_i' &= (0,\ c_2+c_3+2a,\ 0,\ c_4+c_5+2a,\ \ldots,\ 0,\ c_n+c_1+2a), \\ u_j' &= (0,\ c_2+c_3+2a,\ 0,\ c_4+c_5+2a,\ \ldots,\ 0,\ c_n+c_1'+2a). \end{aligned} \tag{13}$$

Присоединение таких строк ввиду аксиом 3′ и 5″ действительно не меняет групповое предпочтение a_i и a_j, так как число a удовлетворяет неравенству (12). Из (11) и (13), пользуясь аксиомами 1, 2, 3′ можно получить, что в групповом решении

$$u_i' \sim u_i, \quad u_j' \sim u_j. \tag{14}$$

Ввиду аксиомы 4, $u_j' \succ u_i'$, так как $c_1' > c_1$.

Отсюда и из (14) в силу транзитивности отношения предпочтения заключаем, что

$$u_j \succ u_i,$$

или то же самое, что $a_j \succ a_i$.

Единственность, когда все $\mathcal{G}$ представляются только матрицами $U(\mathcal{G})$, очевидна. Отсюда и по аксиоме 1 получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *Аксиомы* 1′, 1″, 2′, 2″, 3, 4, 5″, 6 *независимы.*

Доказательство. Независимость каждой из аксиом 1′, 1″, 2′, 2″, 3, 4, 5″ от остальных доказывается так же, как и в теореме 2 (§ 1).

Независимость же аксиомы 6 доказывает пример 1, поскольку правило, полученное теоремой 1, удовлетворяет аксиомам 1, 2, 3, 4, 5″.

Из теоремы 4 получаем следствие.

Следствие. Аксиомы 1, 2, 3′, 4, 5″, 6 независимы.

Заметим, что правило группового решения, установленное теоремой 3 совпадает с правилом, предложенным Коплендом [3].

Введем обозначение:

$$n_{ij}^s = \begin{cases} 1, & \text{если в } R_s\, a_i \succ a_j, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{15}$$

По правилу Копленда $a_i \succ a_j$ в $R(\mathcal{G})$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{ik}^s - \sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{ki}^s > \sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{jk}^s - \sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{kj}^s. \tag{16}$$

Теорема 5. *Правило группового решения, установленное теоремой* 3 *совпадает с правилом Копленда.*

Доказательство. Покажем сначала, что групповое решение, определяемое неравенством (16) удовлетворяет условию $R(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}^2)$. Обозначим в $\mathcal{G}^2$ профили предпочтения R_s^1, R_s^2, полученные из R_s, через R_{s_1} и R_{s_2}. Для $R_s \in \mathcal{R}_0$ очевидно, что

$$\sum_{k \in M} [(n_{ik}^{s_1} + n_{ik}^{s_2}) - (n_{ki}^{s_1} + n_{ki}^{s_2})] = 2 \sum_{k \in M} (n_{ik}^s - n_{ki}^s). \tag{17}$$

Если $R_s = a_1 \sim \ldots \sim a_1 \sim \ldots \sim a_m$, то из (15), очевидно, следует что

$$\sum_{k \in M} [(n_{ik}^{s_1} + n_{ik}^{s_2}) - (n_{ki}^{s_1} + n_{ki}^{s_2})] = 0 = 2 \sum_{k \in M} (n_{ik}^{s} - n_{ki}^{s}).$$

Из последнего равенства заключаем, что (17) верно для любого $R_s \in \mathcal{R}$. Из (16) и (17) получаем, что действительно $R(\mathcal{G}) = R(\mathcal{G}^2)$. По правилу, установленному теоремой 3 имеем, что в $R(\mathcal{G})$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$, $a_i \succ a_j$ когда

$$\sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{ik}^s > \sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{jk}^s. \tag{18}$$

Перепишем левую часть неравенства (16). Так как $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}_0$, то

$$\sum_{s \in N} \sum_{k \in M} (n_{ik}^s - n_{ki}^s) = \sum_{s,k} \left(2n_{ik}^s - (n_{ik}^s + n_{ki}^s)\right) = \sum_{s,k} \left(2n_{ik}^s - (m-1)\right).$$

Отсюда и из (16) имеем, что $a_i \succ a_j$ по правилу Копленда тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{ik}^s > \sum_{s \in N} \sum_{k \in M} n_{jk}^s.$$

Сравнением последнего неравенства с (18) доказательство теоремы завершается.

Для правил группового решения, устанавливаемых теоремами 1 и 3, отметим следующее свойство.

Теорема 6. *Если $M = \{1, 2\}$ то, для того, чтобы присоединение третьей альтернативы не могло изменить группового порядка $a_1 \succ a_2$, достаточно $n_{12} > \frac{2}{3} n$.*

Доказательство. Из условия $n_{12} > \frac{2}{3} n$ получаем, что профилей предпочтения вида $a_2 \succ a_1$ строго меньше числа $\frac{1}{3} n$. Ввиду определения $U(\mathcal{G})$ и правил группового решения, устанавливаемых теоремами 1 и 3 получаем, что присоединение альтернативы $a_3 \underset{N}{\succ} a_1$ может только удвоить число $\sum_{s \in N} u_2^s$. Но, так как

$$n_{12} = \sum_{s \in N} u_1^s > \frac{2}{3} n,$$

а

$$2 \sum_{s \in N} u_2^s < \frac{2}{3} n,$$

то, следовательно, присоединение a_3 не изменит группового предпочтения $a_1 \succ a_2$.

Заметим, что если условие $n_{12} > \frac{2}{3} n$ не выполнено, то присоединение третьей альтернативы может и изменить групповое предпочтение, что показывает следующий пример.

Пусть $\mathcal{G}=\{R_1, R_2, R_3\}$ и

$$R_1=a_1a_2a_3,$$

$$R_2=a_3a_1a_2,$$

$$R_3=a_2a_3a_1.$$

По обоим правилам имеем $R(\mathcal{G})=a_1\sim a_2\sim a_3$, в то же время, если вычеркнуть a_3, то $a_1\succ a_2$.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
27.II.1970

Литература

1. K. J. Arrow, Social choice and individual values, Cowles Commission Monograph, 12, Wiley New York, 1951.
2. L. A. Goodman, H. Markowitz, Social welfare functions based on individual rankings American Journal Sociology, 58, 257–262, 1952.
3. A. H. Copeland, A reasonable social welfare function, Univ Michigan seminar on applications of mathematics to the social sciences, 1951.
4. Р. Д. Льюс, К. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.
5. А. И. Моркелюнас, Одно правило группового решения, Лит. матем. сб. X, 4 (1970) 745–764.

KAI KURIŲ GRUPINIŲ SPRENDIMŲ AKSIOMATINIAI APIBRĖŽIMAI

A. Morkeliūnas

(*Reziumė*)

Parodoma, jog egzistuoja tik vienintelė grupinio sprendimo taisyklė, tenkinanti 1–5 aksiomas (žr. § 1). Taisyklė, apibrėžiama šiomis aksiomomis, formaliai sutampa su Gudmano–Markovico taisykle ([2], [4]). 1, 2, 4 aksiomos, 3, 5 modifikuotos aksiomos ir 6 aksioma vienareikšmiškai apibrėžia kitą grupinio sprendimo taisyklę ([3], [4]). Tiek 1–5 aksiomos, tiek ir 1, 2, 3′, 4, 5″, 6 aksiomos (žr. § 2) nepriklausomos.

THE AXIOMATIC DEFINITIONS OF SOME GROUP DECISION RULES

A. Morkeliūnas

(*Summary*)

It is shown that there exists the only group decision rule which satisfies the axioms 1–5 § 1. The rule defined by these axioms formally coincides with the Goodman and Markowith rule (2 4). Axioms 1, 2, 4, modified axioms 3, 5 and axiom 6 uniquely define another group decision rule ([3], [4]). Axioms 1–5 § 1 as well as axioms 1, 2, 3′, 4, 5″, 6 § 2 are independent.