УДК 511

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ В ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. I

Й. Кубилюс

В данной работе рассматривается распределение значений вещественной аддитивной арифметической функции $f(m)$. Через $N(m\leqslant n,\ \ldots)$ будем обозначать число целых положительных $m\leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые будут всякий раз указываться в скобках вместо многоточия. Известно (см., напр., [1]), что при некоторых весьма общих предположениях можно подобрать такие константы A_n, $B_n>0$, чтобы при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n}\ N(m\leqslant n,\ f(m)<A_n+B_n x) \tag{1}$$

стремилось к некоторой функции распределения в точках непрерывности последней. Переходя от функций распределения к преобразованиям Фурье, мы задачу сводим к изучению поведения суммы

$$\frac{1}{n}\ e^{itA_n/B_n}\sum_{m=1}^{n} e^{itf(m)/B_n}$$

при $n\to\infty$, что, в свою очередь, сводится к изучению поведения суммы

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g(m),$$

где $g(m)$ – комплекснозначная мультипликативная функция, удовлетворяющая условию $|g(m)|=1$. Последняя сумма является сумматорной функцией ряда Дирихле

$$Z(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g(m)}{m^s}, \tag{2}$$

где s – комплексное переменное, $s=\sigma+i\tau$. Для ее изучения мы сможем применить метод контурного интегрирования, если будем знать поведение $Z(s)$ вблизи прямой $\sigma=1$. Для этого достаточно предположить, что существует такая константа $\varkappa$, что ряд по всем простым числам p

$$\sum_{p}|g(p)-\varkappa|\ \frac{\ln p}{p}$$

сходится. Этот метод позволяет получить точные оценки быстроты сходимости законов распределения (1) к предельному закону при довольно слабых предположениях.

Условимся о следующих обозначениях. Пусть λ — вещественная константа, не равная нулю, $a_p=|f(p)-\lambda|$. Предположим, что функция $f(m)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{a_p<c} \frac{a_p \ln p}{p} < c_1, \quad \sum_{a_p\geqslant c} \frac{\ln p}{p} < c_2, \quad \sum_{a_p\geqslant c} \frac{a_p}{p} < c_3, \quad \sum_{p} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha} < c_4, \tag{A}$$

где $c, c_1, \ldots, c_4$, а также в дальнейшем $c_5, c_6, \ldots$, — положительные константы. Через B будем обозначать величину, не всегда одну и ту же, ограниченную по модулю константой. Всюду берутся главные значения логарифмов и степеней. Положим еще $\nu=(\ln\ln n)^{1/2}$,

$$N_n(x)=N(m\leqslant n,\ f(m)<\lambda\nu^2+|\lambda|\nu x). \tag{3}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Если вещественная функция $f(m)$ удовлетворяет условиям (A), то при $n\geqslant 20$*

$$\frac{1}{n} N_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du+\frac{B}{\nu}.$$

Константа, ограничивающая B, зависит лишь от $\lambda, c, c_1, \ldots, c_4$.

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме, которую мы докажем с помощью упомянутого выше метода.

Лемма 1. *Пусть $g(m)$ — комплекснозначная мультипликативная функция, $|g(m)|\leqslant 1$. Предположим, что существуют величина $\varkappa$, не зависящая от p, и константа c_5, удовлетворяющие неравенству*

$$\sum_{p} |g(p)-\varkappa| \frac{\ln p}{p} < c_5.$$

Тогда при $x\geqslant 20$

$$\sum_{m\leqslant x} g(m)=\frac{x(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)} \prod_{p} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa} \left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)+Bx\sqrt{\frac{\ln\ln x}{\ln x}}.$$

Здесь $\Gamma(\varkappa)$ — гамма-функция. Бесконечное произведение сходится абсолютно. Константа, ограничивающая величину B, зависит лишь от c_5.

Очевидно, $|\varkappa|\leqslant 1$. В случае $\varkappa=0$ или $\varkappa=-1$ мы считаем, что $1/\Gamma(\varkappa)=0$.

Эта лемма позволяет не только доказать нашу теорему, но имеет целый ряд других следствий в теории распределения значений аддитивных и мультипликативных арифметических функций. Имея в виду дальнейшие приложения, мы докажем несколько более общую лемму.

Лемма 2. *Пусть $g(m)$ — комплекснозначная мультипликативная функция. Предположим, что существует такая величина $\varkappa$, не зависящая от p, $|\varkappa|\leqslant c_6$, что*

$$\sum_{p} |g(p)-\varkappa| \frac{\ln p}{p} < c_7,$$

$$\sum_{p} |g(p)| \frac{\ln p}{p^2} < c_8, \tag{4}$$

$$\sum_{p} \sum_{\alpha=2}^{\infty} |g(p^\alpha)| \frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha} < c_9.$$

Тогда при $x \geqslant 20$

$$\sum_{m \leqslant x} g(m) = \frac{x(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)} \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa} \left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^\alpha}\right) + BRx(\ln x)^{|\varkappa|/2-1},$$

где

$$R = \begin{cases} (1-|\varkappa|)^{-1/2} & \text{при } |\varkappa| < 1-(\ln\ln x)^{-1}, \\ (\ln\ln x)^{1/2} & \text{при } \big||\varkappa|-1\big| \leqslant (\ln\ln x)^{-1}, \\ (|\varkappa|-1)^{-1/2}(\ln x)^{|\varkappa|/2-1/2} & \text{при } |\varkappa| > 1+(\ln\ln x)^{-1}. \end{cases} \tag{B}$$

Бесконечное произведение сходится абсолютно. Величина B ограничена константой, зависящей лишь от c_6, c_7, c_8, c_9.

В случае $\varkappa = 0, -1, -2, \ldots$ мы полагаем $1/\Gamma(\varkappa) = 0$.

Доказательство основано на тех же идеях, что и лемма нашей работы [2]. В силу (4) и неравенства

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|g(m)|}{m^\sigma} = \prod_p \left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_p \left(1+\frac{|g(p)-\varkappa|}{p^\sigma}+\frac{|\varkappa|}{p^\sigma}+\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|g(p^{\alpha\sigma})|}{p^{\alpha\sigma}}\right)$$

имеем, что ряд (2) сходится абсолютно при $\sigma > 1$.

Обозначим

$$\chi_p(s) = \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\varkappa} \left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right) = 1+\frac{g(p)-\varkappa}{p^s}+\left[\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\varkappa}-1+\frac{\varkappa}{p^s}\right]+$$

$$+\left[\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\varkappa}-1\right]\frac{g(p)}{p^s}+\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\varkappa}\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}. \tag{5}$$

При $\sigma \geqslant 1$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\varkappa} = 1-\frac{\varkappa}{p^s}+\frac{B}{p^{2\sigma}}.$$

Поэтому опять согласно (4) $\chi_p(s)$ представляет собою аналитическую функцию при $\sigma > 1$ и непрерывную функцию при $\sigma \geqslant 1$. Далее, при $\sigma \geqslant 1$

$$\chi_p(s) = 1+\frac{g(p)-\varkappa}{p^s}+\frac{B}{p^2}(1+|g(p)|)+B\sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{|g(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

Отсюда заключаем, что произведение

$$H(s) = \prod_p \chi_p(s)$$

сходится абсолютно и равномерно при $\sigma \geqslant 1$. Следовательно, $H(s)$ является аналитической при $\sigma > 1$ и непрерывной при $\sigma \geqslant 1$. При этом $H(s) = B$. Очевидно,

$$Z(s) = \zeta^{\varkappa}(s)\, H(s), \tag{6}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Из соотношений

$$\frac{1}{p^{\alpha s}}=\frac{1}{p^{\alpha s_0}}+B|s-s_0|\,\frac{\ln p^\alpha}{p^\alpha},$$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^\varkappa=\left(1-\frac{1}{p^{s_0}}\right)^\varkappa+B|s-s_0|\,\frac{\ln p}{p},$$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^\varkappa-1+\frac{\varkappa}{p^s}=\left(1-\frac{1}{p^{s_0}}\right)^\varkappa-1+\frac{\varkappa}{p^{s_0}}+B|s-s_0|\,\frac{\ln p}{p^2},$$

справедливых для $\sigma\geqslant 1$, $\mathbf{Re}\, s_0\geqslant 1$, и (5) выводим, что для тех же s, s_0

$$\chi_p(s)=\chi_p(s_0)+B|s-s_0|\left(\frac{|g(p)-\varkappa|}{p}+\frac{1+|g(p)|}{p^2}+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{\alpha|g(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)\ln p,$$

откуда в силу (4) легко следует оценка

$$H(s)=H(s_0)+B|s-s_0| \tag{7}$$

опять для тех же s, s_0. Отсюда заключаем также, что в полуплоскости $\sigma\geqslant 1$ существует производная $H'(s)$, причем

$$H'(s)=B. \tag{8}$$

Нам еще понадобятся следующие известные оценки:

$$\ln|\zeta(s)|=\ln\ln(|\tau|+2)+B, \tag{9}$$

$$\zeta'(s)=B\ln^2(|\tau|+2),$$

справедливые при $\sigma\geqslant 1$, $|s-1|\geqslant 1$. Можно обойтись и менее точными оценками.

Пусть γ — вещественное число, $\gamma=B$, $x\geqslant 20$, $\rho=(\ln x)^{-1}$,

$$A^2(x,\gamma)=\int_\rho^1 t^{-\gamma}\,dt.$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(1-\gamma)}\leqslant A^2(x,\gamma)\leqslant\frac{1}{1-\gamma} &&\text{при}\quad \gamma\leqslant 1-\frac{1}{\ln\ln x},\\
&\frac{1}{e}\ln\ln x\leqslant A^2(x,\gamma)\leqslant e\ln\ln x &&\text{при}\quad |\gamma-1|\leqslant 1+\frac{1}{\ln\ln x},\\
&\frac{(\ln x)^{\gamma-1}}{2(\gamma-1)}\leqslant A^2(x,\gamma)\leqslant\frac{(\ln x)^{\gamma-1}}{\gamma-1} &&\text{при}\quad \gamma\geqslant 1+\frac{1}{\ln\ln x}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначая

$$T(x)=\sum_{m\leqslant x} g(m)(x-m),$$

в силу тождества

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^{s+1}\,ds}{s(s+1)}=\begin{cases} y-1 & \text{при}\quad y\geqslant 1,\\ 0 & \text{при}\quad 0<y\leqslant 1\end{cases}$$

мы получаем, что

$$T(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+1}Z(s)}{s(s+1)}\,ds.$$

Пользуясь свойствами функций $\zeta(s)$ и $H(s)$, мы можем заменить путь интегрирования контуром $L=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_5$, где L_1, L_2, L_4, L_5 состоят из отрезков прямой $s=1+i\tau$, $-\infty<\tau\leqslant -1$, $-1<\tau\leqslant-\rho$, $\rho\leqslant\tau<1$, $1\leqslant\tau<\infty$, соответственно, а L_3 является полуокружностью: $s=\rho e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Полагая

$$\frac{Z(s)}{s(s+1)}=\frac{H(1)}{2(s-1)^{\varkappa}}+K(s),$$

имеем:

$$T(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_1\cup L_5}\frac{x^{s+1}Z(s)}{s(s+1)}\,ds+\int\limits_{L_2\cup L_4}x^{s+1}K(s)\,ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{L_3}x^{s+1}K(s)\,ds-H(1)\int\limits_{L_1'\cup L_5'}\frac{x^{s+1}ds}{(s-1)^{\varkappa}}+H(1)\int\limits_{L'}\frac{x^{s+1}ds}{(s-1)^{\varkappa}}\right)=$$
$$=I_1+I_2+I_3-I_4+I_5,$$

где $L'=L_1'\cup L_2\cup L_3\cup L_4\cup L_5'$, а L_1' и L_5' — полупрямые $s=\sigma-i$, $-\infty<\sigma<1$, $s=\sigma+i$, $1>\sigma>-\infty$, соответственно.

Из (6), (8), (9) и оценки $H(s)=B$ мы получаем, что на контуре $L_1\cup L_5$

$$Z(s)=B\left(\ln(|\tau|+2)\right)^{c_{10}},$$

$$\left(\frac{Z(s)}{s(s+1)}\right)'=B\tau^{-2}\left(\ln(|\tau|+2)\right)^{c_{10}+3}.$$

Применяя интегрирование по частям так, чтобы интегрировалось x^{s+1}, имеем

$$I_1=\frac{Bx^2}{\ln x}.$$

В силу тождеств

$$K(s)=\left(H(s)\ \frac{\zeta^{\varkappa}(s)(s-1)^{\varkappa}-1}{(s-1)^{\varkappa}}+\frac{H(s)-H(1)}{(s-1)^{\varkappa}}-\frac{H(1)(s+2)}{(s-1)^{\varkappa-1}}\right)\frac{1}{s(s+1)},$$

$$K'(s)=\left[\varkappa H(s)\ \frac{\zeta^{\varkappa-1}(s)\zeta'(s)(s-1)^{\varkappa+1}+1}{(s-1)^{\varkappa+1}}-\varkappa\ \frac{H(s)-H(1)}{(s-1)^{\varkappa+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa H(1)(s+2)}{2(s-1)^{\varkappa}}+\zeta^{\varkappa}(s)\left(H'(s)-(2s+1)H(s)\right)\right]\frac{1}{s(s+1)},$$

хорошо известных свойств функции $\zeta(s)$ вблизи точки $s=1$ и (7), (8) мы имеем, что $K'(s)=B|s-1|^{-\mathrm{Re}\,\varkappa}$ на контуре $L_2\cup L_4$ и $K(s)=B|s-1|^{1-\mathrm{Re}\,\varkappa}$ на контуре L_3. Применяя опять интегрирование по частям, получаем, что

$$I_2=\frac{Bx^2}{\ln x}\left(1+\rho^{1-\mathrm{Re}\,\varkappa}+A^2(x,\ \mathrm{Re}\,\varkappa)\right)=\frac{Bx^2}{\ln x}A^2(x,\ \mathrm{Re}\,\varkappa)$$

в силу (10). Тривиальное оценивание дает

$$I_3=Bx^2(\ln x)^{\mathrm{Re}\,\varkappa-2},\quad I_4=\frac{Bx^2}{\ln x}.$$

Наконец, из представления Γ-функции контурным интегралом Ганкеля, мы получаем, что

$$I_5=\frac{H(1)x^2}{2\Gamma(\varkappa)}(\ln x)^{\varkappa-1},$$

если при целом неположительном $\varkappa$ условимся считать $1/\Gamma(\varkappa)=0$.

Собирая все оценки в силу (10) имеем

$$T(x)=\frac{H(1)\,x^2}{2\Gamma(\varkappa)}(\ln x)^{\varkappa-1}+\frac{Bx^2}{\ln x}A^2(x,\ \mathrm{Re}\,\varkappa). \tag{11}$$

Заметим, что из неравенства $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|$, справедливого для всех комплексных z_1, z_2, следует, что функция $|g(m)|$ также удовлетворяет условиям леммы с величиной $|\varkappa|$ вместо $\varkappa$. Поэтому в силу (11)

$$T^*(x)=\sum_{m\leqslant x}|g(m)|(x-m)=\frac{x^2H^*(1)}{2\Gamma(|\varkappa|)}(\ln x)^{|\varkappa|-1}+\frac{Bx^2}{\ln x}A^2(x,\ |\varkappa|), \tag{12}$$

где

$$H^*(1)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{|\varkappa|}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{|g(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)=B.$$

Положим

$$S(x)=\sum_{m\leqslant x}g(m),\quad S^*(x)=\sum_{m\leqslant x}|g(m)|.$$

Тогда

$$T(x)=\int_1^x S(u)\,du,\quad T^*(x)=\int_1^x S^*(u)\,du.$$

Пусть $\Delta=c_{11}x(\ln x)^{-|\varkappa|/2}A(x,|\varkappa|)$. Из (10) имеем, что при достаточно малом c_{11} справедливо неравенство $\Delta<x/2$. Из очевидных неравенств

$$\int_{x-\Delta}^{x}S^*(u)\,du\leqslant\Delta S^*(x)\leqslant\int_x^{x+\Delta}S^*(u)\,du$$

выводим

$$\frac{T^*(x)-T^*(x-\Delta)}{\Delta}\leqslant S^*(x)\leqslant\frac{T^*(x+\Delta)-T^*(x)}{\Delta}. \tag{13}$$

При $\delta=\pm\Delta$ из (12) следует

$$T^*(x+\delta)-T^*(x)=$$

$$=\frac{H^*(1)\,x^2}{2\Gamma(|\varkappa|)}(\ln x)^{|\varkappa|-1}\left[\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^2\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{\ln x}\right)^{|\varkappa|-1}-1\right]+$$

$$+\frac{Bx^2}{\ln x}\Big(A^2(x+\delta,\ |\varkappa|)+A^2(x,\ |\varkappa|)\Big).$$

Легко подсчитать, что в силу (10)

$$A^2(x+\delta,\ |\varkappa|)-A^2(x,\ |\varkappa|)=\frac{B\Delta}{x}(\ln x)^{|\varkappa|-2}=BA^2(x,\ |\varkappa|).$$

Поэтому, опять учитывая (10), имеем

$$T^*(x+\delta)-T^*(x)=\frac{\delta x H^*(1)}{\Gamma(|\varkappa|)}(\ln x)^{|\varkappa|-1}+B\Delta^2(\ln x)^{|\varkappa|-1}.$$

Из (13) заключаем

$$S^*(x)=\frac{xH^*(1)}{\Gamma(|\varkappa|)}(\ln x)^{|\varkappa|-1}+BxA(x,\ |\varkappa|)(\ln x)^{|\varkappa|/2-1}. \tag{14}$$

Переходим к сумме $S(x)$. Как и раньше, замечая, что $A^2(x, \operatorname{Re}\varkappa) \leqslant \leqslant A^2(x, |\varkappa|)$, из (11) имеем

$$T(x+\Delta)-T(x)=\frac{\Delta x H(1)}{\Gamma(\varkappa)}(\ln x)^{\varkappa-1}+B\Delta^2(\ln x)^{|\varkappa|-1}.$$

Далее, из (14) выводим, что при $x \leqslant u \leqslant x+\Delta$

$$|S(u)-S(x)| \leqslant S^*(x+\Delta)-S^*(x)=$$

$$=\frac{xH^*(1)}{\Gamma(|\varkappa|)}(\ln x)^{|\varkappa|-1}\left[\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)}{\ln x}\right)^{|\varkappa|-1}-1\right]+$$

$$+BxA(x, |\varkappa|)(\ln x)^{|\varkappa|/2-1}=B\Delta(\ln x)^{|\varkappa|-1}.$$

Из тождества

$$S(x)=\frac{T(x+\Delta)-T(x)}{\Delta}-\frac{1}{\Delta}\int\limits_x^{x+\Delta}\Big(S(u)-S(x)\Big)\,du$$

окончательно получаем

$$S(x)=\frac{xH(1)}{\Gamma(\varkappa)}(\ln x)^{\varkappa-1}+BxA(x, |\varkappa|)(\ln x)^{|\varkappa|/2-1},$$

что в силу (10) и есть утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Для упрощения записи и без ущерба общности мы можем ограничиться случаем $\lambda=1$. Характеристическая функция $h_n(t)$ закона (3) равна

$$h_n(t)=e^{-it\nu}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf(m)/\nu}. \tag{15}$$

Так как функция $f(m)$ удовлетворяет условиям (A), то

$$\sum_p |e^{itf(p)}-e^{it}|\frac{\ln p}{p} \leqslant |t|\sum_{a_p<c}\frac{a_p\ln p}{p}+2\sum_{a_p\geqslant c}\frac{\ln p}{p} \leqslant c_1|t|+2c_2.$$

Поэтому при $n \geqslant 20$, $|t| \leqslant c_{12}$ согласно лемме 1

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}e^{itf(m)}=\frac{(\ln n)^{e^{it}-1}}{\Gamma(e^{it})}\prod_p \psi_p(t)+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}, \tag{16}$$

где

$$\psi_p(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{e^{it}}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}.$$

Предположим, что $|t| \leqslant c_{12}$, где c_{12} достаточно малая постоянная. Имеем:

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{it}=1-\frac{e^{it}}{p}+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\,p^l}e^{it}(e^{it}-1)\ldots(e^{it}-l+1)=$$

$$=1-\frac{e^{it}}{p}+\frac{B|t|}{p^2}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{e^{it}-1}{p}\right)+\frac{B|t|}{p^2}.$$

Далее,

$$\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}=\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}+B|t|\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

Из этих оценок получаем

$$\psi_p(t)=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{e^{it}-1}{p}\right)\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}+\frac{B|t|}{p^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{e^{it}-1}{p}+\frac{e^{itf(p)}}{p}+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{e^{itf(p^\alpha)}}{p^\alpha}\right)+\frac{B|t|}{p^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}+\frac{e^{itf(p)}-e^{it}}{p}\right)+B|t|\left(\frac{1}{p^2}+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right)=$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{e^{itf(p)}-e^{it}}{p}+B|t|\left(\frac{1}{p^2}+\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}\right).$$

В силу условий (A) отсюда выводим

$$\prod_p \psi_p(t)=1+B|t|.$$

Хорошо известные свойства Г-функции дают оценку

$$\Gamma^{-1}(e^{it})=1+B|t|.$$

Из (15), (16) и неравенства

$$\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|\leqslant\frac{|u|^3}{6},$$

справедливого для всех вещественных u, при $|t|\leqslant c_{12}\nu$ имеем

$$h_n(t)=\exp\{(e^{it\nu}-1)\nu^2-it\nu\}\left(1+\frac{B|t|}{\nu}\right)+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}=$$

$$=\exp\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{B|t|^3}{\nu}\right)\cdot\left(1+\frac{B|t|}{\nu}\right)+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}.$$

Воспользуемся неравенством $|e^z-1|\leqslant|z|e^{|z|}$, справедливым для всех комплексных z. Получаем при c_{12} достаточно малом

$$h_n(t)=e^{-t^2/2}\left(1+\frac{B|t|^3}{\nu}\exp\frac{B|t|^3}{\nu}\right)\left(1+\frac{B|t|}{\nu}\right)+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}=$$

$$=e^{-t^2/2}\left(1+\frac{B|t|^3}{\nu}e^{t^2/4}\right)\left(1+\frac{B|t|}{\nu}\right)+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}=$$

$$=e^{-t^2/2}+\frac{B|t|(1+t^2)}{\nu}e^{-t^2/4}+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}. \tag{17}$$

Нам потребуется еще одна оценка для $h_n(t)$, более точная при очень малых t. Из (15) для любых t имеем

$$h_n(t)=(1+B|t|\nu)\left(1+\frac{B|t|}{n\nu}\sum_{m=1}^{n}|f(m)|\right).$$

Оценим последнюю сумму. В силу аддитивности функции $|f(m)|$

$$\sum_{m=1}^{n}|f(m)|=\sum_{m=1}^{n}\left|\sum_{p^\alpha\| m}f(p^\alpha)\right|\leqslant\sum_{p^\alpha\leqslant n}|f(p^\alpha)|\left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\leqslant$$

$$\leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}+n\sum_p\frac{|f(p)-1|}{p}+n\sum_p\sum_{\alpha=2}^{\infty}\frac{|f(p^\alpha)|}{p^\alpha}.$$

В силу (A) последнее выражение имеет порядок $Bn\nu^2$. Следовательно,

$$h_n(t)=(1+B\,|\,t\,|\,\nu)\ (1+B\,|\,t\,|\,\nu).$$

При $|\,t\,|\leqslant\nu^{-1}$

$$h_n(t)=1+B\,|t\,|\,\nu. \tag{18}$$

При $|\,t\,|>\nu^{-1}$ эта оценка тривиальна, однако нам она не потребуется.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся неравенством Эссеена. Положим $T=c_{12}\,\nu$, $\varepsilon=\nu^{-2}$. Имеем для всех вещественных x

$$D=\left|\ \frac{1}{n}\ N_n(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du\ \right|=\frac{B}{T}+B\int\limits_{0}^{\varepsilon}|\,h_n(t)-e^{-t^2/2}\,|\ \frac{dt}{t}+$$

$$+B\int\limits_{\varepsilon}^{T}|\,h_n(t)-e^{-t^2/2}\,|\ \frac{dt}{t}.$$

В первом интеграле воспользуемся оценкой (18) и неравенством

$$1-\exp\,(-t^2/2)=Bt^2,$$

а во втором – оценкой (17). Получим

$$D=\frac{B}{\nu}+B\int\limits_{0}^{\varepsilon}(t+\nu)\,dt+\frac{B}{\nu}\int\limits_{0}^{\infty}(1+t^2)\,e^{-t^2/4}\,dt+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}\int\limits_{\varepsilon}^{T}\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{B}{\nu}+\frac{B\nu}{\sqrt{\ln n}}\left(\ln T+\ln\ \frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{B}{\nu}.$$

Теорема доказана.

Вильнюсский Государственный
университет им. В. Капсукаса

Поступило в редакцию
8.V.1970

Литература

1. Й. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел, Вильнюс, 1962.
2. J. Kubilius, On local theorems for additive number-theoretic functions. Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Zur Errinerung an Edmund Landau (1877–1938), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968, 175–191.

GENERUOJANČIŲ DIRICHLĖ EILUČIŲ METODAS ADITYVINIŲ ARITMETINIŲ FUNKCIJŲ PASISKIRSTYMO TEORIJOJE. I

J. Kubilius

(*Reziumė*)

Jei $g(m)$ yra kompleksinė multiplikatyvinė aritmetinė funkcija, tenkinanti (4) sąlygas, kur p perbėga visus pirminius skaičius, $\varkappa$ yra kompleksinis skaičius, nepriklausąs nuo p, $|\,\varkappa\,|\leqslant c_6$, ir c_6, c_7, c_8, c_9 – konstantos, tai visiems $x>20$

$$\sum_{m\leqslant x}g\,(m)=\frac{x\,(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma\,(\varkappa)}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g\,(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\right)+BxR\,(\ln x)^{|\,\varkappa\,|/2-1}.$$

Čia Γ yra Oilerio gama-funkcija, o R nusakytas (B) formulėje. Daugiklio B modulis yra aprėžtas konstantos, kuri priklauso tik nuo c_6, c_7, c_8, c_9.

Iš šios asimptotinės formulės galima gauti įvairių išvadų apie aritmetinių funkcijų pasiskirstymą. Šiame straipsnyje įrodytas toks rezultatas.

Jei $f(m)$ yra reali adityvinė aritmetinė funkcija, tenkinanti (A) sąlygas, $a_p=|f(p)-\lambda|$ ir λ, c, c_1, c_2, c_3, c_4 yra konstantos, tai visiems $n\geqslant 20$ skaičius sveikų teigiamų $m\leqslant n$, tenkinančių nelygybę

$$f(m)<\lambda \ln\ln n+|\lambda|\, x\sqrt{\ln\ln n},$$

yra lygus

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du+\frac{Bn}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

Daugiklis B yra aprėžtas konstantos, priklausančios tik nuo λ, c, c_1, c_2, c_3, c_4.

THE METHOD OF DIRICHLET GENERATING SERIES IN THE THEORY OF DISTRIBUTION OF ADDITIVE ARITHMETIC FUNCTIONS. I

J. Kubilius

(*Summary*)

Let $g(m)$ be a complex-valued arithmetic multiplicative function. Suppose that the inequalities (4) are satisfied where p runs over all primes, $\varkappa$ is a complex number not depending on p, $|\varkappa|\leqslant c_6$ and c_6, c_7, c_8, c_9 are constants. Then for $x\geqslant 20$

$$\sum_{m\leqslant 1} g(m)=\frac{x(\ln x)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\varkappa}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{g(p^{\alpha})}{p^{\alpha}}\right)+BxR(\ln x)^{|\varkappa|/2-1}$$

where Γ is Euler's gamma-function and R is defined by (B). The multiplier B is bounded in modulu, by a constant which depends only on c_6, c_7, c_8, c_9.

Some results on the distribution of arithmetic functions may be obtained from this asymptotic formula. In this paper the following result is proved.

Let $f(m)$ be a real-valued additive function satisfying (A) where $a_p=|f(p)-\lambda|$ and let λ, c, c_1, c_2, c_3, c_4 be constants. Then for $n\geqslant 20$ the number of positive integers $m\leqslant n$ satisfying the inequality

$$f(m)<\lambda\ln\ln n+|\lambda|\, x\sqrt{\ln\ln n}$$

equals

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du+\frac{Bn}{\sqrt{\ln\ln n}}.$$

The multiplier B is bounded by a constant depending only on λ, c, c_1, c_2, c_3, c_4.