XI LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 1
ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1971

УДК 519.21

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ПЕРЕОЦЕНКОЙ

В. Мацкявичюс

1. Пусть задана двумерная марковская цепь $Y=\left((\beta^n, x_n), \mathscr{F}_n, \mathbf{P}_{\Theta, x}\right)$ в фазовом пространстве $\left((0,1]\times E, \mathscr{B}_1\times\mathscr{B}\right)$, где $(E, \mathscr{B})$ — любое фазовое пространство, $\mathscr{B}_1$ — σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $(0, 1]$, $\beta^n = \beta_0\beta_1 \ldots \beta_n$, $\beta_n - \mathscr{F}_n$ — измеримые случайные величины (с.в.), $0<\beta_n\leqslant 1$ почти всюду (п.в.) для всех $n\geqslant 0$. Будем предполагать, что выполнено условие:

I. *При любом* $A\in\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}$

$$\tilde{P}(x, A)=\mathbf{P}_{\Theta, x}\{(\beta_1, x_1)\in A\}$$

есть $\mathscr{B}$ — *измеримая функция от* x (*не зависящая от* Θ).

В работе рассматриваются оптимальные и ε-оптимальные правила остановки процесса Y с функцией выигрыша $f(\Theta, x)=\Theta g(x)$ $((\Theta, x)\in(0, 1]\times E)$, $g(x)$ — $\mathscr{B}$-измеримая функция на E. В [1] рассматривалась оптимальная остановка в случае, когда β_n есть взаимонезависимые с.в., не зависящие от x_n, $g(x)\geqslant 0$, в [6], — когда $\{x_n\}$ — однородная цепь с независимыми приращениями, $g(x)=x$, и β_n могут зависеть от x_n-x_{n-1}.

Доказывается одна общая теорема о достаточных статистиках, обобщающая теорему из [3] в том смысле, что рассмотрены случаи $\varepsilon\geqslant 0$ и функции выигрыша, принимающие значения разных знаков. Из нее следуют некоторые результаты относительно оптимальной остановки цепи Y, включающие вышеупомянутые результаты работ [1], [6].

2. Пусть $(y_n, \mathscr{F}_n, \mathbf{P}_y)$ — марковская цепь в фазовом пространстве $(\bar{E}, \bar{\mathscr{B}})$, L — множество $\bar{\mathscr{B}}$-измеримых функций $f=f(y)$, $y\in\bar{E}$, таких, что $-\infty<f(y)\leqslant +\infty$ и $\mathbf{M}_y f^-(y_n)<\infty$*), $n\geqslant 0$, $y\in\bar{E}$. Пусть $L(A^-)$ и $L(A^+)$ — совокупности функций из L, удовлетворяющих условиям

$$A^- : \mathbf{M}_y \sup f^-(y_n)<\infty,\quad y\in\bar{E},$$

$$A^+ : \mathbf{M}_y \sup f^+(y_n)<\infty,\quad y\in\bar{E},$$

соответственно. Обозначим также $L(A^-, A^+)=L(A^-)\cap L(A^+)$,

С.в. τ назовем *марковским моментом* (м.м.), если она принимает неотрицательные целые значения, $+\infty$, и для всех $n\geqslant 0$ $\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$. Если, кроме того,

---

*) $f^{\pm}=\max\{0, \pm f\}$.

$\mathbf{P}_y\{\tau<\infty\}=1$ для всех $y\in\bar{E}$, то τ будем называть *моментом остановки* (м.о.). Множество всех м.о. обозначим $\mathfrak{M}$. Пусть $f\in L(A^-)$. Функцию $s(y)=$ $=\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}}\mathbf{M}_y f(y_\tau)$ назовем *ценой игры*. Будем говорить, что $\tau\in\mathfrak{M}$ есть *ε-оптимальный* м.о., если $\mathbf{M}_y f(y_\tau)\geqslant s(y)-\varepsilon$ для всех $y\in\bar{E}$, и *оптимальный* м.о., если $\mathbf{M}_y f(y_\tau)=s(y)$ для всех $y\in\bar{E}$.

Доказывается (см. [7]), что:

2.1. *Если существует оптимальных м.о., то м.м.*

$$\tau=\min\{t: f(y_t)=s(y_t)\}$$

есть минимальный из оптимальных м. о.

Пусть T есть сохраняющий неравенства оператор в L. Функция $f\in L$ называется *T-эксцессивной*, если $Tf\leqslant f$. Наименьшая из T-эксцессивных функций, больших или равных $f(y)\in L$ называется *T-эксцессивной мажорантой* (T-э.м.) функции f. Марковской цепи соответствует оператор

$$Pf(y)=\mathbf{M}_y f(y_1)=\int\limits_{\bar{E}} P(y,\, dz)f(z), \qquad (f\in L)$$

где $P(y,\Gamma)=\mathbf{P}_y\{y_1\in\Gamma\}$ — переходная функция.

2.2 ([2], [4], [5]). *Если $s(y)$ есть P-э.м. (или просто э.м.) функции $f\in L(A^-)$, то*

$$s(y)=\max\{f(y), Ps(y)\}$$

и $s(y)$ совпадает с ценой игры.

2.3 ([2], [5]). *Для любого $\tau\in\mathfrak{M}$ и эксцессивной функции $s\in L(A^-)$*

$$\mathbf{M}_y\, s(y_\tau)\leqslant s(y), \qquad y\in\bar{E}.$$

2.4 ([4], [5]). *Для $f\in L(A^-)$ положим $Qf=\max\{f, Pf\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}Q^n f$ есть э. м. функции f.*

3. **Теорема.** *Пусть в фазовом пространстве задана марковская цепь с переходным оператором P. Пусть φ есть измеримое отображение $(\bar{E},\bar{\mathscr{B}})$ в $(\tilde{E},\tilde{\mathscr{B}})$. $h>0$ есть $\bar{\mathscr{B}}$-измеримая функция в $\bar{E}$ и c есть $\tilde{\mathscr{B}}$-измеримая функция в E. Предположим, что функция выигрыша имеет вид*

$$f(y)=h(y)\,c[\varphi(y)]$$

и $f\in L(A^-)$, причем для любой $\tilde{\mathscr{B}}$-измеримой функции u на $\tilde{E}$ такой, что $u[\varphi(y)]\in L$,

$$P[u(\varphi)\,h]=hTu(\varphi), \tag{1}$$

где T — сохраняющий неравенства оператор. Обозначим

$$\tau_\varepsilon=\min\{t: c[\varphi(y_t)]\geqslant\hat{c}[\varphi(y_t)]-\varepsilon\},$$

где $\hat{c}$ есть T — э.м. функции c.

1) *Если существует оптимальный м.о., то τ_0 есть минимальный из оптимальных м.о.*

2) *Если* $f \in L(A^+)$ $\left(\text{т.е. } f \in L(A^-, A^+)\right)$ *и* $0 < h \leqslant K$, *где* K — *константа, то* $\tau_{\frac{\varepsilon}{K}}$ *есть* ε-*оптимальный м.о. при* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. 1) Из (1) и предложения 2.4 следует, что э.м. функции $f(y)$ имеет вид $s(y) = h(y)\,\hat{c}\,[\varphi(y)]$. Легко видеть, что $\hat{c}$ есть T-э.м. функции c. Действительно, пусть $c(\varphi) \leqslant \bar{c}(\varphi) \leqslant \hat{c}(\varphi)$, $\varphi \in \tilde{E}$, и $T\bar{c} \leqslant \bar{c}$. Тогда из (1) получаем $P[\bar{c}(\varphi)h] = hT\bar{c}(\varphi) \leqslant h\bar{c}(\varphi)$ и $f \leqslant h\bar{c}(\varphi) \leqslant h\hat{c}(\varphi) = s$. Так как $s(y)$ — э.м.функции $f(y)$, то $h\bar{c}(\varphi) = h\hat{c}(\varphi)$, т.е. $\hat{c}(\varphi) = \bar{c}(\varphi)$. Теперь утверждение легко следует из предложения 2.1.

2) Докажем, что τ_ε есть м.о. для любого $\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$\hat{c}\,[\varphi(y)] = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} \mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, c\,[\varphi(y_\tau)]\right) < \infty.$$

Поэтому для произвольного $N > 0$ найдется $\tau = \tau(y) \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, c\,[\varphi(y_\tau)]\right) > \hat{c}\,[\varphi(y)] - \frac{\varepsilon}{N}\,. \tag{2}$$

Обозначим событие

$$M = \{c\,[\varphi(y_n)] < \hat{c}\,[\varphi(y_n)] - \varepsilon \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Тогда $c\,[\varphi(y_n)] \leqslant \hat{c}\,[\varphi(y_n)] - \varepsilon\chi_M$ для всех $n \geqslant 0$, где χ_M — характеристическая функция события M. Отсюда, на основании (2) и предложения 2.3, следует

$$\hat{c}\,[\varphi(y)] - \frac{\varepsilon}{N} < \mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, c\,[\varphi(y_\tau)]\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, \hat{c}\,[\varphi(y_\tau)]\right) - \varepsilon\mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, \chi_M\right) \leqslant$$

$$\leqslant \hat{c}\,[\varphi(y)] - \varepsilon\mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, \chi_M\right),$$

т.е.

$$\mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)}\, \chi_M\right) > \frac{1}{N}\,.$$

В силу производительности N

$$\mathbf{M}_y \left(\frac{h(y_\tau)}{h(y)} \chi_M\right) = 0.$$

Так как

$$\frac{h(y_\tau)}{h(y)} < 0. \quad \text{то } \mathbf{P}_y(M) = \mathbf{M}_y(\chi_M) = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{P}_y\{\tau_\varepsilon < \infty\} = 1$.

Докажем теперь ε-оптимальность м.о. $\tau_{\frac{\varepsilon}{K}}$. Заметим, что для всех $n \geqslant 0$, на основании 2.2

$$\{\tau_\varepsilon > n\} \subset \{c\,[\varphi(y_n)] < \hat{c}[\varphi(y_n)] - \varepsilon\} = \{f(y_n) < s(y_n) - \varepsilon h(y_n)\} \subset$$

$$\subset \{f(y_n) \neq s(y_n)\} \subset \{s(y_n) = Ps(y_n)\}.$$

Отсюда, ввиду равенства $Ps(y_n)=M_y[s(y_{n+1}) \mid F_n]$ получаем (см. также [5] лемма 11.5)

$$s(y)=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon=0\}} s(y)+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>0\}} Ps(y)=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon=0\}} s(y)+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>0\}} s(y_1)=$$

$$=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon=0\}} s(y)+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon=1\}} s(y_1)+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>1\}} Ps(y_1)=$$

$$=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon\leqslant 1\}} s(y_{\tau_\varepsilon})+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>1\}} s(y_2)=\cdots=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon\leqslant n\}} s(y_{\tau_\varepsilon})+\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} s(y_n). \tag{3}$$

(Здесь везде интегрирование по мере $\mathbf{P}_y$.)

Так как

$$s(y_n)\leqslant \mathbf{M}_{y_n}\sup_{k\geqslant n} f^+(y_k),$$

то

$$\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} s(y_n)\leqslant \int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} \mathbf{M}_{y_n}\sup_{k\geqslant n} f^+(y_k)=\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} \sup_{k\geqslant n} f^+(y_k)\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} \sup_k f^+(y_k)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} s(y_n)\geqslant -\int\limits_{\{\tau_\varepsilon>n\}} \sup_k f^-(y_k)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Поэтому, переходя к пределу в (3) при $n\to\infty$, получаем $s(y)=\mathbf{M}_y s(y_{\tau_\varepsilon})$. Отсюда

$$\mathbf{M}_y f(y_{\tau_{\frac{\varepsilon}{K}}})\geqslant \mathbf{M}_y s(y_{\tau_{\frac{\varepsilon}{K}}})-\frac{\varepsilon}{K}\mathbf{M}_y h(y_{\tau_{\frac{\varepsilon}{K}}})\geqslant s(y)-\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть Y — в п. 1 определенная марковская цепь. Пусть T — оператор, определенный равенством*

$$Tg(x)=\mathbf{M}_{\Theta,x}[\beta_1 g(x_1)]. \tag{4}$$

Обозначим

$$\tau_\varepsilon=\min\{t : g(x_t)\geqslant \hat{g}(x_t)-\varepsilon\},$$

где $\hat{g}$ есть T — э. м. функции g.

Тогда:

а) *если $f(\Theta, x)\in L(A^-)$ и существует оптимальный м.о. цепи Y, то τ_0 есть минимальный из оптимальных м.о.*;

б) *если $f(\Theta, x)\in L(A^-, A^+)$, то τ_ε есть ε-оптимальный м.о. цепи Y, т.е. в обоих случаях достаточно наблюдать за цепью*

$$\left(x_n, \sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n), \mathbf{P}_x\right).$$

Доказательство. Заметим, что оператор T определен корректно в силу условия **I**. Для доказательства следствия достаточно в условиях предыдущей теоремы положить $y=(\Theta, x)$, $y_n=(\beta^n, x_n)$ $\bar{E}=(0, 1]\times E$, $\bar{\mathscr{B}}=\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}$, $\tilde{E}=E$, $\tilde{\mathscr{B}}=\mathscr{B}$, $h(y)=\Theta$, $\varphi(y)=x$, $c(\varphi)=g(\varphi)$, $K=1$. Тогда очевидно, для любой $\mathscr{B}$-измеримой функции $u(x)=u[\varphi(y)]\in L$ справедливо (1).

В заключение хочу выразить благодарность Б. Григелионису за поставленную задачу и советы при ее решении.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
29.I.1970

Литература

1. Н. В. Андреев, Л. Г. Губенко, Э. С. Штатленд, Об оптимальной остановке марковских процессов с переоценкой, Теория оптимальных решений, **V** (1969), 100–102, Киев.
2. Е. Б. Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса, ДАН СССР, 150, 2 (1963), 238–240.
3. Е. Б. Дынкин, Достаточные статистики для задачи об оптимальной остановке. Теор. вер и прим., **XIII**, 1 (1968), 151–152; **XIII**, 4 (1968), 755.
4. Б. И. Григелионис, А. Н. Ширяев, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов. Теор. вер. и прим., **XI**, 4 (1966), 612–631.
5. А. Н. Ширяев, Статистический последовательный анализ, „Наука", 1969.
6. L. E. Dubins, H. Teicher, Optimal stopping when the future is disconnted, Ann. Math. Statist., **38**, 2 (1967), 601–605.
7. I. S. Chow, H. Robbins, On values associated with a stochastic sequence, Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., **I** (1967), 427–440, Univ. Calif. Press.

APIE MARKOVO GRANDINĖS SU PERKAINOJIMU OPTIMALŲ SUSTABDYMĄ

V. Mackevičius

(Reziumė)

Įrodoma viena bendra teorema apie pakankamas statistikas optimalaus sustabdymo uždaviniui. Remiantis šia teorema, gaunamos optimalios ir ε-optimalios sustabdymo taisyklės Markovo grandinei su perkainojimu.

ON OPTIMAL STOPPING FOR THE MARKOV CHAIN WITH DISCOUNTING

V. Mackevičius

(Summary)

In the paper a general theorem on sufficient statistics for the problem of optimal stopping is proved. By means of this theorem, optimal and ε-optimal stopping rules for the Markov chain with discounting are obtained.